СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СВЕРХРЕШЕТКЕ, ОБРАЗОВАННОЙ КОГЕРЕНТНЫМИ ЛУЧАМИ В МНОГОДОЛИННОМ ПОЛУПРОВОДНИКЕ

Дыкман И. М.

Определен спектр собственных колебаний в сверхрешетке многодолинного полупроводника, образованной когерентными лучами. Показано, что в таком полупроводнике только в одном направлении электрического вектора $\mathcal{E}$ собственных колебаний (направлении z, перпендикулярном оси сверхрешетки η) имеют место обычные для однородной плазмы поперечные и продольные колебания. В направлении $\mathcal{E}$, перпендикулярном z и η, возможны только поперечные колебания со строго фиксированными значениями спектра частот. Кроме того, возможны еще продольно-поперечные колебания, частоты которых также строго фиксированы и определяются собственными значениями уравнения (19).

В связи с возрастающим в последние годы практическим применением полупроводниковых сверхрешеток повысился интерес к исследованию разнообразных их свойств [1], в том числе к изучению собственных колебаний в сверхрешетках. В литературе рассмотрены и продолжают рассматриваться колебания и волны разных свойств и различной природы: поверхностные волны в сверхрешетках [2], плазмоны [3, 4], поляритоны [5] (магнитоплазменные [6, 7] и экситонные [8]), геликонные волны [9] и ряд других. Поэтому представляется целесообразным исследовать собственные колебания в сверхрешетке, образованной когерентными лучами в многодолинном полупроводнике. Такая сверхрешетка, как показано в предыдущей работе [10], обладает рядом специфических свойств. Она безынерционна, легко может в нужный момент включаться и выключаться, ее получение не связано с технологическими процессами. Наконец, постоянную периода сверхрешетки можно изменять путем изменения угла падения когерентных лучей на поверхность полупроводника.

Важной особенностью сверхрешетки [10], образованной в многодолинном полупроводнике донорного типа, является различие (и, возможно, даже большое) электронных концентраций в разных долинах при общей нейтральности полупроводника в каждой его точке. По сравнению со сверхрешеткой однодолинного донорного полупроводника указанная локальная нейтральность существенно ослабляет влияние кулоновского взаимодействия электронов с закрепленными донорными центрами и поэтому не препятствует пространственной модуляции электронной концентрации в отдельных долинах.

К сказанному можно еще добавить, что различие электронных концентраций в долинах при их пространственной неоднородности и имеющейся заметной анизотропии эффективных масс приведет к тому, что реакция электронного газа на электрическое поле (даже весьма слабое) будет зависеть от его направления и окажется разной в различных точках полупроводника. Это своеобразно скажется на всех электрооптических свойствах материала, в том числе на характере собственных колебаний. Частоты последних теперь будут определяться не только направлением и величиной их волнового вектора $\mathbf{k}$, но и направлением электрического вектора $\mathcal{E}$. Специфика взаимодействия электронов сверхрешетки с полем, возможно, также обусловит появление целого спектра разрешенных значений частот для каждой пары $\mathbf{k}$, $\mathcal{E}$.

Мы вычислим частоты собственных колебаний, ограничившись рассмотрением донорного германия, у которого анизотропия масс особенно велика. Следуя работе [10], примем, что на поверхность (010) германия падают две симметрично ориентированные когерентные волны, электрический вектор **E** которых параллелен кристаллографическому направлению [110], а их волновые векторы параллельны плоскости (110). В [10] было показано, что при таком направлении **E** образуются две пары долин, различающиеся концентрациями электронов. Концентрации электронов n_1 и n_2 в каждой паре долин приближенно выражаются так [11]

$$n_1 = \frac{1}{2} n (1 - a + b \cos \beta\eta), \quad n_2 = \frac{1}{2} n (a - b \cos \beta\eta). \tag{1}$$

Здесь n — суммарная концентрация электронов, a и b ($0 < a < 1$, $0 < b < 1$ при $a + b < 1$) — параметры сверхрешетки, определяемые интенсивностью и частотой когерентных лучей, образующих ее, β — постоянная сверхрешетки, а координата η направлена по оси сверхрешетки $[\bar{1}10]$. Мы здесь, как и в [10], считаем, что β^{-1} значительно превосходит все длины свободного пробега электронов.[1]

Напряженность электрического поля собственных колебаний $\mathcal{E}$ вызывает в каждой α-долине германия ток, плотность которого в направлении, параллельном ($j_{\parallel}^{(\alpha)}$) и перпендикулярном ($j_{\perp}^{(\alpha)}$) оси эллипсоида энергии, равна[2]

$$j_{\parallel}^{(\alpha)} = \frac{ie^2 n^{(\alpha)}}{m_{\parallel}\omega} \mathcal{E}_{\parallel}^{(\alpha)}(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t}, \quad j_{\perp}^{(\alpha)} = \frac{ie^2 n^{(\alpha)}}{m_{\perp}\omega} \mathcal{E}_{\perp}^{(\alpha)}(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t}. \tag{2}$$

Суммарная (по всем четырем долинам) плотность тока, выраженная в удобной здесь системе координат ξ, η, z ($\xi \parallel [110]$, $\eta \parallel [\bar{1}10]$, $z \parallel [001]$), равна

$$\begin{gathered} j_{\xi} = \frac{ie^2}{3\omega}\left[\left(\frac{2}{m_{\perp}} + \frac{1}{m_{\parallel}}\right) n - 2\left(\frac{1}{m_{\perp}} - \frac{1}{m_{\parallel}}\right)(n_1 - n_2)\right]\mathcal{E}_{\xi}, \\ j_{\eta} = \frac{ie^2}{3\omega}\left[\left(\frac{2}{m_{\perp}} + \frac{1}{m_{\parallel}}\right) n + 2\left(\frac{1}{m_{\perp}} - \frac{1}{m_{\parallel}}\right)(n_1 - n_2)\right]\mathcal{E}_{\eta}, \\ j_z = \frac{ie^2}{3\omega}\left(\frac{2}{m_{\perp}} + \frac{1}{m_{\parallel}}\right) n. \end{gathered} \tag{3}$$

Подстановка этих выражений в уравнение Максвелла

$$-\nabla^2 \mathcal{E} + \nabla(\nabla \mathcal{E}) + \frac{\varkappa}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

($\varkappa$ — диэлектрическая постоянная) приводит к системе уравнений

$$-\frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\xi}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\xi}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\eta}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial \xi \partial z} - (\lambda_1^2 - \gamma \cos \beta\eta)\, \mathcal{E}_{\xi} = 0, \tag{5.1}$$

$$-\frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\eta}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\eta}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\xi}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial \eta \partial z} - (\lambda_2^2 + \gamma \cos \beta\eta)\, \mathcal{E}_{\eta} = 0, \tag{5.2}$$

$$-\frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\xi}}{\partial \xi \partial z} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\eta}}{\partial \eta \partial \xi} - \lambda_3^2 \mathcal{E}_z = 0, \tag{5.3}$$

Здесь введены величины

$$\lambda_1^2 = \frac{\varkappa\omega^2}{c^2} - \frac{\varkappa\omega_p^2}{c^2}\left[1 - (1 - 2a)\frac{m_{\parallel} - m_{\perp}}{2m_{\parallel} + m_{\perp}}\right], \tag{6.1}$$

[1] Более подробно характеристики рассматриваемой классической сверхрешетки и численные значения ее возможных параметров приведены ранее в работах [10, 11].

[2] Далее рассматриваются частоты собственных колебаний ($\omega > 10^{13}$ с$^{-1}$), значительно превосходящие частоты столкновений электронов. Поэтому в (2) последние опущены и оставлена только мнимая часть тока j.

$$\lambda_2^2 = \frac{\varkappa\omega^2}{c^2} - \frac{\varkappa\omega_p^2}{c^2}\left[1 + (1-2a)\,\frac{m_\parallel - m_\perp}{2m_\parallel + m_\perp}\right], \tag{6. 2}$$

$$\lambda_3^2 = \frac{\varkappa}{c^2}\,(\omega^2 - \omega_p^2), \quad \gamma = \frac{2\varkappa\omega_p^2}{c^2}\, b\,\frac{m_\parallel - m_\perp}{2m_\parallel + m_\perp} \tag{6. 3}$$

и плазменная частота ω_p

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{3\varkappa m_\perp}\left(2 + \frac{m_\perp}{m_\parallel}\right). \tag{7}$$

Из возможных решений системы (5) прежде всего выделим два:

$$\mathcal{E}_\xi = \mathcal{E}_\eta = 0, \quad \mathcal{E}_z(\xi, \eta) = 0, \quad \mathcal{E}_z(z) \neq 0, \tag{8}$$

откуда следует $\lambda_3 = 0$, т. е. $\omega = \omega_p$, и

$$\mathcal{E}_\xi = \mathcal{E}_\eta = 0, \quad \mathcal{E}_z = C\exp\left[-i\,(\omega t - k_1\xi - k_2\eta)\right], \tag{9}$$

где

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{c^2}{\varkappa}\,(k_1^2 + k_2^2). \tag{10}$$

Приведенные решения, как видно, описывают обычную продольную (8) и поперечную (9) плазменные волны. Сверхрешетка (1), следовательно, не влияет на плазменные волны, электрический вектор которых перпендикулярен оси сверхрешетки η и направлению поля **E** когерентных волн, образующих данную сверхрешетку.

Интересно, что, кроме волны (9), система уравнений (5) допускает еще один вид поперечных волн, уже необычных для однородной плазмы:

$$\mathcal{E}_\eta = \mathcal{E}_z = 0, \quad \mathcal{E}_\xi = e^{-i\,(\omega t - kz)} f(x), \tag{11}$$

где $f(x)$ определяется уравнением Матье

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + (s_\text{м} - 2q_\text{м}\cos 2x)\, f(x) = 0. \tag{12}$$

Мы записали это уравнение в его стандартном виде, для чего и ввели следующие безразмерные величины:

$$s_\text{м} = 4\,(\lambda_1^2 - k^2)/\beta^2, \quad q_\text{м} = 2\gamma/\beta^2, \quad x = \beta\eta/2. \tag{13}$$

Решения уравнения (12) хорошо известны [12, 13], и поэтому они здесь не будут приведены.[3] Заметим лишь, что это уравнение позволяет, в принципе, получить неограниченное число периодических по x решений, поэтому имеется возможность реализации в сверхрешетке большого числа поперечных волн (11). Важно, что параметр $s_\text{м}$, а значит, и частота волн ω (при заданном **k**) могут принимать только вполне определенные значения. Сверхрешетка выделяет, таким образом, спектр возможных значений частот собственных поперечных волн, электрический вектор $\mathcal{E}$ которых перпендикулярен η и z. В явном виде значения $s_\text{м}$ в зависимости от $q_\text{м}$ [а следовательно, и значения частот, согласно (6. 1) и (13)] приведены, например, в [13].

Обратимся еще к одному, допустимому системой (5), но необычному для однородной плазмы типу волн — поперечно-продольным волнам: $\mathcal{E}_\eta = \mathcal{E}_\eta(\eta, z)$, $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_z(\eta, z)$, $\mathcal{E}_\xi = 0$. Связь между пространственно-модулированными амплитудами этих волн $\mathcal{E}_\eta$ и $\mathcal{E}_z$ находится непосредственно из уравнения (5. 3):

$$\mathcal{E}_z(\eta, z) = \frac{1}{2}\left[e^{i\lambda_3\eta}\int e^{-i\lambda_3\eta}\,\frac{\partial\mathcal{E}_\eta}{\partial z}\,d\eta + e^{-i\lambda_3\eta}\int e^{i\lambda_3\eta}\,\frac{\partial\mathcal{E}_\eta}{\partial z}\,d\eta\right]. \tag{14}$$

После подстановки этого выражения в (5. 2) получим

---

[3] При концентрации электронов $n = 10^{16}$ см$^{-3}$ и параметрах сверхрешетки, приведенных в [10, 11], $q_\text{м}$ — малая величина ($q_\text{м} \simeq 10^{-2} \div 10^{-3}$), поэтому функции Матье быстро сходятся по $q_\text{м}$. Такого же порядка малости величина q, определенная выражением (18).

$$\frac{i\lambda_3}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[e^{i\lambda_3\eta}\int e^{-i\lambda_3\eta}\mathcal{E}_\eta d\eta - e^{-i\lambda_3\eta}\int e^{i\lambda_3\eta}\mathcal{E}_\eta d\eta\right] - (\lambda_3^2 + \gamma\cos\beta\eta)\,\mathcal{E}_\eta = 0. \tag{15}$$

Решение здесь можно искать в виде

$$\mathcal{E}_\eta = e^{ikz}\varphi(x), \tag{16}$$

где, как и выше, $x = \beta\eta/2$.

После некоторых преобразований, учитывая (16), можно перейти от интегро-дифференциального уравнения (15) к дифференциальному:

$$-(\lambda_3^2 + \gamma\cos 2x)\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 4\gamma\sin 2x\frac{d\varphi}{dx} + \left[\frac{4\lambda_3^2}{\beta^2}(k^2 - \lambda_3^2) - 4\gamma\frac{\lambda_3^2 - \beta^2}{\beta^2}\cos 2x\right]\varphi(x) = 0. \tag{17}$$

Удобно в (17) заменить размерные параметры на безразмерные (уменьшив при этом также и их число):

$$s = \frac{\lambda_3^2}{k^2},\quad q = \frac{\gamma}{k^2},\quad \alpha = \frac{k^2}{\beta^2}\frac{\lambda_3^2}{\lambda_3^2}, \tag{18}$$

после чего дифференциальное уравнение (17) примет вид

$$-(s + q\cos 2x)\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 4q\sin 2x + [4\alpha s(1-s) + 4q(1-s)\cos 2x]\,\varphi(x) = 0. \tag{19}$$

Уравнение (19), как и уравнение Матье, является уравнением на собственные значения. Тем самым оно определяет спектр собственных значений параметра s, т. е. спектр частот продольно-плазменных волн. Периодические по координатам решения этого уравнения задаются четырьмя типами сумм:

$$\begin{gathered}\varphi_1^{(r)}(x) = \sum_{l=0} A_l^{(r)}\cos 2lx,\quad \varphi_2^{(r)}(x) = \sum_{l=1} B_l^{(r)}\sin 2lx,\\ \varphi_3^{(r)}(x) = \sum_{l=0} C_l^{(r)}\cos(2l+1)x,\quad \varphi_4^{(r)}(x) = \sum_{l=0} D_l^{(r)}\sin(2l+1)x,\end{gathered} \tag{20}$$

где $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Подстановка каждой из этих сумм в (19) и последующее приравнивание выражений при одинаковых тригонометрических функциях и степенях q (в актуальных задачах $q \ll 1$) позволяют определить коэффициенты $A_l^{(r)}$, $B_l^{(r)}$, $C_l^{(r)}$, $D_l^{(r)}$ и параметр s, а значит, и частоту ω.[4]

В действительности нас будут интересовать не сами функции, а знания параметра s, т. е. спектр при заданном **k** частот собственных колебаний. Поэтому ограничимся записью только двух функций[5] из набора $\varphi_i^{(r)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$\varphi_1^{(0)} = 1 + \left[(\alpha-1)q - \frac{1}{16}(\alpha-1)(7\alpha^2 - 3\alpha + 4)q^3 + \ldots\right]\cos 2x +$$

$$+\left[-\frac{1}{8}(\alpha-1)(4-\alpha)q^2 + \ldots\right]\cos 4x \ldots,$$

$$\varphi_1^{(1)} = -\frac{1}{2}\alpha q + \left[1 + \frac{\alpha^3(5\alpha+9)}{12(1+\alpha)^2} + \ldots\right]\cos 2x + \left[-\frac{\alpha(3-\alpha)}{6(1+\alpha)}q + \ldots\right]\cos 4x + \ldots$$

Три остальные функции $\varphi_2^{(r)}$, $\varphi_3^{(r)}$, $\varphi_4^{(r)}$ имеют аналогичный вид ряда по степеням q, но не содержат постоянного (не зависящего от x) слагаемого, которое в каждой из функций $\varphi_1^{(r)}$ пропорционально q^r.

Спектр собственных частот продольно-поперечных волн задается следующими значениями параметра s.

У волн, описываемых функциями $\varphi_1^{(r)}$,

---

[4] Согласно (6), при рассматриваемых $\omega \gg \omega_p$ имеет место соотношение $\lambda_3^2 \approx \lambda_3^2$, поэтому параметр α можно считать практически не зависящим от ω.

[5] Нормировка функций $\varphi_1^{(r)}$ выбрана так, чтобы коэффициент при $q^0\cos 2rx$ равнялся единице.

$$s_1^{(0)} = 1 - \frac{1}{2}(\alpha - 1) q^2 + \frac{1}{32}(\alpha - 1)(7\alpha^2 - 3\alpha + 4) q^4 + \ldots,$$

$$s_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + \alpha) + \frac{1}{12}\alpha^2 \frac{5\alpha + 9}{(1 + \alpha)^2} q^2 + \ldots$$

и при $r \geqslant 2$

$$s_1^{(r)} = \frac{r^2 + \alpha}{\alpha} + \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{4r^2 - 1 + \alpha}{(4r^2 - 1)(r^2 + \alpha)^2} q^2 + \ldots \tag{21}$$

Здесь $s_1^{(r)}$ выражается рядом по четным степеням q. Коэффициенты ряда быстро уменьшаются с возрастанием степени q, поэтому (учитывая, что $q \ll 1$) достаточно ограничиться слагаемыми, пропорциональными q^2.

Функциям $\varphi_2^{(r)}$ соответствуют значения s, равные

$$s_2^{(1)} = \frac{1 + \alpha}{\alpha} + \frac{1}{12}\alpha^2 \frac{3 - \alpha}{(1 + \alpha)^2} q^2 + \ldots,$$

и при $r \geqslant 2$ с точностью до членов порядка q^2 значение $s_2^{(r)}$ такое же, как в (21).

У волн, описываемых функциями $\varphi_3^{(r)}$ и $\varphi_4^{(r)}$, имеет место равенство $s_3^{(r)}(q) = s_4^{(r)}(-q)$, поэтому далее приводятся только $s_3^{(r)}(q)$:

$$s_3^{(0)} = \frac{4\alpha + 1}{4\alpha} - \frac{2\alpha}{4\alpha + 1} q + \frac{2\alpha^2 (4 + 7\alpha - 4\alpha^2)}{(4\alpha + 1)^3} q^2 + \ldots,$$

$$s_3^{(1)} = \frac{9 + 4\alpha}{4\alpha} + \frac{\alpha^2 (8 + \alpha)}{(9 + 4\alpha)^2} q^2$$

и при $r \geqslant 2$

$$s_3^{(r)} = \frac{(2r + 1)^2 + 4\alpha}{4\alpha} + \frac{2\alpha^2 (4r^2 + 4r + \alpha)}{r(r + 1)[(2r + 1)^2 + 4\alpha]^2} q^2 + \ldots \tag{22}$$

Влияние каждого из рассмотренных типов собственных колебаний на физические процессы в полупроводнике со сверхрешеткой (1) будет определяться, естественно, конкретными условиями каждой задачи. Ясно, что приведенные результаты должны проявиться в особенностях свойств такого полупроводника, в частности в характере распространения и поглощения электромагнитных волн. Один из частных примеров таких особенностей был ранее рассмотрен в работе [11], где показано, что сверхрешетка (1) будет полностью отражать падающее на нее электромагнитное излучение определенной частоты.

Литература

[1] Силин А. П. // УФН. 1985. Т. 147. В. 3. С. 485—521.
[2] Bisanti P., Brodsky M. B., Felcher G. F. // Phys. Rev. B. 1987. V. 35. N 15. P. 7813—7819.
[3] Jain J. K. // Phys. Rev. B. 1985. V. 32. N 8. P. 5451—5458.
[4] Xue D. P., Tsai C. H. // Sol. St. Commun. 1985. V. 56. N 8. P. 651—654.
[5] Agranovich U. M., Kravtsov V. E. // Sol. St. Commun. 1985. V. 55. N 1. P. 799—802.
[6] Wu J., Wei J., Elliason G. // Sol. St. Commun. 1986. V. 58. N 11. P. 799—802.
[7] Белецкий Н. Н., Гасан Е. А., Яковенко В. М. // Письма ЖЭТФ. 1987. Т. 45. В. 12. С. 589—591.
[8] Ивченко Е. А., Кособукин В. А. // ФТП. 1988. Т. 22. В. 1. С. 24—30.
[9] Acher B. N. N. // Phys. Rev. B. 1987. V. 35. N 14. P. 7334—7337.
[10] Дыкман И. М. // ФТП. 1987. Т. 21. В. 9. С. 1612—1618.
[11] Дыкман И. М., Томчук П. М. // ФТП. 1988. Т. 22. В. 4. С. 768—772.
[12] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Курс современного анализа. Ч. 2. М., 1963. 515 с.
[13] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М., 1979. 830 с.

Институт полупроводников АН УССР
Киев

Получена 15.08.1988
Принята к печати 28.11.1988