

НЕРАВНОВЕСНЫЕ ЭЛЕКТРОНЫ И ФОНОНЫ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

[Бочков В. С.], Гредескул Т. С., Гуревич Ю. Г.

Предложен новый подход к изучению разогрева электронов и фононов постоянным электрическим током. Для тонких образцов выяснены условия разогрева фононов и их влияния на электронный разогрев.

Разогрев носителей тока в полупроводниках конечных размеров, связанный с протеканием через образец электрического тока, довольно давно привлекает внимание как теоретиков [1, 2], так и экспериментаторов [3, 4]. При этом, как правило, считается, что фононы остаются энергетически равновесными (исключение составляют работы [5, 6], в которых рассматривалось влияние разогрева фононов на гальваномагнитные эффекты, однако сам механизм этого разогрева не изучался).

Между тем, как было показано в [7], в стационарных условиях обеспечить равновесность фононной подсистемы при протекании через образец тока весьма затруднительно, даже если размеры образца достаточно малы. Поэтому представляет несомненный интерес изучение температурных полей в электронной и фононной подсистемах и влияние на них геометрии образца, электронной и фононной поверхностных теплопроводностей. Именно этому вопросу и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим стандартную модель полупроводника в форме параллелепипеда, в котором вдоль оси x течет электрический ток, а вынос джоулева тепла осуществляется только через плоскости $z = \pm a$. Если размеры образца вдоль оси x достаточно велики (см. [1]), то задача о температурных полях одномерна, а сами температуры находятся из уравнений [1, 5]

$$-k_e^{-2} t_e'' + (t_e - t_p) = 1, \quad (1)$$

$$-k_p^{-2} t_p'' = (t_e - t_p) \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\mp L_{e,p} t_{e,p}' |_{z=\pm a} = t_{e,p} |_{z=\pm a}. \quad (3)$$

В (1)–(3) $t_{e,p} = (T_{e,p} - T_0)P/\sigma E_x^2$, $T_{e,p}(z)$ — температуры электронов и фононов, T_0 — температура окружающего образец термостата, σ — электропроводность, $k_{e,p}^{-2} = \kappa_{e,p}/P$, $\kappa_{e,p}$ — электронная и фононная теплопроводности, P — параметр, характеризующий электрон-фононное энергетическое взаимодействие $L_{e,p} = (k_{e,p}^2 l_{e,p})^{-1}$, $l_{e,p} = \eta_{e,p}/P$, $\eta_{e,p}$ — скорости поверхностной релаксации энергии для электронов и фононов. При написании (1)–(3) предполагалось, что электрическое поле E_x достаточно слабое, так что $t_{e,p} \ll \dot{P}T_0/\sigma E_x^2$.

Фигурирующие в (1), (2) длины $k_{e,p}^{-1}$ связаны с объемными характеристиками полупроводникового материала, причем, так как в полупроводниках обычно $\kappa_e/\kappa_p \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$ [8], $k_p^{-1} \gg k_e^{-1}$. В дальнейшем малость параметра $\beta = k_p^2/k_e^2$ будет существенно использоваться. Что касается длин $l_{e,p}$, то они определяются

и поверхностными характеристиками образца (большим значениям $l_{e,p}$ отвечает хороший теплообмен соответствующей подсистемы с термостатом). Отметим, что входящие в (3) длины $L_{e,p}$ имеют простой физический смысл: в образце, тонком по сравнению с одной из этих длин, соответствующая температура как функция координаты z практически постоянна (однородный режим, ср. с [9]).

В общем случае нахождение формального решения задачи (1)–(3) не представляет труда (см. [5, 6])

$$t_{e,p} = \frac{\beta (ak)^2}{2} \left[1 - \left(\frac{z}{a} \right)^2 \right] + \gamma_{e,p} \left[1 - \frac{k(1+\beta) l_e l_p + (ak) (\beta l_p - l_e) \operatorname{ch} kz}{k(1+\beta) l_e l_p + (l_p + l_e) \operatorname{th} ak} \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch} ka} \right] + ak \frac{l_e + \beta^2 l_p + k^{-1} (1+\beta) \operatorname{th} ak}{k(1+\beta) l_e l_p + (l_p + l_e) \operatorname{th} ak} + \frac{\beta l_p - l_e}{k(1+\beta) l_e l_p + (l_p + l_e) \operatorname{th} ak}, \quad (4)$$

где $\gamma_e = 1$, $\gamma_p = -\beta$, $k^2 = k_e^2 + k_p^2$. Как видно из (4), выражения для температурных распределений электронов и фононов достаточно сложны и громоздки.

В дальнейшем нас будут интересовать возможные типы температурных распределений в зависимости от соотношений между толщиной образца $2a$ и параметрами l_e и l_p . Для их исследования, как будет показано далее, несравненно проще и физически нагляднее использовать не (4), а исходные уравнения (1), (2) в различных предельных случаях.

Важным параметром, характеризующим энергетическую неравновесность каждой подсистемы и возможные каналы релаксации джоулевой энергии, выделяющейся в образце, является средняя температура подсистемы. Для ее нахождения проинтегрируем уравнения (1), (2) и воспользуемся граничными условиями (3). Тогда для $\bar{t}_{e,p} = \frac{1}{a} \int_0^a t_{e,p}(z) dz$ получаем законы сохранения тепла

в виде

$$(l_e/a) t_e(a) + (\bar{t}_e - \bar{t}_p) = 1, \quad (5)$$

$$(l_p/a) t_p(a) = (\bar{t}_e - \bar{t}_p). \quad (6)$$

Здесь $a^{-1} l_e t_e(a)$ — тепло, выносимое электронами через границы образца, $(\bar{t}_e - \bar{t}_p)$ — тепло, отдаваемое электронами решетке, равное теплу $a^{-1} l_p t_p(a)$, выносимому фононами через границу. Заметим, что в силу (5), (6) имеем

$$0 \leq \bar{t}_e - \bar{t}_p \leq 1. \quad (7)$$

С другой стороны, сами по себе $\bar{t}_{e,p}$ монотонно возрастают с увеличением толщины образца и при достаточно большом значении a могут быть сколь угодно велики. Справедливость этого утверждения вытекает из очевидных неравенств $\bar{t}_e \geq \bar{t}_p \geq t_p(a)$, $\bar{t}_e \geq t_e(a)$ и уравнения баланса для полного потока

$$(l_e/a) t_e(a) + (l_p/a) t_p(a) = 1. \quad (8)$$

При описании различных особенностей поведения средних температур можно выделить несколько классификаций характерных температурных распределений.

1) Возьмем сначала за основу классификации среднюю температуру электронов. Выделяемое в объеме джоулево тепло пропорционально толщине пластины $2a$. В предельно тонких образцах электронного механизма выноса вполне достаточно для обеспечения стационарного режима (при любых $l_{e,p} \neq 0$). Фононы в этом случае практически равновесны, а электроны слабо разогреты. В предельно толстых образцах вынос тепла в объем в основном осуществляется фоновной подсистемой (так как $x_p \gg x_e$). Однако объемная теплопроводность фононов хотя и велика, но конечна. Вследствие этого происходит сильный разогрев фоновной подсистемы, влекущий за собой, согласно (7), сильный разогрев электронов.

Будем говорить о слабом, промежуточном и сильном разогревах электронов в случаях, когда $\bar{t}_e \ll 1$, $\bar{t}_e \sim 1$ и $\bar{t}_e \gg 1$ соответственно. Монотонный рост средней температуры с толщиной образца позволяет ввести зависящие от пара-

метров $l_{e,p}$ и величин $k_{e,p}$ длины слабого l_w и сильного l_s разогревов так, чтобы толщинам $a \ll l_w$ соответствовал слабый разогрев ($\bar{t}_e \ll 1$), а толщинам $a \gg l_s$ — сильный ($\bar{t}_e \gg 1$). По определению, длины l_w, l_s связаны соотношением

$$l_w \leq l_s. \quad (9)$$

Для параметров $l_{e,p}$, таких, что $l_w \ll l_s$, может существовать интервал толщин $l_w \leq a \leq l_s$, отвечающий промежуточному разогреву ($\bar{t}_e \sim 1$).

Как видно из (7), слабый (сильный) разогрев электронов всегда сопровождается слабым ($\bar{t}_p \ll 1$) [сильным ($\bar{t}_p \gg 1$)] разогревом фононов.

2) Вторая возможная классификация температурных распределений основывается на сравнении средних температур электронов и фононов. Здесь возможны две взаимоисключающие ситуации: либо электроны существенно горячее фононов ($\bar{t}_e \gg \bar{t}_p$), либо электроны и фононы разогреты примерно одинаково ($\bar{t}_e \approx \bar{t}_p$). Первый из этих случаев, согласно (7), может реализоваться лишь в условиях слабого или промежуточного разогрева. При этом всегда $\bar{t}_p \ll \bar{t}_e \leq 1$, и поэтому естественно считать фононы приближенно равновесными. Во втором случае, когда $\bar{t}_e \approx \bar{t}_p$, фононы существенно неравновесны.

В достаточно тонких образцах, как уже отмечалось, фононы всегда приближенно равновесны (если $l_{e,p} \neq 0$). Поэтому можно ввести зависящую от $l_{e,p}$ и $k_{e,p}$ длину l_0 , такую, что в образцах $a \ll l_0$ фононы равновесны ($\bar{t}_p \ll \bar{t}_e$), а для больших толщин $a \gg l_0$ фононы существенно неравновесны ($\bar{t}_p \approx \bar{t}_e$). Поскольку в условиях сильного разогрева фононы неравновесны всегда, то справедливо неравенство

$$l_0 \leq l_s. \quad (10)$$

3) Третья классификация учитывает роль каждой из подсистем в процессе переноса тепла через границу образца. Согласно (5), в случае $\bar{t}_e - \bar{t}_p \ll 1$ вынос тепла осуществляется электронной подсистемой, а в случае $\bar{t}_e - \bar{t}_p \approx 1$ — фононной. Очевидно, что в достаточно тонких образцах основным является электронный механизм выноса тепла. Поэтому фононный механизм выноса может стать определяющим, только если толщина образца превзойдет некоторую длину l^* :

$$\begin{aligned} a &\ll l^*, & \bar{t}_e - \bar{t}_p &\ll 1, \\ a &\gg l^*, & \bar{t}_e - \bar{t}_p &\approx 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Отметим, что слабому разогреву всегда соответствует электронный механизм выноса тепла [см. (11)], так что

$$l_w \leq l^*, \quad (12)$$

хотя фононы при этом могут быть и неравновесными.

Зная расположение длин l_w, l_s, l_0 и l^* в порядке возрастания [совместимое с условиями (9)—(12)], можно полностью описать эволюцию средних температур с ростом толщины образца. Поэтому задача на этом уровне описания сводится к нахождению явных выражений для характерных длин l_w, l_s, l_0, l^* при любых заданных значениях параметров $l_{e,p}$.

Построение указанных длин удобнее всего провести, используя приближенные решения уравнений (1), (2), основанные на физически наглядной процедуре, описанной далее. Заметим, что в рамках этой же процедуры удается построить простые выражения для температурных полей $t_{e,p}(z)$.

Далее всюду считается, что при выполнении неравенства $\bar{t}_p \ll \bar{t}_e$ можно положить $\bar{t}_p(z) = \bar{t}_p = 0$. Это означает, что в выражении для фононной температуры всегда можно пренебречь малым по сравнению с электронной температурой слагаемым.

Из выражений (4) видно, что единственным пространственным масштабом задачи (кроме толщины образца) является величина $k^{-1} \approx k_e^{-1}$. Поэтому все образцы в зависимости от их толщины естественно разделить на тонкие ($a \ll k_e^{-1}$) и толстые ($a \gg k_e^{-1}$) и исследовать поведение температур отдельно для каждого из этих двух случаев. В данной работе мы ограничимся исследованием тонких образцов ($a \ll k_e^{-1}$).

Исследование возможных температурных распределений в тонких образцах значительно упрощается за счет двух обстоятельств. Первое из них состоит в том, что в тонких образцах температуру фононов всегда можно считать постоянной. В самом деле, на участках образца, где $k_e^{-2} |t_e''| \gg |t_e - t_p|$, фононная температура меняется существенно медленнее электронной, поскольку, согласно (1), (2), $|t_e''| \gg (k_e^2/k_p^2) |t_p''| \gg |t_p''|$. На участках, где выполняется противоположное неравенство $k_e^{-2} |t_e''| \ll |t_e - t_p|$, температуры подсистем связаны, как видно из (1), соотношением $t_e \approx 1 + t_p$. Тогда уравнение (2) принимает вид $-t_p'' = k_p^2$, так что изменение фононной температуры на этих участках $|\Delta t_p| \ll (ak_p)^2 \ll \ll (ak_e)^2 \ll 1 < t_e$ в силу выбранных приближений равно нулю. Таким образом, в (6) можно положить $t_p(a) = \bar{t}_p = t_p(z) = \text{const}$ и

$$t_p = \bar{t}_e / (1 + l_p/a). \quad (13)$$

Из формулы (13) видно, что при $a \ll l_p$ фононы почти равновесны [$t_p \sim (a/l_p) \bar{t}_e \ll \bar{t}_e$], а в противоположном случае ($a \gg l_p$) фононная температура близка к средней температуре электронов [$(\bar{t}_e - t_p) \sim (l_p/a) \bar{t}_e \ll \bar{t}_e$] и фононы существенно неравновесны.

Второе упрощение состоит в том, что в уравнении для электронной температуры (1) всегда можно заменить слагаемое $(t_e - t_p)$, описывающее уход тепла из электронной подсистемы в решетку, его средним значением $(\bar{t}_e - t_p)$. Действительно, если $k_e^{-2} |t_e''| \ll |t_e - t_p|$, то электронная температура $t_e \approx 1 + t_p$ практически постоянна, так что $t_e \approx \bar{t}_e$. Если же выполняется противоположное неравенство, то слагаемое $(t_e - t_p)$ пренебрежимо мало, и, усредняя его, мы не нарушаем структуры решения $t_e(z)$.

Как уже отмечалось, при $a \ll L_e = (k_e^2 l_e)^{-1}$ распределение электронной температуры однородно. Полагая в (5), (6) $t_e(z) \approx t_e(a) \approx \bar{t}_e = \text{const}$ и исключая t_p , находим

$$t_e = [(a/l_e)^{-1} + (1 + a/l_p)^{-1}]^{-1}. \quad (14)$$

Формулы (13), (14) полностью описывают однородные распределения температур в тонких образцах. Однако анализ физически различных случаев нагляднее производить непосредственно с помощью уравнений баланса (5), (6).

Если $a \ll l_e$, то, как видно из (14), разогрев является слабым ($\bar{t}_e \ll 1$) и левая часть уравнения (5) определяется первым слагаемым. Это значит, что вынос тепла в термостат в слабо разогретых образцах происходит через электронную подсистему с температурой

$$t_e \approx a/l_e \ll 1, \quad (15)$$

не зависящей от параметров фононной подсистемы (хотя фононы при этом могут быть и неравновесными).

Рассмотрим теперь случаи промежуточного и сильного разогревов, которые реализуются при $a \gg l_e$ [см. (14)]. Если фононы при этом равновесны ($a \ll l_p$), то главным слагаемым в левой части (5) является t_e , так что

$$t_e \approx 1, \quad (16)$$

разогрев является промежуточным, а вынос тепла осуществляется равновесными фононами. Если же фононы неравновесны ($a \gg l_p$), то разогрев становится сильным ($t_e \approx t_p \gg 1$), а температуры подсистем близки друг к другу:

$$t_e \approx t_p \approx a/(l_e + l_p) \gg 1. \quad (17)$$

Разность этих температур, найденная из (13), (14), равна $t_e - t_p = (1 + l_e/l_p)^{-1}$, и поэтому при $l_e \ll l_p$ вынос тепла осуществляется фононами, а при $l_p \ll l_e$ — электронами.

В случае $L_e \ll k_e^{-1}$ существует область толщин $L_e \ll a \ll k_e^{-1}$, соответствующая неоднородному разогреву электронов. Поскольку при этом всегда выполняется неравенство $a \ll l_e$, можно думать [см. (15)], что главным в левой части уравнения баланса (5) является первое слагаемое, и пренебречь уходом тепла в фононную подсистему $(\bar{t}_e - t_p)$ как в уравнении баланса (5), так и в уравнении

(1) для электронной температуры. При этом фононная температура выпадает из уравнения для электронной температуры (1) и получающееся решение имеет вид

$$t_e = \frac{(ak_e)^2}{2} \left[1 - \left(\frac{z}{a} \right)^2 \right]. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (4), (5), легко убедиться в правильности сделанного выше допущения о малости $(\bar{t}_e - t_p)$.

Найдем теперь выражения для характерных длин l_w , l^* , l_s , l_0 в тонких образцах. Как следует из (13), фононы в тонких образцах перестают быть равновесными при $a \sim l_p$, поэтому

$$l_0 = l_p. \quad (19)$$

Толщины образцов, при которых разогрев является слабым, не превосходят l_e , поэтому для тонких образцов

$$l_w = l_e. \quad (20)$$

Сильный разогрев [см. (17)] имеет место лишь при условии $l_{e,p} \ll k_e^{-1}$ и начинается с наибольшей из длин l_e , l_p , так что

$$l_s = l_e + l_p. \quad (21)$$

Как следует из проведенных исследований, фононный механизм выноса тепла в тонких образцах доминирует при условии $l_e \ll l_p$ в интервале толщин $l_e \ll a$. При этом в области $l_e \ll a \ll \min(k_e^{-1}, l_p)$ реализуется промежуточный разогрев (16), а в области $l_p \ll a \ll k_e^{-1}$ (если таковая существует) — сильный разогрев (17). Это значит, что при условии $l_e \ll l_p$, k_e^{-1} длина l^* попадает в область тонких образцов и равна

$$l^* = l_e. \quad (22)$$

Таким образом, плоскость параметров (l_e, l_p) (см. рисунок) разбивается на пять областей, причем в области 1 слабый разогрев электронов при равновесных фононах (вынос тепла из образца осуществляется электронами) для $a \ll l_w = l^*$ сменяется промежуточным разогревом электронов и фононным механизмом выноса тепла при $l^* = l_w \ll a \ll l_s = l_0$ (фононы по-прежнему равновесны). Наконец, когда $a \geq l_s = l_0$ ($a \ll k_e^{-1}$), электроны и фононы разогреты сильно, а механизм выноса тепла фононный. В области 2 при $a \ll l_0$ разогрев электронов слабый, фононы равновесны, механизм выноса тепла электронный. В интервале $l_0 \ll a \ll l_w = l_s = l^*$ фононы становятся неравновесными,¹ а степень разогрева электронов и механизм выноса не изменяются. Для $l_w = l_s = l^* \ll a \ll k_e^{-1}$ электроны и фононы разогреваются сильно и электронный вынос сменяется фононным. В области 3 для всех толщин $a \ll k_e^{-1}$ разогрев электронов слабый и вынос тепла осуществляется электронами. При этом фононы остаются равновесными лишь в интервале $a \ll l_0$ ($l_0 \ll k_e^{-1}$). В области 4 во всем интервале изменения $a \ll k_e^{-1}$ разогрев электронов слабый, фононы равновесны и вынос тепла осуществляется электронами. В области 5 в тонких образцах фононы всегда равновесны, но в интервале $a \ll l_w = l^*$ тепло выносится слабо разогретыми электронами, а в $l^* = l_w \ll a \ll k_e^{-1}$ вынос тепла фононный и $\bar{t}_e \approx 1$.

Аналогичный подход может быть использован при изучении разогрева электронов и фононов и в толстых образцах ($a \gg k_e^{-1}$).

Л и т е р а т у р а

- [1] Басс Ф. Г., Бочков В. С., Гуревич Ю. Г. Электроны и фононы в ограниченных полупроводниках. М., 1984. 288 с.
 [2] Рашба Э. И., Грибников З. С., Кравченко В. Я. Анизотропные размерные эффекты в полупроводниках и полуметаллах. — УФН, 1976, т. 119, в. 1, с. 3—47.

¹ Напомним, что при электронном механизме выноса тепла даже неравновесные фононы не оказывают влияния на формирование электронной температуры.

- [3] Климовская А. И., Снитко А. В., Мельников В. И. — В кн.: Тр. IX Межд. конф. по физике полупроводников. Л., 1964, ч. I, с. 848.
- [4] Сардарян В. С., Вильмс П. П. и др. Классический размерный эффект магнитосопротивления в тонких пленках p -Ge. — ФТП, 1969, т. 3, с. 1255—1257.
- [5] Гуревич Ю. Г., Конин А. М. Нелинейные гальваномагнитные эффекты при разогреве и увлечении фононов. — Лит. физ. сб., 1980, т. 20, № 3, с. 57—64.
- [6] Гуревич Ю. Г., Конин А. М. Эффекты невязимности, неомичности и размерного магнитосопротивления при разогреве и увлечении фононов. — Лит. физ. сб., 1980, т. 20, № 3, с. 65—72.
- [7] Бочков В. С., Гредескул Т. С., Гуревич Ю. Г. Равновесные фононы в теории горячих электронов. — ФТП, 1985, т. 19, в. 2, с. 302—305.
- [8] Могилевский Б. М., Чудновский А. Ф. Теплопроводность полупроводников. М., 1972. 320 с.
- [9] Бочков В. С., Гуревич Ю. Г. Теплопроводность в ограниченных полупроводниках. — ФТП, 1983, т. 17, в. 4, с. 728—730.

Институт радиофизики
и электроники АН УССР
Харьков

Получена 25.12.1987
Принята к печати 20.07.1987

Мейлихов Е. З., Лазарев С. Д. Электрофизические свойства полупроводников (справочник физических величин). М.: ЦНИИатоминформ, 1987. 87 с.

Книга представляет собой справочник, содержащий важнейшие физические параметры полупроводников (параметры кристаллической структуры, плотность, температуру плавления и температуру Дебая, массу и подвижности носителей, диэлектрическую проницаемость и т. д.). Приведены температурные зависимости подвижностей, концентрации носителей, проводимости и коэффициента Холла, а для некоторых материалов — еще и температурная зависимость ширины запрещенной зоны. При этом последовательно рассмотрены элементарные полупроводники (причем специальные разделы посвящены Si и Ge), полупроводниковые соединения $A^I B^I$ — $A^I B^{VII}$, $A^{II} B^{IV}$ — $A^{II} B^{VII}$, $A^{III} B^{IV}$ — $A^{III} B^I$, $A^{IV} B^{IV}$ — $A^{IV} B^I$, $A^{V} B^I$ — $A^{V} B^{VII}$, $A^{VI} B^{IV}$ — $A^{VI} B^I$, $A^{VII} B^{III}$ — $A^{VII} B^I$ и $A^{VIII} B^V$ — $A^{VIII} B^I$.