# ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИИ НА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ВАЛЕНТНОЙ ЗОНЫ В ДВУМЕРНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ СИСТЕМАХ

**Кибис О. В.**

Получены аналитические выражения, определяющие энергетический спектр $2D$-дырок вблизи вершин подзон при произвольном виде тензора деформации и произвольном виде квантующего потенциала $2D$-системы. Из анализа полученных выражений следует, что деформация решетки, возникающая в гетероэпитаксиальных системах из-за решеточного несоответствия гетерослоев, оказывает на спектр дырок влияние, сравнимое по величине с влиянием квантующего потенциала, в связи с чем корректный расчет дырочного спектра во многих гетероэпитаксиальных системах требует учета деформации.

Поскольку многие специфические свойства двумерных ($2D$) систем определяются эффектами размерного квантования, большое число теоретических и экспериментальных работ посвящено исследованию энергетического спектра носителей заряда в двумерных подзонах. В последние годы появился ряд теоретических работ [1-4], посвященных исследованию энергетического спектра валентной зоны в деформированных $2D$-системах. Важность и актуальность такого теоретического исследования определяются тем, что многие реальные $2D$-системы (пленки на подложках, гетеропереходы) представляют собой контакт материалов с различными периодами решеток и различными коэффициентами термического расширения, в связи с чем эти системы исходно (без приложения внешних механических нагрузок) находятся в деформированном состоянии. Поэтому для интерпретации экспериментальных результатов, полученных при исследовании таких систем, необходимо знать, как изменяется энергетический спектр $2D$-носителей под действием деформации.

Расчет энергетического спектра валентной зоны в деформированных $2D$-системах — относительно трудная задача, так как при таком расчете наряду с особенностями конкретной $2D$-системы необходимо учитывать сложный характер валентной зоны в деформированных полупроводниках. В настоящее время существует два различных подхода к решению этой задачи. Первый состоит в строгом численном расчете спектра дырок с учетом всех особенностей валентной зоны для конкретной $2D$-системы [2-4]. Достоинством такого подхода является высокая точность полученных результатов, а к недостаткам относится очень большой объем вычислительной работы. Численный расчет не позволяет выяснить общие закономерности квантования валентной зоны, и для ответа на вопрос о характере спектра в другой $2D$-системе необходимо повторное проведение громоздкой процедуры вычислений при новых значениях параметров. Технические сложности, связанные с реализацией численного расчета, и недостаточно высокая информативность полученных результатов создают серьезные затруднения при анализе экспериментальных данных. Этих недостатков лишен аналитический подход [1]. Суть этого подхода заключается в том, что реальный квантующий потенциал $2D$-системы аппроксимируется простым модельным потенциалом (бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной ямой), после чего задача определения спектра сводится к решению секулярного уравнения системы дифференциальных уравнений и исследованию асимптотик полученного решения. Асимптотики для энергетического спектра вблизи вершин дырочных подзон представляют собой аналитические выражения, зависящие от ширины потенциальной ямы и параметров энергетического спектра валентной зоны трехмерного кристалла. К достоинствам аналитического подхода относятся сравнительная простота проводимых вычислений и высокая общность полученных результатов, позволяющая с помощью формальной замены параметров в одном и том же аналитическом выражении исследовать квантование валентной зоны в самых различных материалах. Очень часто полученных аналитических выражений для энергетического спектра вблизи вершин подзон оказывается вполне достаточно для анализа экспериментальных данных, так как во многих $2D$-системах реализуются условия квантового предела, когда дырочный газ заполняет состояния только вблизи вершины первой подзоны. Однако серьезным недостатком этого метода является относительно невысокая точность расчета, обусловленная модельной аппроксимацией квантующего потенциала $2D$-системы. В связи с этим представляется важным получение аналитических выражений, определяющих энергетический спектр вблизи вершин дырочных подзон в деформированных $2D$-системах при произвольном виде квантующего потенциала. Решению этой задачи посвящена данная работа.

Будем для определенности рассматривать спектр дырок в $2D$-системах с ориентацией поверхности (001), так как бóльшая часть известных в настоящее время экспериментальных исследований двумерного дырочного газа проведена для $2D$-систем именно с такой ориентацией. Отметим также, что все проводимые далее рассуждения достаточно общие и могут быть использованы при расчете дырочного спектра для $2D$-систем с любой ориентацией. Задача определения спектра дырок в деформированной $2D$-системе решается в рамках метода эффективной массы и заключается в нахождении собственных значений гамильтониана

$$\hat{\mathscr{H}} = \mathscr{H}_0 (u_{ij},\ k_x,\ k_y,\ \hat{k}_z) + V(z)\, I, \tag{1}$$

где $V(z)$ — квантующий потенциал $2D$-системы, а

$$\mathscr{H}_0 = \left(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma_2\right) I \sum_i k_i^2 + \left(a + \frac{5}{4} b\right) I \sum_i u_{ii} - \sum_i J_i^2 (2\gamma_2 k_i^2 + b u_{ii}) - \\ - \sum_{i \neq j} [J_i J_j] \left(2\gamma_3 k_i k_j + \frac{d}{\sqrt{3}} u_{ij}\right) \tag{2}$$

есть гамильтониан Латтинжера с деформационным слагаемым Бира—Пикуса, определяющий спектр валентной зоны в деформированных кубических полупроводниках [5]. Здесь $u_{ij}$ — компоненты тензора деформации, $\hat{k}_z = -i \frac{\partial}{\partial z}$ — оператор квантующейся компоненты квазиимпульса, $k_x$ и $k_y$ — компоненты квазиимпульса $\mathbf{k}$, лежащего в плоскости $2D$-слоя, $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ — параметры Латтинжера валентной зоны трехмерного кристалла, $a$, $b$, $d$ — константы деформационного потенциала валентной зоны трехмерного кристалла, $I$ — единичная матрица, $J_x$, $J_y$, $J_z$ — матрицы $4\times4$, соответствующие моменту $J=3/2$, а суммирование ведется по индексам $i$, $j=x$, $y$, $z$. Гамильтониан (1) можно формально записать в виде суммы двух слагаемых $\hat{\mathscr{H}}'$ и $\hat{\mathscr{H}}''$, где

$$\hat{\mathscr{H}}' = \left(\gamma_1 I + \frac{5}{2}\gamma_2 I - 2\gamma_2 J_z^2\right) \hat{k}_z^2 + \frac{b}{2}\left(\frac{5}{4} I - J_z^2\right)(2u_{zz} - u_{xx} - u_{yy}) + V(z)\, I, \quad \hat{\mathscr{H}}'' = \hat{\mathscr{H}} - \hat{\mathscr{H}}'. \tag{3}$$

В базисе функций с определенной проекцией момента $\mathbf{J}$ на ось квантования $z$ матрица гамильтониана $\hat{\mathscr{H}}'$ принимает диагональный вид и его собственные функции есть

$$\begin{Vmatrix} \psi_{hn} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_{hn} \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 \\ \psi_{ln} \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_{ln} \\ 0 \end{Vmatrix},$$

а собственные значения $\varepsilon'$ гамильтониана $\hat{\mathscr{H}}'$ определяются обычными уравнениями Шредингера

$$\mathscr{H}_h\psi_{hn}=\varepsilon'_{hn}\psi_{hn},\qquad \mathscr{H}_l\psi_{ln}=\varepsilon'_{ln}\psi_{ln},$$
$$\mathscr{H}_h=-(\gamma_1-2\gamma_2)\frac{d^2}{dz^2}+\varepsilon_u+V(z),\tag{4}$$
$$\mathscr{H}_l=-(\gamma_1+2\gamma_2)\frac{d^2}{dz^2}-\varepsilon_u+V(z),$$

где

$$\varepsilon_u=\frac{b}{2}(u_{xx}+u_{yy}-2u_{zz}),$$
$$\varepsilon'_{hn}=\varepsilon_{hn}(0)+\varepsilon_u,\tag{5}$$
$$\varepsilon'_{ln}=\varepsilon_{ln}(0)-\varepsilon_u,$$

$n$=1, 2, 3, ..., а $\varepsilon_{hn}(0)$ ($\varepsilon_{ln}(0)$) — энергия подзон тяжелых (легких) дырок в недеформированной $2D$-системе при $\mathbf{k}=0$. В дальнейшем ветви энергетического спектра дырок будем обозначать символами $hn$, $ln$, показывающими, в какой уровень энергии $\varepsilon_{hn}(0)$, $\varepsilon_{ln}(0)$ переходит данная ветвь при $\mathbf{k}=0$ и отсутствии деформации. При произвольной деформации, вообще говоря, $\varepsilon'_{hn}\neq\varepsilon'_{lm}$ и каждый уровень энергии гамильтониана $\hat{\mathscr{H}}'$ вырожден двухкратно, что соответствует Крамерсову вырождению подзон при $\mathbf{k}=0$. При расчете спектра вблизи вершин подзон будем рассматривать гамильтониан $\hat{\mathscr{H}}''$ как возмущение и, учитывая двухкратное вырождение уровней энергии «невозмущенного» гамильтониана $\hat{\mathscr{H}}'$, воспользуемся известной теорией возмущений для вырожденного спектра. Во втором порядке теории возмущений энергетический спектр дырок в подзоне $hn$ определяется выражением

$$\begin{aligned}\varepsilon_{hn}(\mathbf{k})={}&\varepsilon_{hn}(0)+a\Big(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\Big)+\frac{b}{2}(u_{xx}+u_{yy}-2u_{zz})+\frac{\hbar^2}{2m_{hn}}(k_x^2+k_y^2)+\\&+\left[\left(\sqrt{3}\,\gamma_2(k_x^2-k_y^2)+\frac{\sqrt{3}}{2}b(u_{xx}-u_{yy})\right)^2+d^2(u_{xz}^2+u_{yz}^2)+(2\sqrt{3}\,\gamma_3k_xk_y+du_{xy})^2\right]B_{hn}\pm\\&\pm4\sqrt{3}\,\gamma_3C_{hn}\Bigg[d^2(k_xu_{yz}-k_yu_{xz})^2+(k_x^2+k_y^2)\left\{\left(\sqrt{3}\,\gamma_2(k_x^2-k_y^2)+\frac{\sqrt{3}}{2}b(u_{xx}-u_{yy})\right)^2+\right.\\&\left.+(2\sqrt{3}\,\gamma_3k_xk_y+du_{xy})^2\right\}\Bigg]^{1/2},\end{aligned}\tag{6}$$

где эффективная масса дырок в подзоне $hn$ определяется соотношением

$$\frac{\hbar^2}{2m_{hn}}=\gamma_1+\gamma_2+12\gamma_3^2\sum_m\frac{|\langle\psi_{hn}|\hat{k}_z|\psi_{lm}\rangle|^2}{\Delta\varepsilon_{nm}},\tag{7}$$

а параметры двумерного спектра дырок

$$B_{hn}=\sum_m\frac{|\langle\psi_{hn}|\psi_{lm}\rangle|^2}{\Delta\varepsilon_{nm}},$$
$$C_{hn}=\sum_m\frac{i\langle\psi_{hn}|\hat{k}_z|\psi_{lm}\rangle\langle\psi_{lm}|\psi_{hn}\rangle}{\Delta\varepsilon_{nm}},\tag{8}$$
$$\Delta\varepsilon_{nm}=\varepsilon'_{hn}-\varepsilon'_{lm}=\varepsilon_{hn}(0)-\varepsilon_{lm}(0)+2\varepsilon_u.$$

Границы применимости выражения (6) определяются обычным критерием применимости теории возмущений $|\mathscr{H}''_{nm}/\Delta\varepsilon_{nm}|\ll1$, который при явной форме записи матрицы $\mathscr{H}''_{nm}$ принимает вид

$$\left|\frac{2\sqrt{3}\,\gamma_3(k_y+ik_x)\langle\psi_{hn}|\hat{k}_z|\psi_{lm}\rangle+d(u_{yz}+iu_{xz})\langle\psi_{hn}|\psi_{lm}\rangle}{\Delta\varepsilon_{nm}}\right|\ll1,$$
$$\left|\frac{\left(\sqrt{3}\,\gamma_2(k_x^2-k_y^2)-2i\sqrt{3}\,\gamma_3k_xk_y+\frac{\sqrt{3}}{2}b(u_{xx}-u_{yy})-idu_{xy}\right)\langle\psi_{hn}|\psi_{lm}\rangle}{\Delta\varepsilon_{nm}}\right|\ll1.\tag{9}$$

Знаки «$\pm$» в (6) соответствуют двум ветвям подзоны $hn$ расщепленной по спину при $\mathbf{k}\neq 0$. Из (6) непосредственно следует, что расщепление подзон при $\mathbf{k}\neq 0$ имеет место лишь для несимметричного квантующего потенциала $V(z)\neq V(-z)$. Это связано с тем, что для симметричного потенциала волновые функции $\psi_{hn}(z)$, $\psi_{lm}(z)$ обладают определенной четностью и $C_{hn}=0$, так как при одинаковой четности $\psi_{hn}(z)$ и $\psi_{lm}(z)$ матричный элемент $\langle\psi_{hn}\mid\hat{k}_z\mid\psi_{lm}\rangle=0$, а при разной четности $\langle\psi_{hn}\mid\psi_{lm}\rangle=0$. Отметим, что в недеформированной системе величина спинового расщепления подзоны $\sim k^3$, тогда как механические напряжения, которым соответствуют значения компонент тензора деформации $u_{xx}-u_{yy}\neq 0$, $u_{xz}\neq 0$, $u_{yz}\neq 0$, $u_{xy}\neq 0$, приводят к появлению в (6) линейных по $k$ членов. Наибольший интерес представляет анализ энергетического спектра при деформации, возникающей в гетероэпитаксиальных $2D$-системах из-за решеточного несоответствия гетерослоев. Для гетероструктур, изготовленных из полупроводниковых материалов $\mathrm{A^{III}B^{V}}$, такая деформация соответствует изотропному в плоскости $2D$-слоя сжатию или растяжению и описывается диагональным в главных кристаллографических осях тензором с отличными от нуля компонентами $u_{zz}$ и $u_{xx}=u_{yy}$. Для описания такой деформации удобно ввести параметр $u_0=u_{zz}-u_{xx}=u_{zz}-u_{yy}$ ($u_0>0$ соответствует сжатию в плоскости $2D$-слоя, $u_0<0$ — растяжению). Необходимо подчеркнуть, что разбиение гамильтониана (1) на сумму $\hat{\mathscr{H}}'$ и $\hat{\mathscr{H}}''$ было проведено таким образом, чтобы при изотропном в плоскости $2D$-слоя сжатии (растяжении) матричные элементы $\hat{\mathscr{H}}''_{nm}$ не содержали деформационных членов, в связи с чем критерий (9) не требует малости деформации $u_0$, т. е. при любой деформации $u_0$ (когда $\Delta\varepsilon_{nm}\neq 0$) имеется область вблизи $\mathbf{k}=0$, где выполняется условие (9) и соответственно применимо выражение (6) для энергетического спектра дырок. При некоторых значениях $u_0$ имеем $\Delta\varepsilon_{nm}=0$, что соответствует касанию подзон $hn$ и $lm$ в точке $\mathbf{k}=0$, т. е. при этом касании уровень энергии $\varepsilon'_{hn}=\varepsilon'_{lm}$ гамильтониана вырожден четырехкратно (случайное вырождение, не связанное с симметрией системы). Обобщая вышепроведенные рассуждения на случай четырехкратного вырождения уровней энергии невозмущенного гамильтониана $\hat{\mathscr{H}}'$, получим выражение для энергетического спектра подзон $hn$ и $lm$ вблизи точки касания

$$\varepsilon(\mathbf{k})=\pm\beta_{nm}k, \tag{10}$$

где $\beta_{nm}=2\sqrt{3}\gamma_3\,|\langle\psi_{hn}\mid\hat{k}_z\mid\psi_{lm}\rangle|$. Отсюда следует, что касание подзон может приводить к появлению в энергетическом спектре линейных по $k$ членов. Согласно (10), при отсутствии центра инверсии у квантующего потенциала $V(z)$ линейные члены появляются при касании любых двух подзон $hn$ и $lm$, а в случае симметричного потенциала $V(z)$ линейные по $k$ члены появляются при касании подзон $hn$ и $lm$ с номерами $n$ и $m$, обладающими различной четностью. Выражения (6)—(10) были получены для подзоны $hn$. Аналогичные выражения для $ln$ получаются из (6)—(10) формальной заменой $h\leftrightarrow l$, $\gamma_2\rightarrow-\gamma_2$, $b\rightarrow -b$.

В реальных $2D$-системах характерное расстояние между первыми дырочными подзонами при отсутствии деформации составляет величину $\leqslant 10$ мэВ, а константа деформационного потенциала $b\sim 1$ эВ. Поэтому уже $u_0\sim 10^{-3}$ приводит к изменению межподзонного расстояния того же порядка, что и само расстояние, в связи с чем параметры спектра (7), (8) испытывают заметное изменение по сравнению со своими значениями в недеформированной $2D$-системе. В частности, при произвольном виде $V(z)$ сохраняет свою силу вывод о возможности смены знака эффективной массы (7), сделанный в [1] при анализе квантования в модели бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной ямы. Даже для хорошо согласованных по параметрам решетки гетероструктур $\mathrm{GaAs-Al_xGa_{1-x}As}$ несоответствие периодов решеток составляет $\sim 10^{-3}$, что приводит к возникновению деформации $u_0\sim 10^{-3}$ [6]. Отсюда следует, что корректный расчет спектра дырок в гетероструктурах должен учитывать деформационные эффекты, поскольку деформации $u_0\sim 10^{-3}$ оказывают на спектр влияние, сравнимое с влиянием квантующего потенциала $2D$-системы. Во многих $2D$-системах дырочный газ заполняет состояния только вблизи вершины первой подзоны $h1$. Суммируя полученные результаты, отметим, что деформация $u_0<0$

($u_0 > 0$) приводит к уменьшению (увеличению) расстояния между $h1$ и другими подзонами, увеличению (уменьшению) эффективной массы дырок вблизи вершины подзоны $h1$, увеличению (уменьшению) непараболичности подзоны $h1$, увеличению (уменьшению) спинового расщепления подзоны $h1$ в несимметричном потенциале $V(z)$.

При очень больших расстояниях между $h1$ и другими подзонами (больших деформациях сжатия в плоскости $2D$-слоя) можно пренебречь вкладом в спектр $h1$ матричных элементов $\hat{\mathscr{H}}''$, «связывающих» $h1$ с другими подзонами. Согласно (6), (7), энергетический спектр $h1$ при этом будет параболичен, причем величина эффективной массы $\hbar^2/2m_{h1}=\gamma_1+\gamma_2$ и не зависит от квантующего потенциала. Очень большие деформации сжатия $u_0 \sim 10^{-2}$ возникают в слоях $In_xGa_{1-x}As$ в гетероструктурах $GaAs$—$In_xGa_{1-x}As$ [7]. В работе [8] было обнаружено, что эффективная масса дырок в гетероструктуре $GaAs$—$In_{0.2}Ga_{0.8}As$ есть $m^*/m_0=0.14$. Сравнивая эту величину с эффективной массой тяжелых дырок $\frac{m_h}{m_0}=\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{1}{\gamma_1-2\gamma_2}=0.35$ и эффективной массой легких дырок $\frac{m_l}{m_0}=\frac{\hbar^2}{2m_0}\times$ $\times\frac{1}{\gamma_1+2\gamma_2}=0.09$ в трехмерном кристалле $In_{0.2}Ga_{0.8}As$, авторы [8] предположили, что под действием деформации решеточного несоответствия первая подзона («тяжелых» дырок $h1$) и вторая подзона («легких» дырок $l1$) меняются местами, в результате чего во всех процессах участвуют легкие дырки. Из проведенного выше анализа следует, что под действием деформации сжатия происходит не смена типа первой подзоны, а, напротив, увеличение расстояния между подзоной $h1$ и другими подзонами, сопровождающееся уменьшением эффективной массы $m_{h1}$. Благодаря очень большим деформациям сжатия, реализующимся в рассматриваемой гетеросистеме, можно положить $\frac{m_{h1}}{m_0}\approx\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{1}{\gamma_1+\gamma_2}=0.11$, что находится в разумном соответствии с экспериментально наблюдавшимся значением эффективной массы. Большие механические напряжения сжатия возникают также в слоях кремния на сапфире [9]. Пленки кремния с ориентацией (001) выращивают на подложках сапфира ($Al_2O_3$) с ориентацией ($\bar{1}012$). Особенностью этой эпитаксиальной системы является то обстоятельство, что коэффициент термического расширения кремния изотропен в плоскости (001), тогда как коэффициент термического расширения $Al_2O_3$ обладает анизотропией в плоскости ($\bar{1}012$). Это приводит к возникновению деформации слоя кремния вида

$$u_{xx}=u_{yy}\neq 0, \quad u_{zz}\neq 0, \quad u_{xy}=u_{xz}=u_{yz}=0,$$

где

$$x \parallel [100]\,\mathrm{Si} \parallel [10\bar{1}1]\,\mathrm{Al_2O_3}, \quad y \parallel [010]\,\mathrm{Si} \parallel [1\bar{2}10]\,\mathrm{Al_2O_3}.$$

Согласно (6), наличие указанной деформации приводит к появлению линейных по $k$ членов в законе дисперсии $2D$-дырок. В связи с этим интересно рассмотреть результаты экспериментов [10], где исследовалось спиновое расщепление дырочных подзон при $\mathbf{k}\neq 0$ в инверсионных каналах на поверхности кремния, выращенного на сапфире. Проведенный в [11] анализ экспериментальных данных [10] показал, что хорошее согласие с экспериментом можно получить, если предположить наличие в спектре подзоны $h1$ линейных по $k$ членов: $\varepsilon_{h1}(\mathbf{k})=Ak^2\pm\alpha k$, где величина линейных членов $\alpha\approx 3\cdot 10^{-10}$ эВ·см. Авторы [11] предположили, что возникновение линейных членов в законе дисперсии дырок обусловлено нарушением приближения эффективной массы вблизи резкой границы $Si$—$SiO_2$. Если же предположить, что возникновение линейных членов обусловлено деформацией, то, согласно (6),

$$\alpha = 6\gamma_3 b\,(u_{xx}-u_{yy})\sum_m \frac{i\,\langle\psi_{h1}\,|\,\hat{k}_z\,|\,\psi_{lm}\rangle\langle\psi_{lm}\,|\,\psi_{h1}\rangle}{\Delta\varepsilon_{1m}}. \tag{11}$$

Типичное расстояние между первыми дырочными подзонами в инверсионных каналах на поверхности кремния $\sim 10$ мэВ, матричный элемент $\langle\psi_{h1}\,|\,\hat{k}_z\,|\,\psi_{l1}\rangle\sim$ $\sim 1/d$, где $d\simeq 50$ Å — характерная толщина инверсионного канала, а деформация $u_{xx}-u_{yy}\simeq 0.6\cdot 10^{-3}$ [9], что дает значение $\alpha\sim 10^{-10}$ эВ·см. Таким образом, учет деформации кремния на сапфире дает величину линейных по $k$ членов, согласующуюся с определенной из эксперимента. Изучение свойств $2D$-дырок в слоях кремния на сапфире было продолжено в работе [12], где в полном соответствии с рассматриваемой теорией наблюдались уменьшение эффективной массы и уменьшение непараболичности первой подзоны по сравнению с результатами аналогичных исследований в обычных МДП структурах.

Полученные в настоящей работе выражения позволяют исследовать изменение дырочного спектра под действием деформации при наиболее общем виде квантующего потенциала $V(z)$. Для нахождения уровней энергии $\varepsilon_{jn}(0)$ и волновых функций $\psi_{jn}(z)$ ($j=h, l$), определяющих параметры спектра (7), (8), необходимо решить обычные уравнения Шредингера (4), что, конечно же, легче, нежели точное решение системы уравнений эффективной массы с гамильтонианом (1). Так, например, при аппроксимации $V(z)$ бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной ямой получаем из (4)

$$\varepsilon_{hn}(0)=\frac{(\gamma_1-2\gamma_2)\,\pi^2 n^2}{L^2},\quad \varepsilon_{ln}(0)=\frac{(\gamma_1+2\gamma_2)\,\pi^2 n^2}{L^2},\quad \psi_{hn}(z)=\psi_{ln}(z)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi n z}{L}\right).$$

После подстановки этих уровней энергии и волновых функций в (7), (8) выражение для спектра (6) становится адекватным ранее полученным асимптотикам точного решения системы уравнений эффективной массы в модели бесконечно глубокой ямы [1]. Полученные в настоящей работе соотношения могут быть использованы для анализа экспериментальных фактов и при отсутствии точной информации о виде потенциала $V(z)$, когда нельзя решить уравнения (4). При этом параметры $2D$-спектра дырок (7), (8) должны определяться из эксперимента аналогично тому, как определяются из эксперимента параметры валентной зоны трехмерных полупроводниковых кристаллов.

## Список литературы


[1] Кибис О. В., Шварцман Л. Д. // Поверхность. Физика, химия, механика. 1985. № 7. С. 119—123.
[2] Sanders G. D., Chang Y. C. // Phys. Rev. B. 1985. V. 32. N 6. P. 4282—4285.
[3] Andreani L. C., Pasquarello A., Bassani F. // Phys. Rev. B. 1987. V. 36. B 11. P. 5887—5894.
[4] Platero G., Altarelli M. // Phys. Rev. B. 1987. V. 36. N 12. P. 6591—6595.
[5] Бир Г. Л., Пикус Г. Е. Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках. М., 1972. 584 с.
[6] Кейси Х., Паниш М. Лазеры на гетероструктурах. Т. 2. Материалы. Рабочие характеристики. М., 1981. 354 с.
[7] Osborn G. C. // Phys. Rev. B. 1983. V. 27. N 8. P. 5126—5128.
[8] Schirber J. E., Fritz I. J., Dawson L. R. // Appl. Phys. Lett. 1985. V. 46. N 2. P. 187—189.
[9] Hughes A. J., Thorsen A. C. // J. Appl. Phys. 1973. V. 44. N 5. P. 2304—2310.
[10] Gusev G. M., Kvon Z. D., Ovsyuk V. N. // J. Phys. C. 1984. V. 17. N 26. P. L683—L688.
[11] Бычков Ю. А., Рашба Э. И. // УФН. 1985. Т. 146. В. 3. С. 531—534.
[12] Гусев Г. М., Квон З. Д., Ольшанецкий Е. Б., Черемных П. А. // ФТТ. 1988. Т. 30. В. 2. С. 368—372.



Новосибирский электротехнический институт



Получена 24.06.1988
Принята к печати 27.12.1988