

РАССЕЯНИЕ ДВУМЕРНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ТОКА НА ОТДАЛЕННОЙ КУЛОНОВСКОЙ ПРИМЕСИ

Ларкин И. А.

Вычислено транспортное сечение рассеяния двумерных носителей тока на кулоновском центре, расположенном вне плоскости движения. Это позволяет найти вклад в обратную подвижность электронов и дырок параллельно стенкам квантовой ямы, обусловленный рассеянием на легирующих примесях. Результат также применим для расчета параметров релаксации двумерных электронных и дырочных газов.

1. *Введение.* В последние годы в связи со значительными достижениями технологии, основанной на молекулярно-лучевой эпитаксии, был подробно изучен двумерный электронный газ, возникающий в полупроводниковых сверхрешетках и гетероконтактах. Наиболее популярным материалом для их изготовления является пара GaAs—Al_xGa_{1-x}As, обладающая (при $x \geq 0.25$) довольно высоким энергетическим барьером на границе раздела. Если при этом легировать только Al_xGa_{1-x}As, то носители тока перетекут в GaAs и концентрация носителей тока в нем значительно превысит концентрацию случайных примесей. Из-за кулоновского притяжения к примесям свободные носители образуют двумерный электронный (или дырочный) газ, обладающий более высокой подвижностью, чем в обычных полупроводниках [1-3].

В нескольких работах [1-4] предпринимались систематические попытки выяснить зависимость подвижности носителей тока от толщины так называемого спейсера — области чистого Al_xGa_{1-x}As, прилегающей к GaAs. Оказалось, что оптимальная толщина спейсера составляет 100 Å, при дальнейшем увеличении спейсера концентрация носителей падает и зависимость подвижности от толщины спейсера носит нерегулярный характер [1, 3].

В теоретических работах, где вычислялась подвижность электронного или дырочного газа, основное внимание авторов [10-14] уделялось экранировке и транспортное сечение σ_{tr} рассчитывалось в борновском приближении. Последовательный анализ для различных режимов рассеяния был проделан в [15] лишь для того случая, когда рассеивающий центр находится в плоскости движения. Оказалось, что переход от борновского приближения к квазиклассическому рассеянию характеризуется параметром $\alpha := e^2/\chi\hbar v_0$, где e — заряд электрона, χ — диэлектрическая проницаемость, а v_0 — скорость налетающей частицы. При больших α правильное выражение для транспортного сечения дает классическая формула Резерфорда, которая в двумерном случае отличается от борновского приближения.

Если же рассеивающий центр находится вне плоскости движения, то амплитуда рассеяния $f(\theta)$ зависит еще от одного безразмерного параметра $\xi := \chi d \epsilon_0 / e^2$, где d — расстояние до плоскости движения, а ϵ_0 — энергия налетающей частицы. В двумерном случае транспортное сечение имеет размерность длины и имеет вид

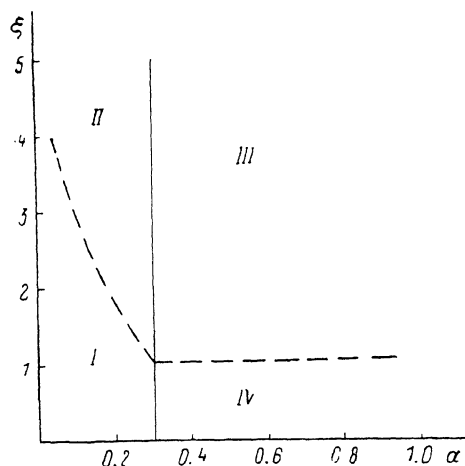
$$\sigma_{tr} = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos \theta) |f(\theta)|^2 d\theta, \quad (1)$$

причем $f(0)$ такова, что волновая функция $\psi = e^{ik_{\parallel}x} + \frac{f(\theta)}{\sqrt{r}} e^{ik_{\parallel}r}$ при $r \rightarrow \infty$.

Целью настоящей работы является вычисление транспортного сечения в зависимости от параметров α и ξ . В том случае, когда хотя бы один из них много больше или много меньше единицы, для σ_{tr} можно привести аналитическое выражение; для промежуточной области σ_{tr} будет рассчитано численно.

Все вычисления проводились без учета экранирования, поэтому результаты непосредственно применимы к экспериментам, в которых была большая электронная температура T_e . При концентрации носителей $n < 0.8 \cdot 10^{12}$ см $^{-2}$ радиус Дебая $r_D = T_e / 2\pi n e^2$ больше характерного прицельного расстояния $e^2 / \chi T_e$ при $T_e > 300$ К. Если к тому же температура решетки $T_L \ll T_e$, то рассеяние на примесях доминирует по сравнению со спонтанным испусканием фотонов [12]. Именно эти условия были реализованы в эксперименте [16], где изучались транспортные свойства и другие релаксационные свойства двумерной электронно-дырочной плазмы.

2. *Транспортное сечение.* Рассмотрим движение квантовой частицы в прямоугольной яме с бесконечно высокими стенками под влиянием кулоновской примеси, расположенной вне ямы на расстоянии d от ее середины. Ось z направим перпендикулярно стенкам, так чтобы она проходила через примесь, а начало координат лежало в середине ямы. Движение частицы по оси z будет квантовано. Предположим, что яма узкая настолько, что разность между основным и первым возбужденным состояниями много больше кинетической энергии частицы в плоскости x, y в процессе всего рассеяния. Это также означает, что



Области, соответствующие различным режимам рассеяния.

волновой вектор k_{\parallel} , соответствующий движению параллельно стенкам, много меньше, чем $1/a$, где a — ширина ямы. Таким образом, для рассеяния существенны расстояния, значительно превышающие ширину ямы, при этом можно не учитывать изменения в зависимости волновой функции от координаты z . Эффективная потенциальная энергия

$$U = -\frac{e^2}{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi^2(z) dz}{\sqrt{(d+z)^2 + x^2 + y^2}} = \frac{-e^2}{\chi \sqrt{d^2 + x^2 + y^2}} \quad (2)$$

получается с точностью до членов второго порядка малости по $[a^2/(d^2 + x^2 + y^2)]^{1/2}$, если начало координат выбрано в такой точке, что $\int_{-\infty}^{\infty} z \psi^2(z) dz = 0$. Данное соотношение указывает, куда следует поместить начало координат, чтобы результаты были применимы и для треугольной квантовой ямы (гетероконтакта).

Таким образом, для нахождения транспортного сечения необходимо решить квантово-механическую задачу о рассеянии на потенциале $-e^2/\chi \sqrt{r^2 + d^2}$, ($r^2 = x^2 + y^2$). Случай $d=0$ был рассмотрен в [15]; при этом задача решается точно и сечение

$$\sigma_{tr} = \frac{\pi e^2}{\chi \varepsilon_0} \ln \pi \chi, \quad (3)$$

где ε_0 — исходная кинетическая энергия налетающей частицы. В работе [16] использовался классический предел этой формулы, в работе [17] — предел

малых α , что соответствует борновскому приближению. Отметим, что электрону с энергией порога испускания оптического фотона соответствует $\alpha = 0.38$.

Как отмечалось выше, если $d \neq 0$, то рассеяние характеризуется еще одним безразмерным параметром $\xi = d\varepsilon_0 x / e^2$. Все остальные безразмерные параметры выражаются через них (например, $k_{\parallel} d = 2\xi\alpha$). Транспортное сечение можно записать как

$$\sigma_{tr} = \frac{\pi e^2}{x\varepsilon_0} H(\alpha, \xi), \quad (4)$$

где $H(\alpha, \xi)$ — безразмерная функция двух безразмерных параметров. На рисунке изображена плоскость (α, ξ) , разделенная на четыре области, соответствующие различным режимам рассеяния или различным предельным формулам функции $H(\alpha, \xi)$. Области I и II разделены штриховой линией $\pi\alpha\xi = 1$. Области I и IV вдали от штриховой линии соответствуют пределу $\xi \rightarrow 0$ и описываются формулой (3). Вдали от сплошной вертикальной линии области I и IV описываются борновским приближением, а области III и IV — квазиклассическим. Области II и III вдали от штриховой линии соответствуют малоугловому рассеянию. Во всех смежных областях вдали от точки пересечения сплошной вертикальной и штриховой линий будут получены аналитические выражения для функции $H(\alpha, \xi)$ и соответственно для σ_{tr} .

Борновская амплитуда для рассеяния на отдаленной примеси вычислена в [10]:

$$|f(\theta)|^2 = \frac{\pi e^4}{4x^2 \hbar \varepsilon_0 v_0} \exp\left(-4k_{\parallel} d \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \right) / \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Подставляя это выражение в (1), получим

$$\sigma_{tr} = \frac{\pi^2 e^4}{x^2 \hbar \varepsilon_0 v_0} (I_0(4k_{\parallel} d) - L_0(4k_{\parallel} d)), \quad (5)$$

где L_0 и I_0 — модифицированные функции Струве и Бесселя.

Используя асимптотические выражения для функций L_0 и I_0 при больших значениях аргумента и учитывая (4), получим

$$H(\alpha, \xi) = \frac{1}{4\xi} \quad (6)$$

при $\alpha \ll 1$, $\alpha\xi \gg 1$. В размерных единицах

$$\sigma_{tr} = \frac{1}{4} \frac{\pi e^4}{x^2 \varepsilon_0^2} \frac{1}{d} \quad (7)$$

при $k_{\parallel} d \gg 1$. Эта формула была получена в [14]. Такое же выражение для σ_{tr} получается и в классическом случае в малоугловом приближении, если $d \gg e^2/x\varepsilon_0$. Малый угол отклонения θ в потенциале $U(r)$ равен

$$\theta = \frac{e^2}{x\varepsilon_0} \frac{\rho}{\rho^2 + d^2}, \quad (8)$$

где ρ — прицельное расстояние. Подставляя (8) в классическую формулу для $\sigma_{tr} = \int_{-\infty}^{\infty} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} d\rho$ и считая θ малым, получим выражение (7).

Покажем, что формула (6) вообще справедлива, если ξ удовлетворяет условию $\xi \gg \max\{1, 1/\alpha\}$ независимо от близости точки (α, ξ) к вертикальной линии раздела. При больших $d \gg 1/k_{\parallel}$ основной вклад в транспортное сечение вносят волновые функции с большими значениями орбитального момента l , и поэтому разность фаз $\delta_l - \delta_{l+1}$ можно находить по квазиклассической формуле [18]

$$\delta_l - \delta_{l+1} = \int_{r_{min}}^{\infty} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (\varepsilon_0 - U(r)) - \frac{l^2}{r^2}} - \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (\varepsilon_0 - U(r)) - \frac{(l+1)^2}{r^2}} dr -$$

$$- \int_{r_{\min}}^{\infty} V \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \varepsilon_0 - \frac{l^2}{r^2}} - V \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \varepsilon_0 - \frac{(l+l-1)^2}{r^2}} dr. \quad (9)$$

Центрбежный потенциал в двумерной квантовой механике равен l^2/r^2 , r_{\min} — радиус, при котором подкоренное выражение обращается в нуль. Если считать потенциал слабым ($d \gg e^2/\chi \varepsilon_0$, что эквивалентно условию $\xi \gg 1$), то разность $\delta_l - \delta_{l+1}$ мала и

$$\delta_l - \delta_{l+1} = \frac{me^2}{\chi \hbar^2} \ln \frac{l^2 + (k_{\parallel} d)^2}{(l+1)^2 + (k_{\parallel} d)^2}. \quad (10)$$

Подставляя это выражение в формулу для σ_{tr} , полученную в [15],

$$\sigma_{tr} = \frac{4}{k_{\parallel}} \sum_{l=0}^{\infty} \sin^2(\delta_{l+1} - \delta_l), \quad (11)$$

затем, меняя синусы малых величин на их аргументы и считая, что $l \gg 1$, заменим суммирование по l интегрированием и получим выражение (7). В этом рассуждении не использовано каких-либо предположений относительно величины α , поэтому формулы (6), (7) справедливы везде в областях II и III вдали от штриховой линии.

Изучим теперь квазиклассическое рассеяние, что соответствует области $\alpha \gg 1$. Угол отклонения частицы в центральном поле $U(r)$ выражается через прицельное расстояние и энергию частицы [19]:

$$0 = \pi - 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{U(r)}{\varepsilon_0}}}, \quad (12)$$

здесь r_0 — расстояние минимального сближения, место, где подкоренное выражение обращается в нуль. Вычисляя интеграл, получим

$$0 = \pi - \frac{2a\rho}{\sqrt{(a-b)|c|}} \left[\frac{1}{a-d} \Pi\left(\nu, \frac{(a-c)d}{c(a-d)}, q\right) + \frac{1}{a+d} \Pi\left(\nu, \frac{(a-c)d}{-c(a+d)}, q\right) \right], \quad (13)$$

где $q = \sqrt{b(a-c)/c(a-b)}$, $\nu = \arcsin \sqrt{-c/(a-c)}$ и $a > b \geq c$ — три корня кубического уравнения

$$U^3 - \frac{e^2}{\chi \varepsilon_0} U^2 + (\rho^2 + d^2) U - \frac{e^2}{\chi \varepsilon_0} d^2 = 0. \quad (14)$$

Можно показать, что при любых значениях $e^2/\chi \varepsilon_0$, ρ и d уравнение (14) имеет три действительных корня, причем $a \geq d$. Для вычисления транспортного сечения в классическом пределе удобно выразить параметры ν , q и ρ через корень кубического уравнения a . Тогда

$$\sigma_{tr} = 4 \int_d^{\infty} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{d\rho}{da} da, \quad (15)$$

где

$$\rho = \sqrt{(a+a^2)\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)}. \quad (16)$$

Корни b и c уравнения (14) выражаются через корень a и параметры $e^2/\chi \varepsilon_0$ и d по теореме Виета. Численное интегрирование (15) легко выполнимо: в последнем столбце таблицы приведены значения функции $H(\alpha, \xi)$ при $\alpha \rightarrow \infty$, полученные этим способом. Исследование формул (13)—(16) позволяет установить корневую особенность функции $H(\alpha, \xi)$ при $\xi=0$:

$$H(\alpha, \xi) = 1 - 1.4 \sqrt{\xi}, \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad \xi \rightarrow 0. \quad (17)$$

ξ	α					
	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	∞
0	0.304	0.556	0.850	0.954	0.986	1.000
0.1	0.287	0.483	0.645	0.671	0.657	0.605
0.4	0.239	0.341	0.367	0.353	0.343	0.330
0.9	0.184	0.217	0.237	0.200	0.197	0.193
1.6	0.133	0.137	0.128	0.126	0.126	0.122
2.5	0.095	0.091	0.087	0.086	0.086	0.083

Коэффициент при $\sqrt{\xi}$ получается численно после интегрирования (15) с учетом (13), (14), (16). Общий вид функции $H(\alpha, \xi)$ в областях III и IV при $\alpha \gg 1$ получается из уравнений (13)—(16), для чего надо лишь заменить в уравнении (14) параметр $e^2/\kappa \epsilon_0$ на единицу, а параметр d на ξ и в конце поделить результат (15) на π . Таким образом, мы завершили обход точки пересечения штриховой и сплошной линий, переходя из I в II, из II в III и из III в IV. Переход из IV в I описывается формулой (3). Если же оба параметра находятся вблизи пересечения границ раздела, то для нахождения транспортного сечения нужно найти численно сдвиги фаз δ_i и подставить их в (19). Эта процедура была проделана для потенциала $U(r) = -e^2/\kappa \sqrt{r^2 + d^2}$. Первые 40 радиальных волновых функций $R_l(r)$ находились численно путем решения уравнения Шредингера методом Рунге—Кутты. Сдвиг фазы δ_l находился как разность 50-х корней функции $R_l(r)$ и функции Бесселя $J_l(r)$, которая соответствует свободному движению. К этой разности добавлялась еще логарифмическая поправка $1/2 \ln r_{50}$, обусловленная кулоновским дальним действием [16]. Еще 40 фаз вычислялись по квазиклассической формуле (8). Результаты вычисления $H(\alpha, \xi)$ представлены в таблице. Такого количества фаз достаточно, если α не слишком велико ($\alpha \ll 40$). В противном случае 40 сдвигов фаз недостаточно, к тому же формула (8) несправедлива, но в этом случае хорошо работают квазиклассические формулы (13)—(16).

3. *Подвижность.* Для сравнения результатов теории с экспериментом обратимся к работе [20], где измерялась дрейфовая скорость дырочного газа в сильных электрических полях. Температура кристаллической решетки оставалась низкой, а температура дырок T_h менялась от 250 до 400 К. По предположению авторов [20], функция распределения дырок представляла собой смещенную максвелловскую функцию распределения. В этом случае обратную подвижность $1/\mu$ можно вычислять независимо, суммируя обратные подвижности, обусловленные различными механизмами рассеяния. Рассеяние горячих электронов на фононах было вычислено в [21]; согласно [22], обратная подвижность

$$\frac{1}{\mu} = \frac{Nm_h^2}{2T_h e} \langle (\tau_{tr} + \tau_{tr}^{ph}) v^3 \rangle, \quad (18)$$

где τ_{tr}^{ph} — фоновое транспортное сечение, N — концентрация носителей и примесей, а угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по двумерному максвелловскому распределению. Если принять, что характерная энергия составляет 300 К, то параметры $\alpha = 1.23$, $\xi = 8.6$ для спейсера 323 Å и ямы шириной 90 Å. Это означает, что для вычисления транспортного сечения можно пользоваться формулой (7). Основной вклад в τ_{tr}^{ph} дают при данных размерах деформационные акустические фононы, времена релаксации на которых были вычислены в [23]. При спонтанном испускании фононов характерное транспортное время $1/\tau_{tr}^{DA} = 2.4 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ в яме с бесконечно высокими степенями шириной 90 Å. Транспортное время, обусловленное рассеянием на примесях, в соответствии с формулой (18) $1/\tau_{tr}^{imp} = 12 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, а полная подвижность $\mu = 2 \cdot 10^4 \text{ В/см}^2 \cdot \text{с}$, что соответствует омической подвижности дырок в слабых полях. В сильных полях подвижность уменьшается в соответствии с результатами [12]; в этих условиях, по-видимому, следует учитывать эффект «убегания» носителей и их рассеяние на оп-

тических фонах. Кроме того, в квантовой яме может оказаться существенным перемешивание спектров легких и тяжелых дырок, что приводит к торможению носителей даже при зеркальном отражении от стенок.

Решение этих вопросов требует детального исследования кинетического управления с двумерным интегралом столкновений, ядро которого определяется рассеянием двумерных носителей тока.

Автор благодарит И. Б. Левинсону за произведенные суждения и интерес к работе.

Л и т е р а т у р а

- [1] Heiblum M., Mendez E. E., Stern F. — Appl. Phys. Lett., 1984, v. 44, N 11, p. 1064—1065.
- [2] Störmer H. L., Gossard A. C., Wiegmann W., Blondel R., Baldwin K. — Appl. Phys. Lett., 1984, v. 44, N 1, p. 139—141.
- [3] Hwang J. C., Kastalasky A., Störmer H. L., Keramidis V. G. — Appl. Phys. Lett., 1984, v. 44, N 8, p. 802—806.
- [4] Mori Y., Nakamura F., Watanabe N. — J. Appl. Phys., 1986, v. 60, N 1, p. 334—337.
- [5] Drummond T. J., Kopp W., Keever M., Morkoc H., Cho A. Y. — J. Appl. Phys., 1982, v. 53, N 2, p. 1023—1027.
- [6] Schubert E. F., Fischer A., Ploog K. — Sol. St. Electron., 1986, v. 29, N 2, p. 173—180.
- [7] Drummond T. J., Keein J., Arnold D., Fisher R., Thorne R. E., Lyons W. G., Morkoc H. — Appl. Phys. Lett., 1983, v. 42, N 7, p. 615—617.
- [8] Wang W. I., Mendez E. E., Stern F. — Appl. Phys. Lett., 1984, v. 45, N 6, p. 639—640.
- [9] Weimann G., Schlapp W. — Appl. Phys. Lett., 1985, v. 46, N 4, p. 411—413.
- [10] Walukiewicz W., Ruda H. E., Lagowski J., Gatos H. C. — Phys. Rev., 1984, v. B30, N 8, p. 4571—4582.
- [11] Walukiewicz W. — J. Appl. Phys., 1986, v. 59, N 10, p. 3577—3579.
- [12] Lei X. L., Horing N. J. M. — Sol. St. Commun., 1986, v. 58, N 4, p. 235—238.
- [13] Lee K., Shur M. S., Drummond T. J., Morkoc H. — J. Appl. Phys., 1982, v. 54, N 11, p. 6432—6438.
- [14] Spector H. N., Arora V. K. — Surf. Sci., 1985, v. 159, p. 425—429.
- [15] Stern F., Howard W. E. — Phys. Rev., 1967, v. 163, N 3, p. 816—835.
- [16] Добровольский В. Н., Жарких Ю. С., Абессонова Л. Н. — ФТП, 1971, т. 5, в. 4, с. 723—735.
- [17] Есинов С. Э., Левинсон И. Б. — ЖЭТФ, 1985, т. 90, в. 1, с. 330—345.
- [18] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1975. 502 с.
- [19] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1963. 704 с.
- [20] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., 1973. 208 с.
- [21] Price P. J. — J. Appl. Phys., 1982, v. 53, N 10, p. 6863—6869.
- [22] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М., 1979. 400 с.
- [23] Карпус В. — ФТП, 1986, т. 20, в. 1, с. 12—19.

Институт проблем технологии
микроэлектроники и особочистых
материалов АН СССР
Черноголовка

Получена 25.02.1988
Принята к печати 2.06.1988