

РАЗМЕРНЫЙ ЭФФЕКТ НА КИНЕТИЧЕСКИХ ДЛИНАХ В МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИИ МНОГОДОЛИННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Моздор Е. В., Прима Н. А.

Рассмотрен размерный эффект на длине остывания L_ε и междолинной длине L_m в магнитосопротивлении многодолинных полупроводников. Ранее расчет этого размерного эффекта проводился только феноменологически и, как правило, исследовались раздельно размерный эффект на длине L_ε и размерный эффект на длине L_m .

В данной работе найдены решения кинетического уравнения для функций распределения в долинах $f_0^{(a)}$ (ε, y) при граничных условиях, отвечающих отсутствию детальных потоков на боковых поверхностях $y = \pm d$ тонких пластин $j_y^{(a)}(\varepsilon, \pm d) = 0$. Рассмотрены квазиупругое внутриволинное рассеяние и неупругое, осуществляемое на фононе с энергией $\hbar\omega_0$, междолинное.

Показано, что физическая картина размерного эффекта принципиально отличается от феноменологической. Вычислены угловые и толщинные зависимости магнитосопротивления n -Si. Строго показано, что магнитосопротивление тонкого $d \ll L_\varepsilon, L_m$ образца равно нулю.

1. *Введение.* В тонких образцах из многодолинного полупроводника протекание тока вдоль образца может сопровождаться поперечной неравновесностью электронов проводимости (дырок) по долинам и по энергии. Причины неравновесности — анизотропия энергетического спектра и соответственно наличие детальных поперечных потоков, ограничиваемых поверхностями. Неравновесность максимальна вблизи поверхностей образца и релаксирует в глубину на характерных кинетических длинах — междолинной длине $L_m \sim \sqrt{D\tau_m}$ и длине остывания $L_\varepsilon \sim \sqrt{D\tau_\varepsilon}$ (D — коэффициент диффузии, τ_m и τ_ε — времена релаксации). Как и следовало ожидать, продольный ток в такой ситуации зависит от толщины пластины [1].

Ранее расчет размерного эффекта на длинах L_ε, L_m проводился феноменологически и, как правило, исследовались раздельно размерный эффект на длине L_ε и размерный эффект на длине L_m . Однако для достаточно чистых образцов, представляющих наибольший интерес, такое рассмотрение некорректно [2, 3]. При последовательном теоретическом подходе определяемый из кинетического уравнения вид энергетической зависимости симметричной части функций распределения в долинах отличается от максвелл-больцмановского, что приводит к взаимному влиянию размерных эффектов на L_ε и на L_m и изменению их величин (в несколько раз для параметров Si [3]). В [3] был предложен метод решения кинетического уравнения и рассмотрен размерный эффект в проводимости.

В данной работе показано, что этот метод может быть использован в ряде случаев и для вычисления слабополевого магнитосопротивления. Это важно, так как размерный эффект в магнитосопротивлении значительно сильнее размерного эффекта в проводимости. Можно ожидать, что и отличие от феноменологического расчета в магнитосопротивлении проявится сильнее. В качестве примера в работе получена размерная зависимость магнитосопротивления n -Si, которая значительно отличается от феноменологической по величине и по угловым зависимостям.

2. *Основные уравнения.* Рассмотрим полупроводниковую пластинку, тонкую в y -направлении ($-d \leq y \leq d$). Ток линеен по приложенному электрическому

полю E_x , магнитное поле \mathbf{H} перпендикулярно току. Кинетическое уравнение, механизмы рассеяния и граничные условия здесь взяты теми же, что и в [3]. Далее ссылки на формулы работы [3] будем сопровождать буквой П, например (1П).

Магнитное поле в кинетическое уравнение (3П) входит единственным образом — через тензорный коэффициент диффузии электронов с заданной энергией $D_{ik}^{(\alpha)}$ (ϵ , \mathbf{H}). Диагональные компоненты этого тензора четны по магнитному полю [4]. Поэтому для тех образцов, у которых размерный эффект наблюдается только в магнитном поле [$D_{xy}^{(\alpha)}$ (ϵ , \mathbf{H}) отличны от нуля в поле \mathbf{H}], при вычислении квадратичного по \mathbf{H} магнитосопротивления достаточно учесть магнитное поле только в граничных условиях. Тогда система уравнений (12П) для функций $\psi^{(\alpha)}(\epsilon, y)$, определяющих отклонение симметричной части функций распределения от равновесного значения, не изменяется:

$$g(\epsilon) D_{yy}^{(\alpha)}(\epsilon) \frac{\partial^2 \psi^{(\alpha)}}{\partial y^2} + \hat{S}(\psi^{(\alpha)}) - \hat{S}_m(\psi^{(\alpha)}, \psi^{(\beta)}) = 0. \quad (1)$$

В [3] рассмотрена простая ситуация, когда система (1) может быть представлена независимыми уравнениями, решения которых ищутся методом разделения переменных. В общем случае этот метод неприменим, однако идеология может быть сохранена, если искать решения по-прежнему в виде разложения по полной системе функций $\varphi_n(x)$:

$$\psi^{(\alpha)}(x, y) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} Y_{na}(y) \varphi_n(x), \quad (2)$$

ортогональных в интервале $(0, \infty)$ с весом $x^{3/2} e^{-x}$. В данном случае это — собственные функции оператора квазиупругого рассеяния $\hat{S}(\psi^{(\alpha)})$. Удобство — в простоте и хорошей сходимости ряда (2) при всех значениях γ_0 [3]. Параметр γ_0 (20П) пропорционален интенсивности неупругого междолинного рассеяния.

Для $Y_{na}(y)$ получаем бесконечную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ($L_a^2 = 2\tau_{\epsilon\phi} D_{yy}^{(\alpha)}$)

$$L_a^2 \frac{d^2 Y_{na}}{dy^2} - \sum_{m=0}^{\infty} [A_{nm} + (M-1) B_{nm}] Y_{ma} + \sum_{\substack{m=0 \\ \beta \neq \alpha}}^{\infty} b_{nm} Y_{m\beta} = 0. \quad (3)$$

Здесь A_{nm} , B_{nm} , b_{nm} — матричные элементы операторов \hat{S} и \hat{S}_m . Далее процедура поиска решений обычна: каждое из $Y_{na}(y)$ представляется в виде $Y_{na}(y) = \sum_j C_{na}^j e^{\alpha_j y}$, показатели α_j определяются из характеристического уравнения, а C_{na}^j — из граничных условий

$$\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{C}_{na}^j \operatorname{ch}(\alpha_j d) = \bar{A}_{na}(\mathbf{H}), \quad (4)$$

где

$$\bar{A}_{na}(\mathbf{H}) = \int_0^{\infty} x e^{-x \varphi_n(x)} \left(\frac{D_{yx}^{(\alpha)}(x)}{D_{yy}^{(\alpha)}(x)} - \frac{\bar{D}_{yx}}{\bar{D}_{yy}} \right) dx. \quad (5)$$

Полный ток I_x , протекающий через образец, с точностью до квадратичных по \mathbf{H} членов равен

$$I_x = e E_x \left[\bar{D}_{xx} - \frac{\bar{D}_{xy} \bar{D}_{yx}}{\bar{D}_{yy}} - \frac{\bar{D}_{xz} \bar{D}_{zx}}{\bar{D}_{zz}} - \sum_{\alpha=1}^M D_{xy}^{(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{C}_{ka}^j \frac{\operatorname{sh}(\alpha_j d)}{\alpha_j d} \right]. \quad (6)$$

Здесь

$$\rho_k = \Gamma(k+1/2) (\Gamma(1/2) k! \sqrt{k+1})^{-1}. \quad (7)$$

Из выражений (4)—(6) видно, что в тонком по сравнению с характерными длинами размерного эффекта образце ($\alpha_j d \ll 1$) можно считать $\sum_j C_{n\alpha}^j \approx A_{n\alpha}$, так что

$$I_x(H, d \rightarrow 0) = eE_x \left[\bar{D}_{xx} - \frac{\bar{D}_{xz}\bar{D}_{zx}}{\bar{D}_{zz}} - \sum_{\alpha=1}^M \frac{\bar{D}_{xy}^{(\alpha)}\bar{D}_{yx}^{(\alpha)}}{\bar{D}_{yy}^{(\alpha)}} \frac{1}{\Gamma(3/2)} \right]. \quad (8)$$

Отсюда следует важный результат: ток в тонком образце не зависит от z -компоненты магнитного поля, т. е. магнитосопротивление для такого направления \mathbf{H} падает до нуля. Действительно, в поле H_x $\bar{D}_{xz} = 0$,

$$I_x(H_x, d \rightarrow 0) = eE_x \left[\bar{D}_{xx} + \sum_{\alpha=1}^M \frac{(\bar{D}_{xy}^{(\alpha)})^2}{\bar{D}_{yy}^{(\alpha)}} \frac{1}{\Gamma(3/2)} \right] \equiv eE_x \bar{D}_{xx}(0). \quad (9)$$

Этот результат вытекает из граничных условий (9П), аналогичен эффекту для полупроводника с изотропными носителями [2] и может быть получен только

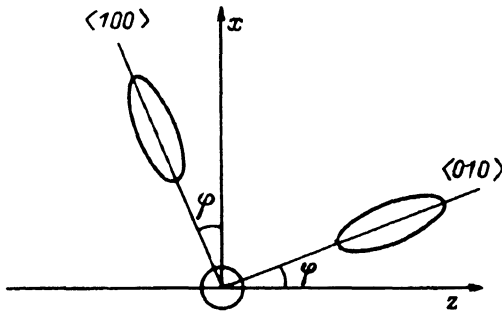


Рис. 1. Ориентация долин в n -Si.

в кинетической теории. Граничные условия требуют отсутствия потока электронов с заданной энергией в долине через ограничивающие поверхности, что выполняется благодаря компенсации полевого потока возникающим из-за размерного эффекта диффузионным. Поскольку последний изменяется на расстояниях от поверхности $\approx \alpha_j^{-1}$, то в тонком образце раскомпенсации не происходит, поперечные потоки отсутствуют, следовательно, и магнитосопротивление равно нулю.

3. *Размерный эффект в магнитосопротивлении n -Si.* В качестве примера рассмотрим образцы из n -Si, тонкие в направлении $y \parallel \langle 100 \rangle$, угол φ произволен (рис. 1). Так как для всех долин y совпадает с одной из главных осей эллипсоида энергии, то $D_{yy}^{(1)} = D_{yy}^{(2)} = D_{\perp}$, $D_{yy}^{(3)} = D_{\parallel}$, а $D_{xy}^{(\alpha)}(e)$ отличны от нуля только в поле H_x . Поэтому и размерный эффект имеет место в поле H_x . Феноменологическое выражение для тока приведено в [5], для выбранных нами механизмов рассеяния при анизотропии $a = D_{\perp}/D_{\parallel} = 5$ получаем

$$\frac{I_x(0) - I_x(H)}{I_x(0)} = \alpha^2 \left(\frac{0.62}{1.1} \right) \left\{ 1 - \frac{0.08}{0.31} \left(\sin^2 2\varphi + b \cos^2 2\varphi \frac{\text{th } \delta_1}{\delta_1} \right) - \frac{b}{1.24} \left[\frac{0.98}{1.1} + \frac{0.98}{8.8} \frac{\text{th } \delta_e}{\delta_e} + \frac{0.032}{1.1} \frac{\text{th } \delta_s}{\delta_s} \right] \right\}. \quad (10)$$

Здесь $b = \pi/4$, $\delta_i = d/L_i$, D_{\perp} , D_{\parallel} — поперечная и продольная компоненты тензора диффузии в долине, характерные длины размерного эффекта

$$L_{\perp 1}^2 = \frac{\tau_{\text{мф}}}{3} D_{\perp}, \quad L_{\parallel 3}^2 = \frac{\tau_{\text{мф}}}{11} D_{\parallel}, \quad L_e^2 = (2\tau_{\text{эф}} D_{\perp}) \frac{11}{15}. \quad (11)$$

Исследуя систему уравнений (1), видим, что в нашем примере из-за условия $D_{yy}^{(1)} = D_{yy}^{(2)}$ от системы отщепляется одно уравнение, если ввести функцию $\psi(e, y) = \psi^{(1)} - \psi^{(2)}$. Это упрощает задачу, так как оно полностью совпадает с рассмотренным в [8]. Сумма по n в выражении для тока

$$\frac{I_x(0) - I_x(H)}{I_x(0)} = \kappa^2 \left(\frac{0.62}{1.1} \right) \left\{ 1 - \frac{0.08}{0.31} \left(\sin^2 2\varphi + b \cos^2 2\varphi \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\text{th}(\alpha_n d)}{\alpha_n d} \right) - \right. \\ \left. - \frac{b}{1.24} \left[\frac{0.98}{1.1} + \sum_{j=0}^{\infty} R_j \frac{\text{th}(\alpha_j c d)}{(\alpha_j c d)} \right] \right\} \quad (12)$$

получена из решений отщепившегося уравнения. Используя граничные условия и свойства функций $\varphi_n(x)$, можно показать, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\gamma_0) = b^{-1}$ при всех γ_0 , а при $\gamma_0 = 0$ (междолинное рассеяние отсутствует) и вычислить каждое из $a_n(0) = \rho_n^2$. Значения нескольких из $a_n(0)$ приводятся:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0.125, \quad a_2 = 0.047, \quad a_3 = 0.024, \quad a_4 = 0.015 \dots \quad (13)$$

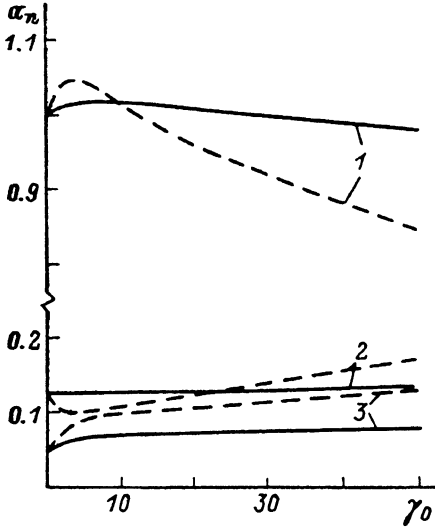


Рис. 2. Зависимость коэффициентов a_n от параметра γ_0 (относительная интенсивность междолинного рассеяния).
 α_0 : сплошные кривые — 7, штриховые — 5.
 1 — a_0 , 2 — a_1 , 3 — a_2 .

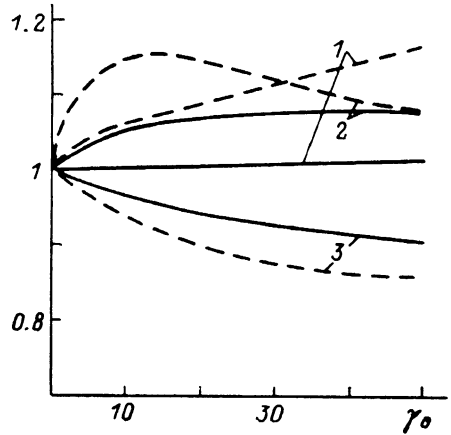


Рис. 3. Отношения характерных времен как функции γ_0 .
 α_0 : сплошные кривые — 7, штриховые — 5. 1 — τ_m/τ_n , 2 — α_m^2/α_1^2 , 3 — α_4^2/α_2^2 .

В [3] показано, что α_0^{-1} играет роль междолинной длины, а остальные α_n^{-1} — роль длин остывания. Там же введены соответствующие этим длинам времена релаксации

$$\alpha_0^{-2} = L_m^2 = \frac{\tau_m}{3} D_{\perp}, \quad \alpha_n^{-2} = L_{en}^2 = 2\tau_{en} D_{\perp} = \frac{2\tau_{en} D_{\perp}}{\Lambda_n}. \quad (14)$$

Сравнивая (11), (14) и данные [3] для времен, видим, что L_m и L_{m1} определены одинаково, однако всегда $L_m > L_{m1}$ и этот фактор является главным для эффекта на междолинной длине ввиду слабой зависимости $a_0(\gamma_0)$ (рис. 2) (напомним, в n -Si $\gamma_0 \approx 25$ и $x_0 = 7$ при $T_0 = 77$ K).

Соотношение между L_e и L_{e1} зависит от γ_0 , все другие $L_{en} < L_e$. Слагаемые в сумме по n , описывающие размерный эффект на длине остывания, интересны и важны, именно они дают зависимость от угла φ , отсутствующую в феноменологии. Их вклад по величине, как видно из дальнейшего, примерно такой же, как и от слагаемых в сумме по j .

Решения характеристического уравнения двух оставшихся уравнений системы (1) начинаются $\alpha_{0c} \equiv 0$. Ему соответствует $R_0 \equiv 0$. Следующее значение α_{1c}^{-1} отождествим с другой междолинной длиной

$$L_{m0}^2 = \alpha_{1c}^{-2} = \tau'_m D_{\perp} / 11, \quad (15)$$

оставшиеся α_j^{-1} — с двумя новыми наборами длин остывания (по числу долин). При $\gamma_0=0$ один из этих наборов совпадает с L_{en} , а другой — с $L_{en}/\sqrt{5}$. Этот результат очевиден, в определение длин остывания в каждой из долин входит свой коэффициент $D_{yy}^{(\alpha)}$. При $\gamma_0=0$ можно аналитически вычислить и R_j (четные j соответствуют набору длин, совпадающему с L_{en}):]

$$\begin{aligned} R_1 \approx 0.029, \quad R_3 \approx 0.025, \quad R_5 \approx 0.009, \quad R_7 \approx 0.005, \\ R_2 \approx 0.090, \quad R_4 \approx 0.034, \quad R_6 \approx 0.018, \quad R_8 \approx 0.011 \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Ранее [3] и в (14) нами введены характерные времена релаксации. Ясно, что это формальный прием. В задаче о размерном эффекте фигурируют характерные длины, попытка переопределить их через времена искусственна, однако не лишена смысла, что показано на рис. 3. Отношения соответствующих времен (квадратов длин) слабо зависят от γ_0 и номера долины и могут быть использованы для приближенного сравнения с результатами экспериментов, в которых непосредственно определяются времена τ_n, τ_e (см., например, [6]).

На рис. 4 приведены зависимости $R_j(\gamma_0)$, полученные численно путем решения системы (3) с граничными условиями (4). Вычисления проводились для

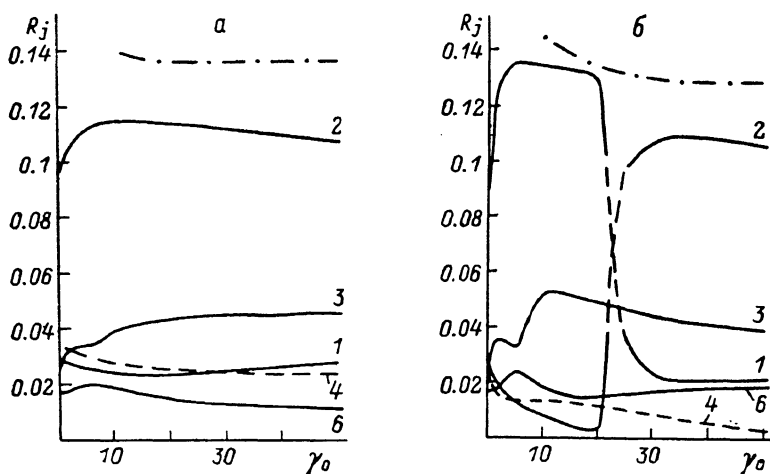


Рис. 4. Зависимость коэффициентов R_j от параметра γ_0 .

Номер кривой соответствует значению j . Штрихпунктиром изображена сумма R_1+R_2 . α_0 : а — 7, б — 5.

числа уравнений 12, 24, 30, 36 и результаты сравнивались. Погрешность вычисления нескольких наименьших корней характеристического уравнения и соответствующих R_j не превышает 1—2%. Для контроля использовалась также известная $\sum_{j=0}^{\infty} R_j(\gamma_0) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} R_j(0) \approx 0.28$.

Из рис. 4 видно, что достаточно плавные при $x_0=7$ зависимости $R_j(\gamma_0)$ при повышении температуры убыстряются. Более того, для $x_0=5$ R_1 и R_2 изменяются немонотонно. Это связано с тем, что два корня характеристического уравнения α_{1c} и α_{2c} близки по величине примерно в области $15 \leq \gamma_0 \leq 30$, так что при $\gamma_0 \leq 23$ корень $\alpha_{2c} > \alpha_{1c}$ ($L_{mc} > L_{e1}$), а при $\gamma_0 \geq 23$ корень $\alpha_{1c} > \alpha_{2c}$ ($L_{e1} > L_{mc}$). Таким образом, $\gamma_0 \approx 23$ — точка вырождения двух корней. Это обстоятельство не приводит к каким-либо новым физическим явлениям; в частности, здесь не может быть резонансов — α_j всегда действительны. Ясно, что в окрестности точки вырождения система (4) плохо различает близкие решения и точность вычисления каждого из R_1, R_2 может быть ниже. Поскольку физический смысл имеет только сумма всех решений, описывающая размерную зависимость тока, а точность вычисления R_1+R_2 прежняя и зависимость от γ_0 плавная (рис. 4, б), мы не стали уделять окрестности точки вырождения особого внимания.

Подведем итог. В работе впервые получена размерная зависимость магнитосопротивления на основе решения кинетического уравнения и проведено де-

тальное сравнение (на примере n -Si) с феноменологическим результатом, которое показало следующее.

1. Феноменологическая теория описывает размерный эффект на длине L_m в магнитосопротивлении в пределе слабого междолинного рассеяния ($\gamma_0 \rightarrow 0$) точно. Поправки при $\gamma_0 \neq 0$ имеют место как в коэффициентах a_0 , R_1 , так и в характерных длинах. При низких температурах коэффициенты мало чувствительны к γ_0 , длины же могут измениться в несколько раз, поэтому для этого эффекта важно учитывать, в первую очередь, отличие длин от феноменологических.

2. Размерный эффект на длине остывания феноменологическая теория описывает неправильно при всех γ_0 . В нашем примере она теряет этот размерный эффект в сумме по n , т. е. полностью теряет его угловую зависимость, в сумме по j определяет его приближенно, усредненно. Как видно из (13), (16) и рис. 2, 4, правильное описание размерного эффекта на длине L_c требует всегда учета как минимум нескольких членов ряда в обеих суммах, поскольку коэффициенты a_n и R_j убывают медленно. Именно все члены ряда в сумме дают правильный результат для тонкого образца — спадание магнитосопротивления до нуля в поле H_z . Следовательно, для оценки вклада размерного эффекта на длине L_c (например, при выборе ориентации образца) правильнее пользоваться не результатами его феноменологического расчета, а феноменологическими коэффициентами a_0 , R_1 и тем фактом, что магнитосопротивление в тонком образце отсутствует.

В заключение авторы выражают благодарность Э. С. Грибникову за обсуждение работы.

Л и т е р а т у р а

- [1] Рашба Э. И., Грибников Э. С., Кравченко В. Я. — УФН, 1976, т. 119, в. 1, с. 3—47.
- [2] Грибников Э. С., Прима Н. А. — ФТП, 1971, т. 5, в. 7, с. 1274—1280.
- [3] Прима Н. А. — ФТП, 1986, т. 20, в. 2, с. 314—321.
- [4] Аше М., Грибников Э. С., Митин В. В., Сарбей О. Г. Горячие электроны в многодолинных полупроводниках. Киев, 1982. 328 с.
- [5] Беридзе Б. Ш., Климовская А. И., Прима Н. А., Снитко О. В. — ФТП, 1985, т. 19, в. 6, с. 987—992.
- [6] Денис В. И., Канцлерис Ж., Мартунас Э. И. Теплые электроны. Вильнюс, 1983. 143 с.

Институт полупроводников АН УССР
Киев

Получена 27.10.1987
Принята к печати 24.02.1988