

## ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ТРАНСПОРТ И ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ В СВЕРХРЕШЕТКАХ

Ларкин И. А.

Рассмотрены горячие электроны на нижнем уровне квантовой ямы, образовавшиеся при туннельной эмиссии из одного слоя сверхрешетки в другой или под воздействием монохроматического излучения. Основное внимание обращено на случай припороговой накачки, когда начальная энергия электронов  $\epsilon_0$  близка к пороговой энергии испускания оптических фононов  $\hbar\Omega_0$ . Найдена функция распределения электронов по энергии в зависимости от интенсивности и места накачки в предположении, что релаксационные процессы обусловлены электрон-электронными столкновениями и испусканием оптических фононов. Решается уравнение баланса, что позволяет определить электронную температуру, устанавливающуюся ниже места накачки и порога испускания оптических фононов.

*Введение.* Двумерный электронный газ в сверхрешетках и квантовых ямах интенсивно изучался в последние годы как теоретически [1-8], так и экспериментально [9-13]. Релаксация горячих электронов в этих структурах существенно отличается от их релаксации в обычных трехмерных полупроводниках, так как рассеяние двумерных электронов друг на друге не является малоугловым. Вследствие этого интеграл столкновений, описывающий в кинетическом уравнении электрон-электронное ( $e-e$ ) рассеяние, не приводится к дифференциальной форме, и для нахождения функции распределения электронов по энергии требуется решать интегральное уравнение [5]. Кроме того, следует учитывать, что испускание оптических фононов вызывает существенное уменьшение числа электронов с энергиями выше порога испускания, равного  $\hbar\Omega_0$  [5, 6]. Дополнительные сложности возникают в том случае, когда фотовозбужденные электроны забрасываются в точку  $\epsilon_0$  вблизи порога  $|\epsilon_0 - \hbar\Omega_0| \ll \hbar\Omega_0$ . Для трехмерного случая эта задача была решена в работе [14]. В двумерном случае такая задача решалась в [8]. В этой работе использовался прием, который позволяет выводить уравнение баланса электронной температуры прямо из кинетического уравнения без вычисления функции распределения. В данной работе детально вычисляется функция распределения, затем для уравнения баланса получается ответ, совпадающий с приведенным в [8]. Наконец, решается уравнение баланса.

В сверхрешетках роль оптической накачки может играть туннельная инжекция из одного слоя в другой. Именно этот процесс был реализован в [9, 10]. Функция распределения изучалась при помощи люминесценции, причем при обработке экспериментальных данных предполагалось, что пик функции распределения имеет Лоренцеву форму, и его ширина определялась соотношением времени  $e-e$ -рассеяния и времени рекомбинации. В настоящей работе будет вычислена форма пика функции распределения электронов в районе места накачки, причем будет учитываться влияние оптических фононов на форму пика.

Постановка задачи во многом соответствует таковой в [5]. Расстояние между нижайшими уровнями в яме  $E_2 - E_1 \gg \hbar\Omega_0$ , электронная температура  $T_e \ll \hbar\Omega_0$ , а точка накачки  $\epsilon_0$  такова, что  $|\epsilon_0 - \hbar\Omega_0| \ll \hbar\Omega_0$ . Если пренебречь различием упругих модулей и плотностей GaAs и AlGaAs, то операторы электрон-фононного взаимодействия такие же, как в трехмерном случае. Их матричные элементы вычисляются на волновых функциях, соответствующих движению вдоль стенок квантовой ямы. Расчет времени испускания оптических фононов с учетом

разных механических свойств GaAs и AlGaAs был проделан в [4]. Приход новых носителей определяет приход энергии  $\epsilon_0$  в систему свободных электронов, а испускание оптического фонона — потерю энергии  $\hbar\Omega_0$ . Два этих процесса определяют уравнение энергетического баланса. Решение его позволяет найти электронную температуру, которая входила в работы [5, 14] как свободный параметр.

## 1. Кинетическое уравнение

Кинетическое уравнение для функции распределения электронов по энергии при стационарном возбуждении имеет вид [14]

$$S_L + G + C_{ee} + R = 0. \quad (1)$$

В этом уравнении  $G(\epsilon)$  — член, описывающий генерацию электронов,  $R(\epsilon)$  — их рекомбинацию, а  $C_{ee}(f, f | \epsilon)$  — рассеяние электронов друг на друге. Слагаемое  $S_L = S_a + S_0$  ответственно за рассеяние на решетке, обусловленное акустическими  $S_a$  и оптическими  $S_0$  фононами. Будем считать, что температура решетки  $T_L \ll T_e, \hbar\Omega_0$ , поэтому при описании 0-рассеяния можно пренебречь вынужденными испусканием и поглощением оптических фононов, а концентрация электронов такова, что  $S_a \ll C_{ee}(\epsilon)$  при  $\epsilon \geq T_e$ . Будем также предполагать, что время рекомбинации  $\tau_R$  много больше характерного времени электрон-электронного рассеяния  $\tau_{ee}(T_e)$  и времени спонтанного испускания оптического фонона  $\tau_0$ . В дальнейшем (при выводе уравнения энергетического баланса) предположим, что уход электронов из квантовой ямы не влияет на баланс энергии и функцию распределения электронов. Таким образом, в низшем приближении в уравнении (1) можно пренебречь членами  $R$  и  $S_a$ . При такой процедуре число носителей  $N$  и температуру  $T_e$  следует считать заданными, а затем определить их из уравнений баланса числа частиц и энергии. В силу условий  $\hbar\Omega_0 \gg T_e$  и  $S_a \ll C_{ee}(\epsilon)$  при  $\epsilon \sim T_e$  почти все электроны находятся в пассивной области (ниже порога испускания оптических фононов), а их распределение близко к максвелловскому:

$$f_T(\epsilon) \propto \exp(-\epsilon/T_e). \quad (2)$$

Поскольку электроны с энергиями  $\epsilon \sim \hbar\Omega_0$  составляют лишь малую долю всех электронов, при вычислении функционала  $C_{ee}(f, f | \epsilon)$  надо учитывать лишь их столкновения с основной массой максвелловских электронов (а не друг с другом). В результате уравнение (1) сведется к линейному интегральному уравнению со свободным членом  $G(\epsilon)$ . Поэтому для изучения отклика функции распределения на генерацию достаточно решить уравнение (1) в предположении  $G(\epsilon) = G_0 \delta(\epsilon - \epsilon_0)$ . Для произвольного  $G_e(\epsilon)$  решение будет равно свертке по  $d\epsilon_0$  соответствующих откликов с весом  $G(\epsilon - \epsilon_0)/G_0$ .

## 2. Интегральное уравнение и функция распределения

Интеграл столкновений  $C_{ee}(\epsilon)$  из уравнения (1) имеет вид

$$C_{ee} = \int_0^{\infty} d\epsilon' g(\epsilon') [f(\epsilon') W(\epsilon' \rightarrow \epsilon) - f(\epsilon) W(\epsilon \rightarrow \epsilon')]. \quad (3)$$

Здесь  $g(\epsilon') = L^2 m^* / 2\pi \hbar^2$  — двумерная плотность состояний в области площадью  $L^2$ ,  $W(\epsilon \rightarrow \epsilon')$  — вероятность перехода в единицу времени от энергии  $\epsilon$  к  $\epsilon'$ . Вблизи порога (т. е. когда  $|\epsilon - \hbar\Omega_0|, |\epsilon' - \hbar\Omega_0| \ll \hbar\Omega_0$ )

$$W(\epsilon \rightarrow \epsilon') = \frac{1}{L^2 \tau_{ee}} \frac{2\hbar^2}{m^* \hbar \Omega_0} \left( \frac{T_e}{\hbar \Omega_0} \right)^{-3/2} K \left( \frac{\epsilon' - \epsilon}{T_e} \right), \quad (4)$$

$$\tau_{ee} = \frac{m^* \Omega_0}{\pi^2 E_B N},$$

где  $E_B$  — боровская энергия в GaAs, а  $N$  — двумерная плотность электронного газа [5]. Функция  $K(\omega)$  [ $\omega = (\varepsilon' - \varepsilon)/T_e$ ] при указанных выше ограничениях имеет вид

$$K(\omega) = \pi^{-1/2} e^{\omega/2} |\omega|^{-1} K_1(|\omega|/2), \quad (5)$$

где  $K_1$  — функция Макдональда.

Испусканию оптических фононов соответствует столкновительный член

$$S_L(\varepsilon) = -f(\varepsilon) \theta(\varepsilon - \hbar\Omega_0)/\tau_0. \quad (6)$$

Накачка  $G(\varepsilon)$  будет иметь  $\delta$ -образный вид

$$G(\varepsilon) = G_0 \delta(\varepsilon - \varepsilon_0). \quad (7)$$

Функцию распределения представим в виде

$$f(\varepsilon) = A [e^{-t} + \varphi(t)], \quad A = f_T(\hbar\Omega_0) = \frac{4\pi N \hbar^2}{2m^* T_e} \exp\left(-\frac{\hbar\Omega_0}{T_e}\right), \quad (8)$$

$$t = [(\varepsilon - \hbar\Omega_0)/T_e],$$

$\varphi(t)$  — поправка к максвелловской функции распределения, обусловленная туннельной инжекцией и испусканием оптических фононов. Предположим (и это подтвердится в дальнейшем), что  $|\varphi(t)/\varphi(0)| \ll 1$  при  $|t| \gg 1$ , поэтому область интегрирования по переменной  $t'$  при подстановке (8) в (3)–(5) можно распространить вниз до  $-\infty$ . Подставляя (3)–(8) в (1) и проводя обезразмеривание, аналогичное [5], получим

$$\lambda \pi^{-1/2} \hat{K} \varphi(t) + \theta(t) [e^{-t} + \varphi(t)] = \frac{I_0 \tau_0}{L^2} \delta(t - t_0) \exp\left(\frac{\hbar\Omega_0}{T_e}\right), \quad (9)$$

где  $\lambda$  — безразмерный параметр:

$$\lambda = \pi^{-1/2} \frac{\tau_0}{\tau_{ee}} \left(\frac{T_e}{\hbar\Omega_0}\right)^{-1/2}, \quad (10)$$

определяющий основной способ релаксации электрона вблизи порога испускания оптического фонона,  $t_0$  — безразмерная переменная:  $t_0 = (\varepsilon_0 - \hbar\Omega_0)/T_e$ ,  $I_0$  — интенсивность накачки, число частиц с энергией  $\varepsilon_0$ , возникающих в единицу времени на площади  $L^2$ :

$$g(\varepsilon_0) I_0 = G_0, \quad (11)$$

$\hat{K}$  — линейный интегральный оператор с разностным ядром  $K(\omega)$ , определенным в (5),

$$\hat{K} \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} dt' [\varphi(t) K(t-t') - \varphi(t') K(t-t')]. \quad (12)$$

Применяя к уравнению (9) стандартную процедуру Винера—Хопфа, получим следующее уравнение [5, 15]:

$$\psi^+(z) \left[ 1 + \frac{1}{\lambda(1-z^2)^{1/2}} \right] = \frac{-2}{\lambda(1+z)(1-z^2)^{1/2}} + \frac{a \exp(-z t_0/2)}{(1-z^2)^{1/2}} - \psi^-(z). \quad (13)$$

Здесь  $\psi^+$  и  $\psi^-$  — результат двустороннего преобразования Лапласа для функции  $\varphi$  выше и ниже порога соответственно. Для симметрии несколько изменен параметр преобразования  $z = 2z' - 1$ , что необходимо учесть при обратном преобразовании:

$$\psi^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{\pm}(t) e^{-tz'} dt. \quad \text{Параметр } a \text{ равен}$$

$$a = [I_0 \tau_0 / (\lambda N L^2)] \exp(t_0/2 + \hbar\Omega_0/T_e). \quad (14)$$

Для функций  $\psi^+$  и  $\psi^-$  можно выписать в квадратурах решения в общем виде, однако исследование предельных случаев при таком подходе затруднительно. Так же как в работе [5], мы будем интересоваться двумя предельными случаями:  $\lambda \ll 1$  и  $\lambda \gg 1$ . Первое слагаемое справа в (13) соответствует обеднению функ-

при распределении выше порога, это явление было исследовано в [5]. В силу линейности уравнения нам достаточно рассмотреть результат отклика  $\psi^+$  и  $\psi^-$  на второе слагаемое.

Рассмотрим предельный случай  $\lambda \gg 1$ , что соответствует слабому испусканию оптических фононов. В первом приближении слагаемыми с коэффициентом  $1/\lambda$  можно пренебречь. Фактически это означает, что мы пренебрегли испусканием фононов в (9), поэтому нет смысла разделять образы функции распределения на  $\psi^+$  и  $\psi^-$ . Уравнение (9) тогда решается простым обращением  $\psi^-$ . В результате получим

$$\varphi = \frac{ae^{-t/2}}{\pi} K_0\left(\frac{|t-t_0|}{2}\right). \quad (15)$$

Здесь  $K_0$  — функция Макдональда. Это выражение в первом приближении универсально и не зависит от места накачки, однако в том случае, если накачка идет существенно выше порога, вероятностью испускания оптического фонона полностью пренебречь нельзя. В этом случае в том же приближении по  $1/\lambda$  можно считать, что фонон может испускаться всегда, и не писать  $\theta$ -функцию в уравнении (9). Решение такого интегрального уравнения имеет вид

$$\varphi = a \frac{e^{-t/2}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\exp[(t-t_0)z/2]}{1/\lambda + (1-z^2)^{1/2}} dz. \quad (16)$$

При больших  $t_0 - t$  интеграл можно вычислить методом перевала:

$$\varphi(t) = \frac{a}{\pi} \left\{ \frac{\pi^{1/2}}{(t_0 - t)^{1/2}} - \frac{\pi}{2\lambda} \exp[(t_0 - t)/4\lambda^2] [1 - \Phi((t_0 - t)^{1/2}/2\lambda)] \right\}, \quad t < t_0, \quad t_0 - t \gg 1, \quad (17)$$

где  $\Phi$  — интеграл вероятности.

Перейдем к рассмотрению случая  $\lambda \ll 1$ . Если накачка идет выше порога, то формулы (16) и (17) остаются справедливыми для функции распределения выше порога при  $t, t_0 \gg \lambda$ . Дело в том, что тогда в левой части уравнения (13) наибольшим слагаемым будет выражение

$$\psi^+/\lambda(1-z^2)^{1/2}, \quad (18)$$

а учет  $\psi^-$  обеспечит поправку лишь в следующем приближении по  $\lambda$ . Поэтому можно считать, что подпороговые электроны не влияют на надпороговые, и опять решать уравнение (9) без учета порога испускания. Если же накачка идет ниже порога, то для нахождения функции распределения следует воспользоваться процедурой Винера—Хопфа.

При этом удобно сразу раскладывать по параметру  $\lambda$  уравнение (13), подставляя  $\psi^+$  и  $\psi^-$  в виде

$$\psi^+ = \psi_0^+ + \lambda\psi_1^+ + \dots \quad (19a)$$

$$\psi^- = \psi_0^- + \lambda\psi_1^- + \dots \quad (19b)$$

В результате получим

$$\psi_0^+ = -a\lambda \frac{(1+z)^{1/2}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\exp(t_0\zeta/2)}{(1+\zeta)^{1/2}(\zeta-z)} d\zeta = a\lambda \exp(-t_0z/2) [1 - \Phi((1+z)|t_0/2|)^{1/2}], \quad (20)$$

$$\psi_0^- = a(1-z^2)^{-1/2} \exp(-t_0z/2) \Phi[(1+z)|t_0|^{-1/2}].$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа, получим для функции распределения

$$\psi_0^+(t) = a\lambda/\pi \exp(-t+t_0/2) (|t_0|/t)^{1/2} 2/t + |t_0|, \quad t_0 < 0, \quad t \gg \lambda, \quad (21a)$$

$$\psi_0^-(t) = \frac{e^{-t/2}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{(t-t_0)z/2}}{(1-z^2)^{1/2}} \Phi[(z+1)|t_0|^{1/2}] dz. \quad (21b)$$

Интеграл (21б) не выражается через общепринятые специальные функции. При  $|t - t_0| \ll 1$

$$\varphi_0^-(t) = \frac{ae^{-t/2}}{\pi} K_0(|t - t_0|/2),$$

при  $t = 0$

$$\varphi_0^- = 0.$$

При  $|t_0| \gg 1$

$$\varphi_0^- = \frac{ae^{-t/2}}{\pi} K_0(|t - t_0|/2) + \frac{a}{(\pi t_0)^{1/2}} e^{-t/2} [1 - \Phi(|t|^{1/2})]. \quad (22)$$

Отметим, что при  $|t| \ll t_0$  выражение (22) совпадает с точностью до коэффициента с функцией распределения, вычисленной в [5]. При  $|t| \gg 1$  или  $|t| \gg |t_0|$

$$\varphi_0^- = (a/\pi) e^{t/2} K_0(|t - t_0|) \Phi(|t|^{1/2}). \quad (23)$$

Отметим еще, что при  $t < t_0$ ,  $|t - t_0| \gg 1$

$$\varphi_0^-(t) = a\Phi(|t|^{1/2}) [\pi(t, -t)]^{-1/2}, \quad (24)$$

что соответствует сформировавшемуся, текущему вниз за счет динамического трения потоку по энергетической оси.

### 3. В р е м я т у н н е л и р о в а н и я

Предположим, что к сверхрешетке приложено электрическое поле поперек слоев, причем разность потенциалов между соседними слоями примерно равна 36 мВ, что соответствует энергии оптического фонона. Поскольку такое смещение гораздо больше ширины зоны поперечного движения при отсутствии смещения, процесс туннелирования носит прыжковый характер и определяется матричным элементом перехода из состояния, локализованного в одном слое, в состояние, локализованное в другом.

В работе [10] приведены различные значения для времени туннелирования  $\tau$ , соответствующие различным толщинам слоев сверхрешетки, однако там отсутствует формула, по которой  $\tau$  вычислялось. В [10] отмечено также, что значение времени туннелирования, обусловленное рассеянием на акустических фононах, много больше времени туннелирования, обусловленного взаимодействием с примесью, если  $T_L < 70$  К. Оптические фононы в [10] не рассматривались, поскольку разность потенциалов между слоями в этом эксперименте была меньше энергии испускания оптического фонона. В настоящей работе также не будет учитываться роль оптических фононов, поскольку после его испускания в процессе туннелирования электрон сразу попадает в пассивную область и не участвует в формировании пика функции распределения. Согласно правилу Ферми [16],

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{h} \langle \psi_f | U(R) | \psi_i \rangle^2, \quad (25)$$

где  $\psi_i$  и  $\psi_f$  — волновые функции, локализованные в соседних слоях сверхрешетки, а  $U(R)$  — потенциал взаимодействия электрона с примесью.

Пусть  $d_1$  — ширина слоя GaAs и  $d_2$  — ширина слоя AlGaAs. Перпендикулярно слоям вдоль оси  $z$  направлено электрическое поле  $E$ . Тогда разность потенциалов между слоями составляет  $E(d_1 + d_2)$ . Предположим, что это смещение невелико по сравнению с высотой барьера и расстояниями между уровнями в яме, что позволит считать, что волновые функции  $\psi_i$  и  $\psi_f$  слабо отличаются от волновых функций в несмещенной сверхрешетке. Тогда внутри барьера

$$\begin{aligned} \psi_i &= B \exp(ipr - \kappa z), \\ \psi_f &= B \exp(iqr + \kappa z), \end{aligned} \quad (26)$$

где  $B$  — нормировочный множитель,  $p$  и  $q$  — волновые векторы, параллельные слоям,  $\kappa$  — коэффициент затухания волновой функции под барьером,  $r$  —

двумерный радиус-вектор, лежащий в плоскости слоя. Поскольку рассеяние является упругим, векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  удовлетворяют соотношению

$$\frac{\hbar^2 \mathbf{q}^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2 \mathbf{p}^2}{2m^*} = eE (d_1 + d_2). \quad (27)$$

Предположим, что рассеяние происходит на кулоновской примеси, расположенной внутри барьера. Вследствие этого для вычисления матричного элемента достаточно знать лишь волновые функции внутри барьера: вклад от других областей оказывается малым. Вычисляя матричный элемент с потенциалом  $e^{*2}/R$ , где  $R = (z^2 + r^2)^{1/2}$ , получим

$$U_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} = \exp(-\alpha d_2) \frac{2}{d_1 z} \frac{e^{*2}}{|\mathbf{p}-\mathbf{q}|^2}. \quad (28)$$

Усредняя по углам направления конечного импульса, найдем обратное время туннелирования

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\pi^4 e^{*4} \hbar \exp(-2\alpha d_2)}{m^* L^2 d_1^4 |E (d_1 + d_2)|^2}, \quad (29)$$

где  $L^2$  — площадь, на которой находится одна примесь. Заметим, что комбинация  $\delta E = (\hbar^2 \pi^2 / m^* d_1^2 z) \exp(-\alpha d_2)$  является шириной зоны в несмещенном потенциале сверхрешетки, а величина  $\alpha = e^{*2} m^* / \hbar^2 z$  — безразмерный параметр, характеризующий рассеяние на кулоновском потенциале.

Подставляя эти выражения в (27), получим

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{16} \frac{\hbar}{m^* L^2} \alpha^2 \left( \frac{\delta E}{(d_1 + d_2) E} \right)^2. \quad (30)$$

Отметим, что в сверхрешетке GaAs—AlGaAs величина  $\alpha \ll 1$ , что обеспечивает условия применимости борновского подхода для вычисления времени туннелирования.

#### 4. Мощность потерь

##### и уравнение энергетического баланса

Проследим за поведением электрона, родившегося в результате накачки вблизи порога испускания фонона. Спуск вниз по оси энергии возможен как за счет  $e-e$ -рассеяния, так и за счет испускания фононов. Вероятность того или иного исхода зависит от параметров  $\lambda$  и  $t_0$ , количественное соотношение определяется найденной функцией распределения. Если спуск осуществляется за счет  $e-e$ -рассеяния, то вся энергия  $\epsilon_0$  от одного носителя переходит в систему максвелловских электронов, если же электрон испускает фонон, то в систему поступает лишь энергия  $\epsilon_0 - \hbar \Omega_0$ . Таким образом, мощность потерь  $Q$  из работы [5] следует приравнять к выражению

$$Q = H \equiv I_0 (NL^2)^{-1} [z_0 - W(t_0, \lambda)], \quad (31)$$

$$W(t_0, \lambda) = \hbar \Omega_0 N L^2 \exp(-\hbar \Omega_0 / T_e) (I_0 \tau_0)^{-1} \int_0^\infty \varphi^+(t) dt.$$

Для  $\lambda \gg 1$  выражение  $W(t_0, \lambda)$  получается (в различных предельных случаях) подстановкой формул (15), (16) и (17).

В результате находим для мощности потерь [8]

$$W(t_0, \lambda) = \begin{cases} \hbar \Omega_0 \exp(t_0) / (2\lambda |\pi|^{1/2}), & |t_0| \gg 1, \\ \hbar \Omega_0 / (\pi \lambda), & |t_0| \ll 1, \end{cases} \quad (32)$$

$$W(t_0, \lambda) = \begin{cases} \hbar \Omega_0 / \pi \lambda, & |t_0| \ll 1, \\ \hbar \Omega_0 (t_0 / \pi)^{1/2} / \lambda, & 1 \ll t_0 \ll \lambda^2, \end{cases} \quad (33a)$$

$$W(t_0, \lambda) = \begin{cases} \hbar \Omega_0 \left( 1 - \frac{2\lambda}{(\pi t_0)^{1/2}} \right), & t_0 \gg \lambda^2. \end{cases} \quad (33b)$$

Разберем теперь случай слабого межэлектронного рассеяния  $\lambda \ll 1$ . Для определения  $W(t_0, \lambda)$  удобно воспользоваться следующим соотношением [5]:

$$\psi^+(1) = \int_0^{\infty} \varphi^+(t) dt$$

и вычислять  $\psi^+(1)$  непосредственно из уравнения (13) с помощью разложения (19). Пользуясь формулой (20), получим для  $t < 0$

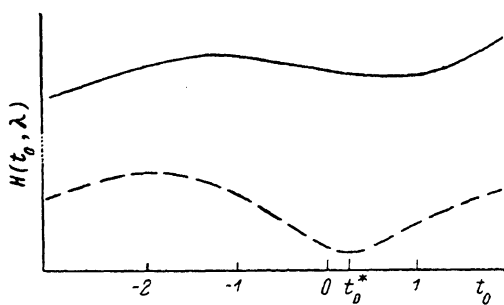
$$W(t_0, \lambda) = \hbar\Omega_0 [1 - \Phi(|t_0|^{1/2})]. \quad (34)$$

Для  $t_0 > 0$  найдем  $\psi^+(t)$  и в следующем приближении по  $\lambda$

$$\psi_1^+ = -a\lambda^2 e^{-t_0/2} \left( \frac{2(1+z)}{\pi t_0} \right)^{1/2} - a\lambda^2 (1-z^2)^{1/2} e^{-zt_0/2} \Phi[((1-z)t_0/2)^{1/2}], \quad (35)$$

$$W(t_0, \lambda) = \hbar\Omega_0 \left( 1 - \frac{2\lambda}{(\pi t_0)^{1/2}} \right). \quad (36)$$

Отметим, что формула (36) совпадает с (33в), так как в этом случае совпадают функции распределения. На рисунке сплошной и штриховой линиями изображена зависимость  $H(t_0, \lambda)$  для  $\lambda \gg 1$  и  $\lambda \ll 1$  соответственно. Положение минимума  $t_0^*$  этих кривых связано параметрически с отношением времен релаксации следующим образом:



$$\tau_0/\tau_e = \pi^{1/4} [(1-\pi) x e^x \operatorname{erfc}(x)]/x^{1/2}/2, \quad (37)$$

$$T_e t_0^* = \pi^{-1} x^2 \hbar\Omega_0 (\tau_0/\tau_{ee})^2.$$

Параметр  $x$  при этом пробегает значения от 0 до  $X$ . Величина  $X$ , при которой соотношение (37) теряет силу, определяется тем моментом, когда  $t_0^*$ , пройдя через максимум, вновь станет много меньше единицы. Формула (31) в отличие от (26)–(30) универсальна независимо от параметра  $\lambda$ , необходимо лишь, чтобы  $T_e \ll \hbar\Omega_0$ .

Подставляя  $Q$  из работы [5] в (31) и учитывая, что  $I_0/L^2 = N/\tau$ , получим следующее уравнение для температуры:

$$\hbar\Omega_0 \exp(-\hbar\Omega_0/T_e) F(\lambda) = [\varepsilon_0 - W(t_0, \lambda)] (\tau_0/\tau). \quad (38)$$

Функция  $F(\lambda)$  вычислена в работе [5]:

$$F(\lambda) = \begin{cases} 2\lambda, & \lambda \ll 1, \\ 1 - (\pi\lambda)^{-1}, & \lambda \gg 1. \end{cases} \quad (39)$$

Так как самая сильная зависимость от температуры содержится во множителе  $\exp(-\hbar\Omega_0/T_e)$ , изменение температуры соответствует функции  $H(t_0, \lambda)$ . Учитывая, что  $\tau \sim 500$  [10], а  $\tau_0 \sim 1$  пс [5], с логарифмической точностью при  $\lambda \ll 1$  получим

$$T_e = \begin{cases} \hbar\Omega_0/\ln(\tau/\tau_{ee}), & |t_0| \gg 1, \\ \hbar\Omega_0/\ln[\tau/(\tau_{ee}\tau_0)^{1/2}], & |t_0| \leq 1, |t_0^* - t_0| > t_0^*, \\ \hbar\Omega_0/\ln[\tau/(\tau_{ee}^2 t_0^2)], & |t_0 - t_0^*| \ll t_0^*. \end{cases} \quad (40)$$

Последняя формула в (40) соответствует минимальной температуре, достигающейся при постоянной накачке в условиях слабого  $e$ – $e$ -рассеяния. В случае сильного  $e$ – $e$ -рассеяния  $W(t_0, \lambda) \ll \varepsilon_0$  всегда и температура изменяется незначительно:

$$T_e = \hbar\Omega_0 \left/ \left[ \ln \left( \frac{\tau [\varepsilon_0 - W(t_0, \lambda)]}{\tau_0 \hbar\Omega_0} \right) \right] \right., \quad (41)$$

$$t_0 = (\varepsilon_0 - \hbar\Omega_0)/[\hbar\Omega_0 \ln(\tau/\tau_0)].$$

**Заключение.** Применимость результатов этой работы, а также моменты перехода от одного предельного случая к другому определяются размерами квантовой ямы (шириной слоя GaAs) и концентрацией электронов в ней. Яма должна быть достаточно узкой, чтобы выполнялись условия  $E_2 - E_1 > \hbar \Omega_0$ ,  $\epsilon_0$ , а концентрация электронов — достаточно большой, чтобы  $\tau_{ee}$  было много меньше  $\tau_0$  — времени релаксации на акустических фононах. Первое условие выполняется, если ширина ямы  $d_1 < 150 \text{ \AA}$ , а второе — если концентрация электронов  $N > 10^7 \text{ см}^{-2}$  [1, 3, 5], что является типичным для экспериментов по вертикальному транспорту и фотолюминесценции. Переход от слабого  $e-e$ -рассеяния к сильному при температуре  $T_e \approx 80 \text{ K}$  происходит при концентрации, большей  $4.3 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ . При такой концентрации, однако,  $\epsilon_F = 150 \text{ K}$  и функция распределения электронов отличается от максвелловской при  $\epsilon < \epsilon_F$ . Вследствие этого меняется и ядро  $K(\omega)$  в формуле (5) [1, 6], из-за чего меняются мощность потерь и форма пика функции распределения. В эксперименте [11] при  $N = 2.5 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$  наблюдалось более сильное испускание оптических фононов при низких температурах по сравнению с тем, которое определяется формулой

$$Q = \frac{\hbar \Omega_0}{\tau_0} \exp\left(-\frac{\hbar \Omega_0}{T_e}\right) \quad (42)$$

в соответствии с результатами [8]. При этом  $\tau_0 = 0.15 \text{ пс}$ , что соответствует времени испускания оптических фононов в квантовой яме, вычисленному в [2, 5] через материальные константы GaAs. При меньших концентрациях [12] электрон-электронное рассеяние недостаточно эффективно, что вызывает замедление испускания оптических фононов в 60 раз при  $N \sim 10^{10} \text{ см}^{-2}$ . Эти экспериментальные данные дают информацию о  $\tau_0$  и  $\tau_{ee}$  при  $\epsilon = \hbar \Omega_0$ . Спектроскопические эксперименты позволяют исследовать релаксацию электронов в более широких пределах. Хотя вычисление формы пика проводилось при  $\epsilon = \hbar \Omega_0$ , формулы (15) и (16) справедливы в более широком интервале  $T_e \ll \epsilon \ll E_2 - E_1$ . При этом в выражении (4) для  $\tau_{ee}$  следует учесть зависимость

$$\tau_{ee}(\epsilon_0) = \tau_{ee} \frac{\epsilon_0}{\hbar \Omega_0},$$

а в выражении (10) для  $\lambda$  положить  $\lambda = \lambda |_{\hbar \Omega_0} (\hbar \Omega_0 / \epsilon_0)^{1/2}$  [1]. При  $\epsilon_0 \ll E_2 - E_1$   $\tau_0 \approx \text{const}$  [2]. Если к тому же форма  $G(\epsilon)$  отличается от  $\delta$ -образной, то результирующая форма пика будет более сложной. Для ее анализа удобнее пользоваться не сверткой выражений (15) и (16) по  $d\epsilon_0$ , а непосредственным сравнением лаплас-образов формы генерации  $[G(\epsilon)]$  и  $\psi^{\pm}(z')$ . Если генерация не близка к порогу испускания оптических фононов, то коэффициент передачи (отношения лаплас-образов  $[R(\epsilon)]$  к  $\psi(z')$ ) имеет вид

$$\frac{\psi^-(z')}{[G(\epsilon)]} = \frac{\tau_0}{\tau} \frac{\lambda^{-1}(\epsilon_0)}{[4z'(1-z')]^{1/2}} \quad (43)$$

при накачке ниже порога и

$$\frac{\psi^+(z')}{[G(\epsilon)]} = \frac{\tau_0}{\tau} \frac{\lambda^{-1}(\epsilon_0)}{[4z'(1-z')]^{1/2} + \lambda^{-1}} \quad (44)$$

при накачке выше порога.

Если при этом  $z'$  — чисто мнимая величина, то эти выражения являются отношением фурие-образов  $[G(\epsilon)]$  и  $\psi(z')$ . Здесь  $\epsilon_0$  означает характерную энергию частиц из пика, а  $1/\tau$  — скорость поступления в этот пик новых частиц.

Как отмечалось в [1, 6], вырождение электронного газа сильно влияет на мощность потерь  $Q(\lambda)$  и зависит от соотношения  $T_e$  и  $\epsilon_F$ . При  $T_e \ll \epsilon_F$  также изменится и форма пика в интервале  $|\epsilon - \epsilon_0| < \epsilon_F$ . В этом случае изменится и отношение (43):

$$\frac{\psi(z')}{[G(\epsilon)]} = \frac{1}{\tau} \left[ \frac{2}{\pi} \frac{E_F}{\hbar} \left( \frac{\epsilon_F}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \ln \left( \frac{c \epsilon_F}{T_e \sin \pi (1 - z')} \right) \right]^{-1}, \quad (45)$$



где  $c$  — подлогарифмическая константа  $c \sim 1$ ,  $|z'| \gg T_e/\varepsilon_F$ ,  $|\varepsilon - \varepsilon_0| \ll \varepsilon_F$ . Выражению (44) соответствует при  $\varepsilon_0 - \hbar\Omega_0 \gg \varepsilon_F$ ,  $\varepsilon_F \gg T_e$

$$\frac{\psi(z')}{[G(\varepsilon)]} = \frac{1}{\tau} \left[ \frac{2}{\pi} \frac{E_B}{\hbar} \left( \frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \ln \left( \frac{c\varepsilon_F}{T_e \sin \pi(1-z')} \right) + \frac{1}{\tau_0} \right]^{-1}. \quad (46)$$

При получении (45) и (46) вместо ядра  $K(\omega)$  (5) использовалось соответствующее ядро из работы [6] в предположении, что порог испускания оптических фононов находится далеко от пика. Из формул (43)–(46) видно, что отношение  $\tau/\tau_{ee}$  определяет амплитуду пика, а электронная температура  $T_e$  — характерный масштаб убывания интенсивности в районе максимума. В формулах (15) и (43)  $T_e$  является единственным параметром, определяющим характерную ширину пика по энергии ( $\Delta\varepsilon \sim T_e$ ). В остальных случаях, кроме этого масштаба, ширина пика определяется еще безразмерными параметрами —  $\lambda$  в формуле (44),  $\varepsilon_F/T_e$  — в формуле (45),  $\varepsilon_F/T_e$  и

$$\tau_0 \frac{2}{\pi} \frac{E_B}{\hbar} \left( \frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \ln \left( \frac{\varepsilon_F}{T_e} \right)$$

— в формуле (46).

В зависимости от величины и соотношения этих параметров в качестве ширины пика может выступать различная энергия: так, например, в (16) и (44) при  $\lambda \ll 1$   $\Delta\varepsilon \sim T_e \lambda$ .

Все характерные времена и безразмерные параметры вычислялись через материальные константы GaAs, однако при этом были сделаны допущения, невыполнение которых может оказаться заметным.

Во-первых,  $\tau_{ee}$  вычислялось в борновском приближении. При  $\varepsilon_0 = \hbar\Omega_0$  борновский и классический результаты для сечения рассеяния численно близки, а угловое распределение совпадает для любых энергий [17]. Поэтому для получения правильного  $\tau_{ee}$  при  $T_e \ll \varepsilon_0 \ll \hbar\Omega_0$  достаточно пересчитать сечение рассеяния в классическом приближении.

Во-вторых,  $\tau_0$  вычислялось без учета разных механических свойств GaAs и AlGaAs. Это приводит к зависимости  $\tau_0$  от ширины квантовой ямы. При ширине 100 Å результаты вычислений [2] и [4] одинаковы. При ширине, меньшей 30 Å, необходимо также учитывать дисперсию оптического фонона и его локализацию в квантовой яме. Это явление приводит к сдвигу порога испускания, оно было экспериментально изучено в [18].

В-третьих, при вычислении матричных элементов электрон-электронного и электрон-фононного рассеяния не учитывалось экранирование, которое было особенно существенным при больших концентрациях и низких температурах электронного газа. Различные механизмы экранирования электрон-фононного рассеяния были рассмотрены в статье [7], согласно которой  $\tau_{ee}^*$  может быть при  $N \sim 10^{11} \text{ см}^{-2}$  в 10 раз больше времени  $\tau_0$ , вычисленного в [1, 2, 5] без учета экранирования. Что касается экранирования электрон-электронного рассеяния, то учет его модифицирует не только  $\tau_{ee}$ , но и угловую зависимость амплитуды рассеяния. Дело в том, что при  $T_e = 100 \text{ К}$  и  $N = 10^{11} \text{ см}^{-2}$  дебаевский радиус  $r_D = 2\pi T_e / Ne^*$  оказывается сравнимым с транспортным сечением  $e$ – $e$ -рассеяния, которое определяет ядро интеграла столкновений. Ослабление малоуглового рассеяния приводит к тому, что в ядре  $K(\omega)$  (5) исчезает сингулярность при  $\omega \rightarrow 0$ . В результате в точке  $\varepsilon_0$  сохранится  $\delta$ -образный пик функции распределения, а логарифмический рост крыльев будет обрезан на энергиях  $\varepsilon_0 \pm \varepsilon^*$ . Минимальная передача  $\varepsilon^*$  определяется экранированием:  $\varepsilon^* \sim (\varepsilon_0 e^{*2} / r_D)^{1/2}$ . Таким образом, форма пика, полученная по формулам (15)–(18) должна хорошо соответствовать реальной функции распределения при  $10^7 \text{ см}^{-2} < N < 10^{10} \text{ см}^{-2}$ . При более высоких концентрациях, согласно экспериментальным данным, можно выявить особенности двумерного экранирования при  $e$ – $e$ -рассеянии.

Автор благодарен И. Б. Левинсону и С. Э. Есипову за полезные замечания.

#### Список литературы

- [1] Esipov S. E., Levinson Y. B. // Adv. Phys. 1987. V. 36. N 3. P. 331–383.
- [2] Pzice P. J. // J. Appl. Phys. 1982. V. 53. N 10. P. 6863–6868.
- [3] Карпус В. // ФТП. 1986. Т. 20. В. 1. С. 12–19.

- [4] Sawaki N. // J. Phys. C. 1986. V. 19. N. 25. P. 4965—4975.  
 [5] Есипов С. Э., Левинсон И. Б. // ЖЭТФ. 1986. Т. 90. В. 1. С. 330—345.  
 [6] Есипов С. Э. // ЖЭТФ. 1987. Т. 92. В. 3. С. 1074—1081.  
 [7] Sarma S. D., Mason B. A. // Phys. Rev. B. 1986. V. 33. N 2. P. 1418—1419.  
 [8] Есипов С. Э. // Автореф. канд. дис. Черноголовка, 1986.  
 [9] Chomtte A., Devaud B., Emary I. Y., Lambert B., Regreny A. // Sol. St. Commun. 1985. V. 54. P. 75.  
 [10] Chomtte A., Devaud B., Lambert B., Regreny A. // Sol. St. Commun. 1986. V. 57. P. 885.  
 [11] Lion S. A. // Superlat. a. Microstruct. 1986. V. 3. N 1. P. 261—272.  
 [12] Ryan J. F., Taylor R. A., Turberfield A. J., Masiel A., Worlok J. M., Gossard A. C., Wiegman W. // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 53. P. 1841.  
 [13] Milnes A. G. // Sol. St. Electron. 1986. V. 29. N 2. P. 99—121.  
 [14] Есипов С. Э., Левинсон И. Б. // ЖЭТФ. 1984. Т. 86. В. 5. С. 1915—1936.  
 [15] Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. IV. ч. I. М., 1976. 336 с.  
 [16] Энрико Ферми. Квантовая механика. М., 1965. 367 с.  
 [17] Stern F., Howard W. E. // Phys. Rev. 1967. V. 163. P. 816.  
 [18] Seguy P., Maan J. C., Fasolino A., Martinez G. // Abstr. 19 Int. Conf. on the physics of semiconductors. Warsaw, 1988. P. Fr-B-1.3.

Институт проблем технологии микроэлектроники  
и особых чистых материалов  
АН СССР  
Черноголовка

Получена 29.11.1988  
Принята к печати 19.05.1989