

## МЕЗОСКОПИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОПЕРЕЧНОЙ ПРЫЖКОВОЙ ПРОВОДИМОСТИ АМОРФНОЙ ПЛЕНКИ

Райх М. Э., Рузин И. М.

Рассматривается поперечная проводимость аморфной пленки достаточно малой толщины, так что прохождение тока определяется туннельными прыжками электронов по изолированным цепочкам примесей, соединяющим металлические контакты. Показано, что, если площадь пленки достаточно мала, зависимость проводимости от положения уровня Ферми и температуры испытывает случайные колебания. Найдены характерный период таких колебаний, а также их амплитуда. Рассчитан коррелятор логарифмов проводимости пленки при различных положениях уровня Ферми, являющийся количественной характеристикой колебаний.

1. *Введение.* Аморфные полупроводники обычно изготавливаются и исследуются в виде тонких пленок. При достаточно низких температурах  $T$  их проводимость определяется прыжками электронов по локализованным состояниям, энергетические уровни которых расположены вблизи уровня Ферми. Температурная зависимость проводимости при этом описывается законом Мотта [1]

$$\ln(\sigma/\sigma_0) = -(T_0/T)^{1/4}, \quad T_0 = \beta/ga^3, \quad (1)$$

где  $\sigma_0$  — предэкспоненциальный множитель,  $g$  — плотность локализованных состояний на уровне Ферми,  $a$  — радиус затухания волновой функции,  $\beta \approx \approx 20$  — численный коэффициент [2]. Для поперечной проводимости пленки выражение (1) применимо лишь в случае, когда ее толщина  $L$  достаточно велика. В этом случае расчет проводимости сводится к задаче теории протекания, а величина  $\sigma$  определяется проводимостью бесконечного кластера эквивалентных сопротивлений, величина которых не превышает некоторого критического значения [2].

В работе [3] впервые была высказана идея о том, что при достаточно малых толщинах  $L$  бесконечный кластер шунтируется изолированными цепочками сопротивлений, соединяющими металлические контакты и образованными локализованными состояниями, которые расположены на аномально близких расстояниях друг от друга. Несмотря на то что вероятность образования таких цепочек экспоненциально мала, их проводимость экспоненциально больше проводимости объемного бесконечного кластера, так что именно они определяют проводимость пленки. Последовательный расчет проводимости тонкой аморфной пленки, обусловленной цепочками, был осуществлен в работе [4], в которой было получено выражение

$$\ln(\tau/\tau_0) = -2(2L\mathcal{L}/a)^{1/2}, \quad (2)$$

где величина  $\mathcal{L}$  удовлетворяет трансцендентному уравнению<sup>1</sup>

$$\mathcal{L} = \ln(0.270\mathcal{L}/gTaL^2). \quad (3)$$

Критерий применимости выражения (2) получается из сравнения (2) с (1) и имеет вид  $L \ll (gTa)^{-1/2}$ , что эквивалентно условию  $\mathcal{L} \gg 1$ . При выводе выражения (2)

<sup>1</sup> Буквой  $\mathcal{L}$  здесь обозначена другая величина, нежели в [4] [формула (38)].

производилась оптимизация по всевозможным расположениям и энергиям узлов, образующих цепочку. При этом оказалось, что оптимальные цепочки, дающие основной вклад в проводимость пленки, являются сильно вытянутыми и почти эквидистантными.

Поскольку оптимальные цепочки экспоненциально редки, выражение (2) определяет проводимость аморфной пленки лишь в случае, если ее площадь  $S$  достаточно велика, так что в пределах площади найдется много оптимальных цепочек. Если это условие нарушается, проводимость пленки будет определяться несколькими наиболее проводящими цепочками, имеющимися в образце. Таким образом, удельная проводимость пленки оказывается сильно зависящей от ее площади. Соответствующее выражение было получено в [5] и имеет вид

$$\ln\left(\frac{\sigma_S}{\sigma_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\nu + \frac{1}{\nu}\right) \ln\left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_0}\right), \quad (4)$$

где  $\sigma_\infty$  определяется формулой (2), а параметр  $\nu$  определяется следующим образом:

$$\nu = \frac{2 \ln(S/La)}{|\ln(\sigma_\infty/\sigma_0)|}. \quad (5)$$

Выражение (4) справедливо при  $\nu < 1$ . Условием  $\nu = 1$  определяется характерное значение площади, начиная с которого в образце найдутся оптимальные цепочки; при  $\nu = 1$  выражение (4) переходит в (2).

В работе [5] было также указано, что при  $\nu < 1$  число цепочек, определяющих проводимость пленки, флуктуирует от образца к образцу, что приводит к сильному разбросу проводимости по образцам; при этом проводимости набора различных образцов одинаковой площади характеризуются некоторой функцией распределения. Выражение (4) описывает положение максимума этой функции. Конкретный ее вид может быть получен с помощью подхода, разработанного в [6].

Важно отметить, что флуктуации удельной проводимости можно наблюдать, имея в распоряжении всего лишь один образец, если с помощью какого-либо внешнего воздействия изменять проводимость отдельных цепочек. При изменении внешнего воздействия будет происходить перераспределение вкладов отдельных цепочек в проводимость пленки. Поскольку эти вклады случайны и независимы, проводимость пленки будет испытывать случайные колебания вокруг среднего значения с амплитудой порядка ширины функции распределения. Иными словами, внешнее воздействие приводит к эффективной смене реализаций цепочек в пределах одного образца. Такое поведение поперечной проводимости аморфной пленки естественно назвать мезоскопическим по аналогии с рассмотренным в ряде работ (см., например, [7, 8]) эффектом случайных колебаний проводимости «грязных» металлических образцов при изменении внешнего магнитного поля. Физический механизм этих колебаний связан с интерференционными эффектами, возникающими при многократном упругом рассеянии электрона. В описанном выше случае аморфной пленки интерференция роли не играет, поэтому соответствующий мезоскопический эффект мы будем называть некогерентным. Его исследованию и посвящена настоящая работа. В качестве изменяемых внешних параметров для рассматриваемой системы естественно выбрать температуру  $T$  и положение уровня Ферми  $\mu$ . (В последнем случае необходимо введение дополнительного электрода, играющего роль затвора, напряжением на котором регулирует положение уровня Ферми, как это делалось в [9, 10]). В разделе 2 получено выражение для функции распределения проводимости по образцам, ширина которой определяет характерную амплитуду колебаний. В разделе 3 подробно рассмотрена качественная картина колебаний и установлен их характерный период. Количественной характеристикой колебаний, допускающей сравнение теории с экспериментом, является коррелятор логарифмов проводимости при различных значениях внешнего воздействия. Его расчету посвящен раздел 4.

2. *Функция распределения проводимости по образцам.* Рассмотрим цепочку локализованных состояний, соединяющую металлические контакты. Следуя

обычной процедуре теории прыжковой проводимости, заменим эту цепочку на последовательное соединение сопротивлений. Величина сопротивления, включенного между узлами  $i-1, i$ , определяется выражением [2]

$$R_i = \frac{1}{\sigma_0} \exp \left[ \frac{2}{a} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}| + \frac{1}{T} E_\mu(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) \right], \quad (6)$$

$$E_\mu(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) = 1/2 (|\varepsilon_i - \mu| + |\varepsilon_{i-1} - \mu| + |\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}|), \quad (7)$$

где  $\mathbf{r}_i, \varepsilon_i$  — положение и энергия  $i$ -го узла,  $\mu$  — положение уровня Ферми. Поскольку цепочки являются сильно вытянутыми и почти эквидистантными, разность  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}|$  близка к  $L/N$ , где  $N$  — число узлов цепочки ( $N \gg 1$ ), так что ее можно разложить вблизи этого значения по малым отклонениям  $z_i, \rho_i$  координат узлов от идеальных (рис. 1). При этом (6) принимает вид

$$R_i = \frac{1}{\sigma_0} \exp \left[ \frac{2L}{Na} + \frac{2(z_i - z_{i-1})}{a} + \frac{N(\rho_i - \rho_{i-1})^2}{La} + \frac{1}{T} E_\mu(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) \right]. \quad (8)$$

Сопротивление всей цепочки есть сумма сопротивлений отдельных звеньев:  $R = \sum_i R_i$ , а проводимость пленки равна сумме обратных сопротивлений всех

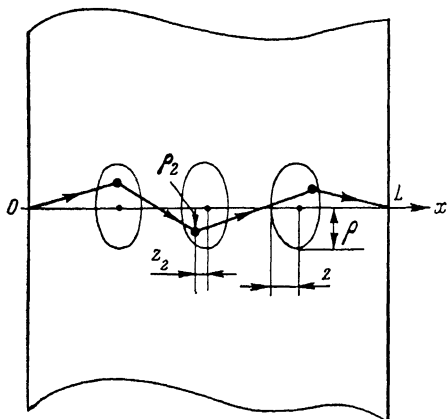


Рис. 1. Цепочка из трех узлов ( $N=4$ ).

Тонкой прямой показана соответствующая идеальная цепочка.

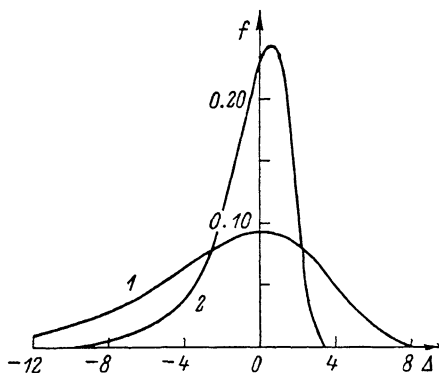


Рис. 2. Функция распределения удельной проводимости для двух значений параметра  $\nu$ .

$\nu$ : 1 — 0.5, 2 — 0.707.

цепочек, поскольку расстояния между типичными цепочками экспоненциально велики. Последнее связано с тем, что длины звеньев цепочек, определяющих проводимость пленки, много меньше типичной длины прыжка в объемном материале:  $L/N \ll a(T_0/T)^{1/4}$ . Чем меньше сопротивления цепочек, тем короче должны быть их звенья и тем реже такие цепочки встречаются. Выясним, какова концентрация  $G(u)$  цепочек в пленке бесконечной площади с логарифмом сопротивления  $\ln(\sigma_0 R)$ , лежащим в интервале от некоторого значения  $u$  ( $u \gg 1$ ) до  $u + du$ . Предположим, что характерные значения  $z_i, \rho_i$  и  $\varepsilon_i$  в  $N$ -звенной цепочке одного порядка для всех узлов и равны  $z, \rho$  и  $\varepsilon$  соответственно. Тогда для логарифма сопротивления цепочки имеем

$$u = \frac{2L}{Na} + \frac{z}{a} + \frac{\rho^2 N}{La} + \frac{\varepsilon}{T}, \quad (9)$$

а концентрация таких цепочек пропорциональна  $w_N = (g_{sp}^2 z)^N$ . Искомая величина  $G(u)$  определяется максимумом  $w_N$  при дополнительном условии (9). Полагая  $N$  фиксированным и оптимизируя  $w_N$  по  $z, \rho$  и  $\varepsilon$ , получаем

$$z = \xi a/3, \quad \rho^2 = \xi La/3N, \quad \varepsilon = \xi T/3, \quad (10)$$

где  $\xi = u - 2L/Na$ . Подставляя полученные значения в  $w_N$ , находим, что  $w_N$  максимально при  $N = 2L/au$ , а точнее при  $\xi = 3u/\lambda$ , где  $\lambda \gg 1$  слабо зависит от  $u$  и удовлетворяет уравнению

$$\lambda = \ln(\alpha \lambda^3 / g T a^3 u^4) \quad (11)$$

(здесь  $\alpha$  — численный коэффициент). В результате для концентрации  $G(u)$  получается следующее выражение:

$$\ln G(u) = -2L\lambda/au. \quad (12)$$

Отметим, что точность проведенного рассмотрения не позволяет определить коэффициент  $\alpha$  в формуле (11). Точный расчет (см. Приложение) дает  $\alpha = \gamma^2/\pi$ , где  $\gamma$  — наименьший корень уравнения  $J_1'(\gamma) = 0$ ,  $J_1(x)$  — функция Бесселя. Проводимость пленки бесконечной площади определяется максимумом произведения  $G(u) \exp(-u)$ , который достигается при  $u = (2L\lambda/a)^{1/2}$ . При этом  $\xi = 3N = 3(2L/a\lambda)^{1/2}$ , а для проводимости получается формула (2).

Как уже указывалось во Введении, проводимость пленки конечных размеров флуктуирует от образца к образцу, так что набор образцов характеризуется функцией распределения проводимости. Как показано в [6], единственной характеристикой неупорядоченной системы, определяющей вид этой функции, является зависимость  $G(u)$ . Конкретный расчет функции распределения, проведенный в [6], относился к другой неупорядоченной системе ( $p$ - $n$ -переходу), однако вид функции  $G(u)$  совпадал с (12). Поэтому для искомой функции распределения можно воспользоваться полученным в [6] выражением

$$f(\ln \sigma) = \frac{e^\Delta}{\pi} \int_0^\infty dx e^{-x^{\nu^2} \cos \frac{\pi \nu^2}{2}} \cos\left(xe^\Delta - x^{\nu^2} \sin \frac{\pi \nu^2}{2}\right), \quad (13)$$

где  $\Delta = \ln(\sigma/\sigma_s)$ . Величина  $\sigma_s$ , определяющая положение максимума функции  $f$ , дается формулой (4), а параметр  $\nu$  — формулой (5). Графики функции  $f$  для двух значений  $\nu$  приведены на рис. 2. При  $\nu \ll 1$  (случай малых площадей) выражение (13) упрощается:

$$f(\ln \sigma) = \nu^2 \exp(-\nu^2 \Delta - e^{-\nu^2 \Delta}). \quad (14)$$

Видно, что ширина функции распределения в этом случае порядка  $1/\nu^2 \gg 1$ .

3. Качественная картина колебаний. Для качественного анализа зависимости проводимости аморфной пленки конечной площади от положения уровня Ферми и температуры оказывается достаточной следующая упрощенная модель. Заменяем выражение (8) для сопротивления звена на

$$R_i = \frac{1}{\sigma_0} \exp\left(\frac{2L}{Na} + \frac{\rho_i^2 N}{La} + \frac{|\epsilon_i - \mu|}{T}\right). \quad (15)$$

При этом каждая  $N$ -звенная цепочка может быть изображена в виде системы из  $N$  точек на плоскости  $(\rho^2, \epsilon)$  (рис. 3, а). Для того чтобы графически определить логарифм сопротивления цепочки, нужно через каждую из этих точек провести прямую с наклоном  $d\epsilon/d\rho^2 = -(NT/La)\text{sign}(\epsilon - \mu)$ , а затем из этих прямых выбрать наиболее удаленную от точки  $(0, \mu)$ . Точка с координатами  $\rho_{i,m}^2, \epsilon_{i,m}$ , через которую проведена эта прямая, соответствует звену с наибольшим сопротивлением при данных положении уровня Ферми и температуре  $T$ . Выясним, как устроены типичные цепочки, определяющие проводимость образца. Нетрудно убедиться в том, что изображающие их точки равномерно заполняют треугольник, симметричный относительно прямой  $\epsilon = \mu$  (рис. 3, а) с наклоном сторон  $d\epsilon/d\rho^2 = \pm TN/La$  (будем в дальнейшем называть такие цепочки треугольными). Рассмотрим класс цепочек, отличных от треугольных. Предположим, что точки, соответствующие звеньям этих цепочек, заполняют некоторую фигуру площади  $A$  (рис. 3, а, заштрихованная область), и сравним этот класс с соответствующим классом треугольных цепочек со сторонами треугольника, ограничивающими рассматриваемую фигуру. Ясно, что сопротивления цепочек обоих классов равны, однако треугольные цепочки встречаются гораздо чаще. Действительно,

вероятности образования цепочек из этих двух классов относятся друг к другу как  $(A/A_\Delta)^N$ , где  $A_\Delta$  — площадь треугольника, поэтому при  $A_\Delta - A \gg A_\Delta/N$  концентрация нетреугольных цепочек оказывается экспоненциально меньше. Таким образом, при изучении проводимости пленки можно ограничиться рассмотрением лишь треугольных цепочек.

Изучим зависимость проводимости какой-либо треугольной цепочки с точками внутри треугольника, симметричного относительно прямой  $\varepsilon = \mu_0$ , от положения уровня Ферми  $\mu$ . Для этого в соответствии с вышеописанной процедурой будем при каждом значении  $\mu$  выбирать из прямых, проведенных через все узлы цепочки, прямую, наиболее удаленную от точки  $(0, \mu)$ . Ясно, что при  $\mu_0 - \mu \gg \mathcal{E}/N$ , где  $2\mathcal{E}$  — размер основания треугольника, искомая прямая проходит через точку, лежащую вблизи верхней стороны треугольника, а при  $\mu - \mu_0 \gg \mathcal{E}/N$  — через точку, лежащую вблизи нижней стороны. Таким образом, в пределах узкого интервала  $|\mu - \mu_0| \sim \mathcal{E}/N$  происходит «внутреннее переключение» каждой такой цепочки. Масштаб же  $\delta\mu$ , на котором сопротивле-

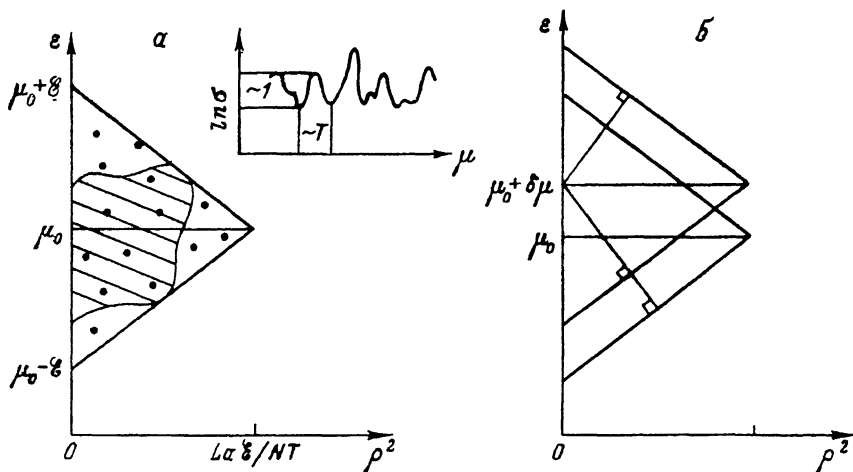


Рис. 3. Изображение случайной  $N$ -звенной цепочки на плоскости  $(\rho^2, \varepsilon)$ .

Точки соответствуют параметрам звеньев  $\rho_i^2, \varepsilon_i$  (упрощенная модель). На вставке схематически показаны случайные колебания проводимости образца  $\sigma$  при изменении положения уровня Ферми  $\mu$ .

ния конкурирующих звеньев сравнимы между собой, естественно, порядка  $T$ . Цепочки, определяющие проводимость всей пленки при  $\mu = \mu_0$ , содержатся среди рассмотренных выше. Для них  $\mathcal{E} \sim NT$  при  $\nu \sim 1$ .

Наиболее важным обстоятельством, приводящим к мезоскопическим колебаниям зависимости  $\ln \sigma(\mu)$ , является то, что положение оси симметрии треугольника, ограничивающего класс цепочек, ответственных за проводимость всей пленки, определяется положением уровня Ферми  $\mu$ . Это приводит к тому, что в пределах интервала изменения  $\mu$ :  $\delta\mu \sim \mathcal{E}/N$  происходит межцепочечное переключение, т. е. смена цепочек, определяющих проводимость пленки. Действительно, рассмотрим две цепочки, ограниченные треугольниками, сдвинутыми друг относительно друга по оси ординат на  $\delta\mu \gg \mathcal{E}/N$  (рис. 3, б). При  $\mu = \mu_0 + \delta\mu$  наибольшее сопротивление нижней цепочки заведомо больше наибольшего сопротивления верхней, так что если нижняя цепочка определяла проводимость пленки при  $\mu = \mu_0$ , то при  $\mu = \mu_0 + \delta\mu$  ее вклад в проводимость пленки экспоненциально мал.

Итак, картина колебаний выглядит следующим образом. Пусть площадь пленки  $S$  такова, что параметр  $\nu \leq 1$ . Тогда при каждом положении уровня Ферми  $\mu$  проводимость пленки определяется несколькими (скажем, двумя) цепочками. По мере изменения  $\mu$  попеременно происходят внутри- и межцепочечные переключения; соответственно зависимость  $\ln \sigma(\mu)$  проходит через максимумы и минимумы. Характерный период колебаний при этом порядка  $\mathcal{E}/N$ , т. е. порядка  $T$  при  $\nu \sim 1$ . В среднем же  $\ln \sigma$  от  $\mu$  не зависит. Характерная ам-

плитуда колебаний зависимости  $\ln \sigma(\mu)$ , очевидно, порядка  $\mathcal{E}/NT \sim 1$ , что соответствует ширине функции распределения.

При  $\nu \ll 1$  проведенные рассуждения остаются в силе. Следует лишь учесть, что для цепочек, определяющих проводимость, размер основания треугольника  $\mathcal{E}$ , и число узлов  $N_\nu$  в этом случае оказываются зависящими от  $\nu$  (т. е. от площади пленки). Как показано в [5],  $\mathcal{E}_\nu = \mathcal{E}/\nu$ ,  $N_\nu = N\nu$ , где  $\mathcal{E}$  и  $N$  — соответствующие значения при  $\nu \gg 1$ . При этом для периода колебаний получаем  $\delta\mu \sim \mathcal{E}_\nu/N_\nu \sim \mathcal{E}/N\nu^2 \sim T/\nu^2$ . Соответственно амплитуда колебаний оказывается порядка  $\delta\mu/T \sim 1/\nu^2$ .

Аналогичные рассуждения позволяют проанализировать колебания зависимости  $\ln \sigma(T)$ . В этом случае для переключений существенным оказывается не сдвиг треугольника, ограничивающего цепочку, а изменение наклона его сторон. Период колебаний по температуре  $\delta T$  при  $\nu \sim 1$  можно оценить из соотношения  $\delta(\mathcal{E}/T) = (\mathcal{E}/T^2)\delta T \sim 1$ , откуда  $\delta T \sim T^2/\mathcal{E} \sim T/N \sim T(a\lambda/L)^{1/2}$ .

До сих пор мы считали число звеньев цепочки  $N$  фиксированным. Как видно из проведенного рассмотрения, последовательные межцепочечные переключения происходят между цепочками с примерно равным числом звеньев. Это число наряду с набором  $\{\rho_i^2, \epsilon_i\}$  является дискретной характеристикой цепочек (дополнительной степенью свободы). Колебания зависимости  $\ln \sigma(T)$ , связанные со сменой классов цепочек, характеризующихся различными значениями  $N$ , изучались в работе [5], где было показано, что характерный период таких колебаний составляет  $T/\sqrt{N}$ , т. е. в  $\sqrt{N}$  раз больше периода колебаний, не связанных с изменением числа звеньев цепочек. Поскольку при  $\nu \ll 1$  амплитуда обоих типов колебаний порядка единицы, колебания с большим периодом будут «замаскированы» более частыми колебаниями. Они будут проявляться лишь в далекой асимптотике коррелятора логарифмов проводимости пленки при различных температурах. В настоящей работе, однако, мы ограничимся вычислением коррелятора логарифмов проводимости при различных положениях уровня Ферми.

4. *Коррелятор логарифмов проводимости.* Общее выражение для коррелятора логарифмов проводимости

$$K(\mu_1, \mu_2) = \overline{\ln \sigma(\mu_1) \ln \sigma(\mu_2)} - (\overline{\ln \sigma})^2 \quad (16)$$

было получено в работе [6] и имеет вид

$$K(\mu_1, \mu_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dx dy}{xy} [\chi_{\mu_1, \mu_2}(x, y) - \chi_{\mu_1, \mu_2}(x, 0) \chi_{\mu_1, \mu_2}(0, y)], \quad (17)$$

где

$$\chi_{\mu_1, \mu_2}(x, y) = \exp \left\{ S \int_0^\infty du_1 \int_0^\infty du_2 G_{\mu_1, \mu_2}(u_1, u_2) \left[ e^{-\frac{x}{S} e^{-u_1} - \frac{y}{S} e^{-u_2}} - 1 \right] \right\}, \quad (18)$$

а функция  $G_{\mu_1, \mu_2}(u_1, u_2)$  определяется следующим образом:

$$G_{\mu_1, \mu_2}(u_1, u_2) = \langle \delta(u_1 - \ln R(\mathbf{r}_i, \epsilon_i - \mu_1)) \delta(u_2 - \ln R(\mathbf{r}_i, \epsilon_i - \mu_2)) \rangle \quad (19)$$

и представляет собой «парную плотность» цепочек с логарифмом сопротивления  $R$ , равным  $u_1$  при  $\mu = \mu_1$  и  $u_2$  при  $\mu = \mu_2$  в пленке бесконечной площади. Усреднение в формуле (16) производится по всевозможным образцам площади  $S$  (выраженной в единицах  $La$ ), а в формуле (19) — по координатам  $\mathbf{r}_i$  и энергиям  $\epsilon_i$  узлов цепочки. Функция  $G_{\mu_1, \mu_2}(u_1, u_2)$  рассчитана в *Приложении* и имеет вид

$$G_{\mu_1, \mu_2}(u_1, u_2) = CG(\bar{u}) \exp \left[ -|\delta u| \frac{\lambda L}{(\gamma^2 - 1) a \bar{u}^2} \right] \theta(|\delta \mu| - T|\delta u|), \quad (20)$$

где  $\bar{u} = (u_1 + u_2)/2$ ,  $\delta u = u_2 - u_1$ ,  $\delta \mu = \mu_2 - \mu_1$ ,  $\gamma = 1.841$ . Функция  $G(\bar{u})$  определяется формулой (12), параметр  $\lambda$  — формулой (11), а нормировочный множитель  $C$  равен

$$C = \frac{\lambda L}{2(\gamma^2 - 1) a \bar{u}^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\lambda L |\delta \mu|}{(\gamma^2 - 1) a \bar{u}^2 T}\right) \right]^{-1}. \quad (21)$$

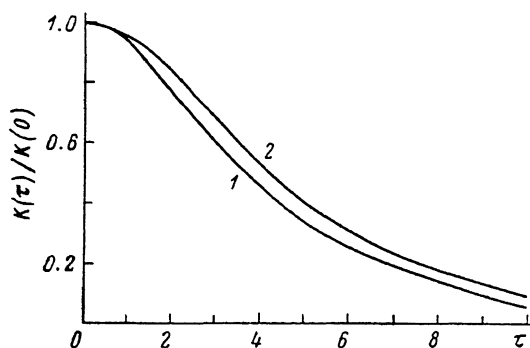
Подставляя (20) в (18), приведем функцию  $\chi$  к виду

$$\chi_{\mu_1, \mu_2} = \exp \left[ -\frac{CT(1 - \nu^2)}{\nu^2} \int_{-\frac{|\delta \mu|}{T}}^{\frac{|\delta \mu|}{T}} d(\delta u) e^{-\frac{|\delta u| \nu^2}{2(\gamma^2 - 1)} \left( x' e^{-\frac{\delta u}{2}} + y' e^{\frac{\delta u}{2}} \right)^2} \right], \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} x' &= x \exp \left[ -\left(\frac{2L\mathcal{L}}{a}\right)^{1/2} \left(\nu + \frac{1}{\nu}\right) \right], \\ y' &= y \exp \left[ -\left(\frac{2L\mathcal{L}}{a}\right)^{1/2} \left(\nu + \frac{1}{\nu}\right) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

При получении (22) функция  $G(\bar{u})$  была разложена вблизи  $\bar{u} = (2L\lambda/a)^{1/2}/\nu \equiv u_j$ , которое находится из условия  $SG(u_j) \sim 1$ , после чего интеграл по  $\bar{u}$



свелся к  $\Gamma$ -функции. Выражение (17) для коррелятора представляет собой двойной интеграл. Один из интегралов (например, по  $x$ ) может быть вычислен в явном виде, подобно тому как это делалось в [6]. Для этого после подстановки (22)

Рис. 4. Нормированный коррелятор проводимости аморфной пленки при изменении положения уровня Ферми. Значения параметра  $\nu^2$ : 1 — 0.15, 2 — 0.85.

в (17) следует сделать замену  $y' = x'v$ , а также заменить в знаменателе (17) произведение  $xy$  на  $(xy)^{1-\delta}$  (что позволяет устранить расходимость в нуле для каждого из слагаемых), а затем в конечном ответе перейти к пределу  $\delta \rightarrow 0$ . Удобно также перейти в (22) к интегрированию по  $dt = \nu^2 d(\delta u)/2$ . В результате получим

$$K(\tau) = \frac{\pi^2}{6} \left( \frac{1}{\nu^4} - 1 \right) - \frac{\tau}{\nu^2} \int_0^{\infty} \frac{dv}{v} \ln \left[ \frac{\sigma_{\tau}^{\nu}(v)}{\sigma_{\tau}^{\nu}(0) (1 + v)^{\nu^2}} \right], \quad (24)$$

где

$$\sigma_{\tau}^{\nu}(v) = \int_{-|\tau|/2}^{|\tau|/2} dt e^{-\frac{|t|}{\gamma^2 - 1} \left( e^{-\frac{t}{\nu^2}} + v e^{\frac{t}{\nu^2}} \right)^2}, \quad (25)$$

а аргумент коррелятора  $\tau$  связан с  $\delta \mu$  соотношением

$$\tau = \nu^2 |\delta \mu| / T. \quad (26)$$

Из формул (24)–(26) видно, что при  $\nu \ll 1$  единственным характерным масштабом изменения коррелятора является  $\tau \sim 1$ , что соответствует  $\delta \mu \sim T$ . Эта величина совпадает с характерным периодом колебаний, найденным при качественном рассмотрении. Анализ выражения (24) показывает, что  $\tau \sim 1$  является характерным масштабом коррелятора и при  $\nu \ll 1$ , так что период колебаний зависимости  $\ln \sigma(\mu)$  для пленки малой площади порядка  $T/\nu^2$ . При  $|\tau| \gg 1$  коррелятор спадает как  $\exp[-(\gamma^2 - 2)|\tau|/2(\gamma^2 - 1)]$ . График функции  $K(\tau)$  для двух значений  $\nu$  приведен на рис. 4.

Мы благодарны Б. И. Шкловскому за ряд полезных советов.

Пользуясь определением (19), представим выражение для парной плотности цепочек в виде

$$G_{\mu_1, \mu_2}(u_1, u_2) = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} \sum_N \tilde{G}_{\mu_1, \mu_2}^{(N)}(u_1, u_2), \quad (\text{П. 1})$$

$$\tilde{G}_{\mu_1, \mu_2}^{(N)} = \frac{\varepsilon^{N-1}}{S} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_1 \dots d\varepsilon_{N-1} \int d^2\rho_1 \dots d^2\rho_{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \dots dz_{N-1} \theta(e^{u_1} - R\{z_i, \rho_i, \varepsilon_i - \mu_1\}) \times \\ \times \theta(e^{u_2} - R\{z_i, \rho_i, \varepsilon_i - \mu_2\}), \quad (\text{П. 2})$$

где сопротивление цепочки  $R = \sum_{i=1}^N R_i$ ,  $\theta(x)$  —  $\theta$ -функция, а сопротивление звена  $R_i$

определяется формулой (8). По определению  $z_i, \rho_i$ , имеем  $z_0 = z_N = 0, \rho_0 = \rho_1, \rho_{N-1} = \rho_N$ . Без ограничения общности можно положить  $\mu_1 + \mu_2 = 0$ , так что  $\mu_2 = \delta\mu/2, \mu_1 = -\delta\mu/2$ , а  $\varepsilon_0 = \varepsilon_N = 0$ . Поскольку для расчета коррелятора оказываются важными малые значения  $|\delta\mu| \ll |\varepsilon_i|$ , фигурирующие в формуле (8) для  $R_i$ , величины  $E_{\mu}(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1})$  можно разложить по  $\delta\mu$ :

$$E_{\pm\delta\mu/2}(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1}) = E_{0i} \pm \frac{\delta\mu}{4} [\text{sign } \varepsilon_i + \text{sign } \varepsilon_{i-1}], \quad (\text{П. 3})$$

где величины  $E_{0i}$  определяются формулой (7) при  $\mu = 0$ . Удобно также в (П. 2) перейти к безразмерным переменным  $z'_i = 2z_i/a, \rho'_i = (\rho_i - \rho_{i-1})(N/La)^{1/2}, (i \geq 2), \varepsilon'_i = \varepsilon_i/T$ . Изменение вектора  $\rho_1$  соответствует сдвигу цепочки как целого вдоль плоскости пленки, так что интегрирование по  $d^2\rho_1$  сокращает площадь  $S$  в знаменателе (П. 2). В результате выражение (П. 2) принимает вид

$$\tilde{G}_{\mu_1, \mu_2}^{(N)} = \frac{N}{La} \left( \frac{gTL a^2}{2N} \right)^{N-1} I_N, \quad (\text{П. 4})$$

$$I_N = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon'_1 \dots d\varepsilon'_{N-1} \int d^2\rho'_2 \dots d^2\rho'_{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dz'_1 \dots dz'_{N-1} \times \\ \times \theta \left\{ e^{\xi_1} - \sum_{i=1}^{N-1} \exp [z'_i - z'_{i-1} + \rho_i'^2 + E'_{0i} - \Delta_i] \right\} \times \\ \times \theta \left\{ e^{\xi_2} - \sum_{i=1}^{N-1} \exp [z'_i - z'_{i-1} + \rho_i'^2 + E'_{0i} + \Delta_i] \right\}, \quad (\text{П. 5})$$

где

$$\Delta_i = \frac{\delta\mu}{4T} (\text{sign } \varepsilon'_i + \text{sign } \varepsilon'_{i-1}), \quad (\text{П. 6})$$

а  $\xi_{1,2} = u_{1,2} - 2L/Na$ . Дальнейший расчет сводится к вычислению интеграла  $I_N$ . Прежде всего с помощью замены  $z'_i$  на  $v_i = -(z'_i - z'_{i-1} + \rho_i'^2 + E'_{0i}) + \xi$ , где  $\xi = (\xi_1 + \xi_2)/2 = \bar{u} - 2L/Na$ , а  $\bar{u} = (u_1 + u_2)/2$ , преобразуем его к виду

$$I_N = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon'_1 \dots d\varepsilon'_{N-1} \int d^2\rho'_2 \dots d^2\rho'_{N-1} \varphi \left[ (N-1)\xi - \sum_{i=1}^{N-1} (\rho_i'^2 + E'_{0i}) \right], \quad (\text{П. 7})$$

где введена вспомогательная функция

$$\varphi_N(x) = \left( \frac{x}{\sqrt{V}} \right)^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dv'_1 \dots dv'_{N-1} \theta \left[ N - \frac{N\delta u}{2x} - \sum_{i=1}^{N-1} v'_i + \frac{N}{x} \ln \left( 1 - \sum_{i=1}^{N-1} e^{-\frac{v'_i x}{N} - \Delta_i + \frac{\delta u}{2}} \right) \right] \times \\ \times \theta \left[ N + \frac{N\delta u}{2x} - \sum_{i=1}^{N-1} v'_i + \frac{N}{x} \ln \left( 1 - \sum_{i=1}^{N-1} e^{-\frac{v'_i x}{N} + \Delta_i - \frac{\delta u}{2}} \right) \right] \quad (\text{П. 8})$$



и обозначение  $\delta u = \xi_2 - \xi_1 = u_2 - u_1$ , а также сделана дополнительная замена  $v_i$  на  $v'_i x/N$ . Как будет видно из дальнейшего, характерные значения аргумента  $x$  функции  $\varphi_N$ , дающие основной вклад в интеграл  $I_N$ , много больше  $N$ . Характерные же значения  $v'_i$  в интеграле (II. 8) порядка единицы. Рассмотрим аргумент первой  $\theta$ -функции. Необходимое условие того, что логарифм положителен, имеет вид

$$v'_i > \alpha_i = \frac{N}{x} \left( \frac{\delta u}{2} - \Delta_i \right). \quad (\text{II. 9})$$

Поскольку  $x/N \gg 1$ , для типичных  $v'_i \sim 1$  имеем  $v'_i x/N \gg 1$ , так что логарифм экспоненциально мал. Он становится существенным, лишь когда одна из величин  $v'_i - \alpha_i$  экспоненциально мала. Таким образом, логарифмы в аргументах обеих  $\theta$ -функций можно отбросить, ограничив интегралы по  $v'_i$  условием  $v'_i > |\alpha_i|$ . В результате (II. 8) сводится к интегралу

$$\begin{aligned} & \int_{|\alpha_1|}^{\infty} dv'_1 \dots \int_{|\alpha_N|}^{\infty} dv'_{N-1} \theta \left[ N - \frac{N |\delta u|}{2x} - \sum_{i=1}^{N-1} v'_i \right] = \\ & = \frac{\left[ N - \frac{N |\delta u|}{2x} - \sum_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \right]^{N-1}}{(N-1)!}, \end{aligned} \quad (\text{II. 10})$$

который легко вычисляется последовательным интегрированием. Окончательное выражение для  $\varphi_N(x)$  запишем, учитывая относительную малость второго и третьего слагаемых в квадратных скобках (II. 10),

$$\varphi_N(x) = \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} \exp \left[ -\frac{N}{x} \sum_{i=1}^{N-1} \left| \Delta_i - \frac{\delta u}{2} \right| - \frac{N |\delta u|}{2x} \right]. \quad (\text{II. 11})$$

Перед подстановкой (II. 11) в (II. 7) удобно преобразовать (II. 7) следующим образом:

$$\begin{aligned} I_N &= \int_0^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon'_1 \dots d\varepsilon'_{N-1} \int d^2 \rho'_2 \dots d^2 \rho'_{N-1} \delta \left[ w - \sum_{i=1}^{N-1} (\rho_i'^2 + E_{0i}') \right] \varphi_N [(N-1)\xi - w] = \\ &= \left[ \int d^2 \rho''_2 \dots d^2 \rho''_{N-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^{N-1} \rho_i''^2 \right)^{N-2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon''_1 \dots d\varepsilon''_{N-1} \delta \left( 1 - \sum_{i=1}^{N-1} E_{0i}'' \right) \times \\ & \quad \times \int_0^{\infty} dw w^{2N-4} \varphi_N [(N-1)\xi - w]. \end{aligned} \quad (\text{II. 12})$$

При получении последнего выражения в (II. 12) была сделана замена переменных  $\rho'_i = \rho_i'' w^{1/2}$ ,  $\varepsilon'_i = \varepsilon_i'' w \left( 1 - \sum_{i=1}^{N-1} \rho_i''^2 \right)$ . Интеграл по  $w$  в этом выражении легко вычисляется, поскольку подынтегральная функция имеет острый максимум при  $w = 2N\xi/3$ . При этом значение аргумента  $x$  функции  $\varphi_N(x)$  оказывается равным  $x = N\xi/3 \gg N$ , так что вторым слагаемым в показателе экспоненты (II. 11) можно пренебречь. Интегралы по  $d^2 \rho_i''$  в (II. 12) вычисляются последовательным интегрированием. Полагая  $N \gg 1$ , запишем результат в виде

$$I_N = (\pi e^2 N \xi^3 / 27)^N \Psi_N(0), \quad (\text{II. 13})$$

где для обозначения оставшегося  $(N-1)$ -кратного интеграла по  $d\varepsilon_i''$  введена функция

$$\Psi_N(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_1'' \dots d\varepsilon_{N-1}'' \delta \left[ 1 - E_0(\tau, \varepsilon_{N-1}'') - \sum_{i=1}^{N-1} E_0(\varepsilon_i'', \varepsilon_{i-1}'') \right] \times \\ \times \exp \left( -\frac{3}{\xi} \sum_{i=1}^{N-1} \left| \Delta_i - \frac{\delta u}{2} \right| \right). \quad (\text{П. 14})$$

Для нахождения функции  $\Psi_N(\tau)$  воспользуемся методом рекуррентных соотношений, предложенным в [4]. Введем  $\tilde{\Psi}_N(\tau) = N! \Psi_N(\tau/N)$ . Рекуррентное соотношение для функций  $\tilde{\Psi}_N$  имеет вид

$$\tilde{\Psi}_N(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \exp \left[ -E_0(\tau, \tau') - \frac{3}{\xi} \left| \frac{\delta \mu}{4T} (\text{sign } \tau + \text{sign } \tau') - \frac{\delta u}{2} \right| \right] \tilde{\Psi}_{N-1}(\tau') = \\ = \hat{Q} \tilde{\Psi}_{N-1}(\tau). \quad (\text{П. 15})$$

Если искать функции  $\tilde{\Psi}_N$  в виде разложения по собственным функциям оператора  $\hat{Q}$ , то при  $N \gg 1$

$$\tilde{\Psi}_N(\tau) = B \kappa^N \Phi(\tau), \quad (\text{П. 16})$$

где  $B$  — численный коэффициент, а  $\kappa$  — наибольшее собственное число уравнения

$$\kappa \Phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{-E_0(\tau, \tau')} \left( 1 - \frac{3}{\xi} \left| \frac{\delta \mu}{4T} (\text{sign } \tau + \text{sign } \tau') - \frac{\delta u}{2} \right| \right) \Phi(\tau') = \hat{Q} \Phi(\tau). \quad (\text{П. 17})$$

В (П. 17) мы разложили ядро оператора  $\hat{Q}$  по малой добавке, пропорциональной  $1/\xi \sim 1/N$ . Если пренебречь этой добавкой, уравнение (П. 17) сводится к уравнению, рассмотренному в [4], где для  $\kappa$  и  $\Phi$  были получены выражения

$$\kappa_0 = 4/\gamma^2 = 1.18, \quad \Phi_0(\tau) = e^{-|\tau|^2} J_1(\gamma e^{-|\tau|^2/2}), \quad (\text{П. 18})$$

где  $J_1(x)$  — функция Бесселя,  $J_1'(\gamma) = 0$ . Наличие добавки, пропорциональной  $1/\xi$  в ядре (П. 17), можно учесть по теории возмущений. При этом  $\kappa = \kappa_0 + \delta \kappa$

$$\delta \kappa = \frac{3|\delta \mu|}{2\xi T} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \Phi_0(\tau) \Phi_0(\tau') e^{-E_0(\tau, \tau')} \left| \frac{\text{sign } \tau + \text{sign } \tau'}{2} - \frac{T\delta u}{\delta \mu} \right|}{\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Phi_0^2(\tau)}. \quad (\text{П. 19})$$

Интегралы в числителе и в знаменателе (П. 19) можно вычислить, если сделать замену  $x = \gamma \exp(-|\tau|^2/2)$  и воспользоваться соотношением

$$\int_0^x dt t J_0^2(t) = \frac{x^2}{2} (J_0^2(x) + J_1^2(x)), \quad (\text{П. 20})$$

а также рекуррентными соотношениями для функций Бесселя. Имеем

$$\delta \kappa = -\frac{6|\delta \mu|}{\gamma^2 \xi T} \left\{ |s| \theta(|s| - 1) + \left( 1 + \frac{|s| - 1}{\gamma^2 - 1} \right) \theta(1 - |s|) \right\}, \quad (\text{П. 21})$$

где  $s = T\delta u/\delta \mu$ . Теперь следует подставить  $\kappa$  в (П. 16). С точностью до численного коэффициента  $\tilde{\Psi}_N(0) = \kappa^N = (4/\gamma^2)^N \exp(N\gamma^2\delta \kappa/4)$ , а  $\Psi_N(0) = \tilde{\Psi}_N(0)/N!$  Подставляя это значение в (П. 13), а (П. 13) в (П. 4), получим

$$\hat{G}_{\mu_1, \mu_2}^{(N)} = \frac{N}{La} \left( \frac{2\pi e^2 g La^2 T \xi^3}{27\gamma^2 N} \right)^{N-1} \exp \left( \frac{N\gamma^2 \delta \kappa}{4} \right). \quad (\text{П. 22})$$

Выражение (П. 22) как функция  $N$  имеет острый максимум при  $N=\bar{N}=\frac{1}{2}(1+3/\lambda)(2L/a\bar{u})$ , где  $\lambda$  определяется формулой (11). Чтобы убедиться в этом, следует вспомнить, что зависимость от  $N$  в (П. 22) содержится также в величине  $\xi=\bar{u}-2L/Na$ , так что максимуму (П. 22) по  $N$  соответствует значение  $\xi=3\bar{u}/\lambda$ . В исходном выражении для парной плотности цепочек содержится суммирование по числу звеньев  $N$ . С точностью до предэкспоненты эта сумма определяется слагаемым с  $N=\bar{N}$ . Подставляя  $\xi=3\bar{u}/\lambda$  в (П. 21), (П. 21) и значение  $N=\bar{N}$  в (П. 22), а затем дифференцируя полученное выражение по  $u_1$  и по  $u_2$  (с учетом того, что  $u_1=\bar{u}-\delta u/2$ ,  $u_2=\bar{u}+\delta u/2$ ), получаем формулу (20) основного текста.

#### Л и т е р а т у р а

- [1] Mott N. F. — J. Non-Cryst. Sol., 1968, v. 1, N 1, p. 1—17.
- [2] Шкловский Б. И., Эфрос А. Л. Электронные свойства легированных полупроводников. М., 1979. 416 с.
- [3] Pollak M., Hauser J. J. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, N 21, p. 1304—1307.
- [4] Тартаковский А. В., Фистуль М. В., Райх М. Э., Рузин И. М. — ФТП, 1987, т. 21, в. 4, с. 603—608.
- [5] Райх М. Э., Рузин И. М. — Письма ЖЭТФ, т. 43, в. 9, с. 437—439.
- [6] Райх М. Э., Рузин И. М. — ЖЭТФ, 1987, т. 92, в. 6, с. 2257—2276.
- [7] Альтшулер Б. Л., Спивак Б. З. — Письма ЖЭТФ, 1985, т. 42, в. 9, с. 363—365.
- [8] Альтшулер Б. Л., Хмельницкий Д. Е. — Письма ЖЭТФ, 1985, т. 42, в. 7, с. 291—293.
- [9] Webb R. A., Fowler A. B., Hartstein A., Wainer J. J. — Surf. Sci., 1986, v. 170, N 1, p. 14—27.
- [10] Орлов О. А., Савченко А. К., Ченский Е. В., Ильичев Э. А., Полторацкий Э. А. — Письма ЖЭТФ, 1986, т. 43, в. 9, с. 421—423.

Физико-технический институт  
им. А. Ф. Иоффе АН СССР  
Ленинград

Получена 15.01.1988  
Принята к печати 1.02.1988