

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ И ВРЕМЕННЫХ АБЕРРАЦИЙ В КАТОДНЫХ ЛИНЗАХ СО СЛАБО НАРУШЕННОЙ ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ. II

С. В. Колесников, М. А. Монастырский

Общая методика расчета aberrаций, связанных с нарушением осевой симметрии, представленная в первой части работы, конкретизируется применительно к отдельным видам нарушений. Для подтверждения достоверности разработанной теории рассматриваются модельные задачи, имеющие точное решение. Приводятся результаты численных экспериментов по исследованию вычислительной устойчивости методики, обсуждаются некоторые принципиальные аспекты теории aberrаций катодных линз.

Общий подход к расчету неосесимметричных aberrаций, развитый в первой части работы, конкретизируется ниже применительно к отдельным видам нарушения осевой симметрии. Для иллюстрации достоверности разработанной теории рассматриваются модельные задачи, допускающие точное решение. Детально анализируются результаты численных экспериментов по исследованию устойчивости, изложенной в части I методики расчета aberrаций; обсуждаются некоторые принципиальные аспекты теории aberrаций катодных линз.

Ссылки на формулы первой части работы снабжены римской цифрой I перед номером формулы.

1. Качественный анализ некоторых неосесимметричных aberrаций

Каждому типу возмущений электростатического поля при фиксированном порядке приближения по малому параметру β соответствует вполне определенным набор гармоник aberrаций разложения (I.10). Например, возмущениям, не нарушающим осевую симметрию, в линейном приближении по β соответствует нулевая гармоника (Φ_0 ; сдвигам и поворотам (перекосам) оси симметрии — нулевая и первая (Φ_1) гармоники; эллиптическим деформациям электродов — нулевая и вторая (Φ_2) гармоники; нарушениям осевой симметрии, обусловленным наличием технологических отверстий на поверхности электродов, соответствуют в зависимости от расположения этих отверстий различные наборы гармоник из множества $\{\Phi_i\}$ ($i=0, \dots, 4$); и т. д. Поэтому для детального анализа aberrаций в катодных линзах с нарушенной осевой симметрией целесообразно исследовать влияние каждой гармоники возмущенного поля в отдельности на свойства изображения. Привести полную классификацию с этой точки зрения всех aberrационных коэффициентов разложений (I.8), (I.9) в данной статье не представляется возможным. Здесь мы ограничимся в основном анализом коэффициентов, определяющих геометрические искажения.

Исходя из (I.8), (I.9), представим траекторию и время пролета в возмущенном поле в виде

$$\mathbf{r}(z, \xi, \beta) = \mathbf{r}_{oc} + \Delta_\beta \mathbf{r}, \quad \tau(z, \xi, \beta) = \tau_{oc} + \Delta_\beta \tau, \quad (1)$$

где $\mathbf{r}_{oc} = \mathbf{r}(z, \xi, 0)$, $\tau_{oc} = \tau(z, \xi, 0)$ — траектория и время пролета в невозмущенном поле при $\beta=0$; $\Delta_\beta \mathbf{r}$, $\Delta_\beta \tau$ — соответствующие возмущения по параметру β .

В разложениях $\Delta_\beta r$, $\Delta_\beta \tau$, предварительно приведенных к виду, аналогичному (I.22), будем явно выписывать лишь пространственные и временные aberrации положения (т. е. члены, пропорциональные βr_0^n , $n=1, 2, 3$), обозначая остальные aberrации многоточием.

Последовательно проанализируем искажения изображения тест-объекта, обусловленные влиянием каждой гармоники в отдельности. При этом для простоты предположим, что предельное электронно-оптическое увеличение M в центре невозмущенной катодной линзы равно единице, а коэффициент осесимметричной дисторсии E равен нулю.

1. $\Phi_0 \neq 0$, остальные гармоники равны нулю. В этом случае

$$\Delta_\beta r = \dots + \beta r_0 r_{33} e^{i\beta_0} + \frac{1}{6} \beta r_0^3 r_{333} e^{i\beta_0} + \dots,$$

$$\Delta_\beta \tau = \dots + \frac{1}{2} \beta r_0^2 \tau_{33} + \dots \quad (2)$$

Таким образом, наличие нулевой гармоники приводит к возмущению предельного увеличения в центре, а также к возмущению осесимметричной пространственной и временной дисторсий.

2. $\Phi_1 \neq 0$, остальные гармоники равны нулю. В этом случае

$$\Delta_\beta r = \dots + \frac{1}{2} \beta r_0^2 (r_{33}^1 + r_{33}^2 e^{2i\beta_0}) + \dots,$$

$$\Delta_\beta \tau = \dots + \beta r_0 \cos \beta_0 \tau_{33} + \dots \quad (3)$$

Первая гармоника, как это видно из рис. 1, вносит анизотропию в геометрические искажения тест-объекта. Временная дисторсия характеризуется появлением неосесимметричного слагаемого, отражающего влияние нарушения осевой симметрии на искривление линий равной фазы при развертке электронного изображения во времени [1].

3. $\Phi_2 \neq 0$, остальные гармоники равны нулю. Этот случай мы рассмотрим более детально, сохранив в разложениях $\Delta_\beta r$, $\Delta_\beta \tau$, помимо дисторсионных членов, некоторые другие существенные на практике неосесимметричные aberrации

$$\Delta_\beta r = \dots + \beta \epsilon_p^{1/2} r_{13} e^{-i\alpha_0} + \frac{1}{2} [\beta r_0^2 \epsilon_p^{1/2} [r_{133}^1 e^{i(\alpha_0 - 2\beta_0)} + r_{133}^2 e^{i(\alpha_0 + 2\beta_0)} + r_{133}^3 e^{-i\alpha_0}] +$$

$$+ \beta r_0 r_{33} e^{-i\beta_0} + \frac{1}{6} \beta r_0^3 (r_{333}^1 e^{-i\beta_0} + r_{333}^2 e^{3i\beta_0}) + \dots \quad (4)$$

$$\Delta_\beta \tau = \dots + \frac{1}{2} \beta \epsilon_p \tau_{113} \cos 2\alpha_0 + \frac{1}{2} \beta r_0^2 \tau_{333} \cos 2\beta_0 +$$

$$+ \beta \epsilon_p^{1/2} r_0 \tau_{133} \cos(\alpha_0 + \beta_0) + \dots \quad (5)$$

Первый член в (4), пропорциональный $\beta \epsilon_p^{1/2}$, имеет смысл приосевого астигматизма (по этому поводу см. также [2]). Нетрудно показать, что параксиальные частицы, эмитированные в центре катода при $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_0 = \pi/2$, пересекают ось соответственно в точках A_0 и A_1 (рис. 2), расстояние между которыми с точностью до малых более высокого порядка равно $2\beta r_{13}/v' |_{z=z_G}$, где z_G — координата предельной плоскости изображения, удовлетворяющая уравнению $v(z_G) = 0$.

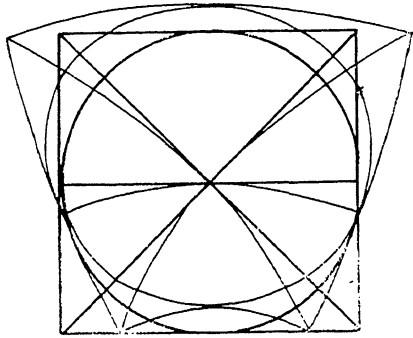


Рис. 1. Искажения тест-объекта, соответствующие первой гармонике Φ_1 . $r_{33}^1 = 0$, $r_{33}^2 > 0$.

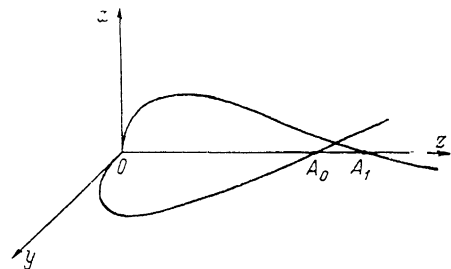


Рис. 2. Астигматизм приосевых траекторий при $\Phi_2 \neq 0$.

Второй член в (4), пропорциональный $\beta r_0^2 \varepsilon_1^{1/2}$, связан с неосесимметричной деформацией поверхности острой фокусировки и соответствующим изменением распределения разрешающей способности в приемнике изображения по сравнению с невозмущенным осесимметричным случаем.

Влияние третьего и четвертого членов (4) на геометрические свойства изображения тест-объекта показано на рис. 3, а, б. Интересно отметить, что неосе-

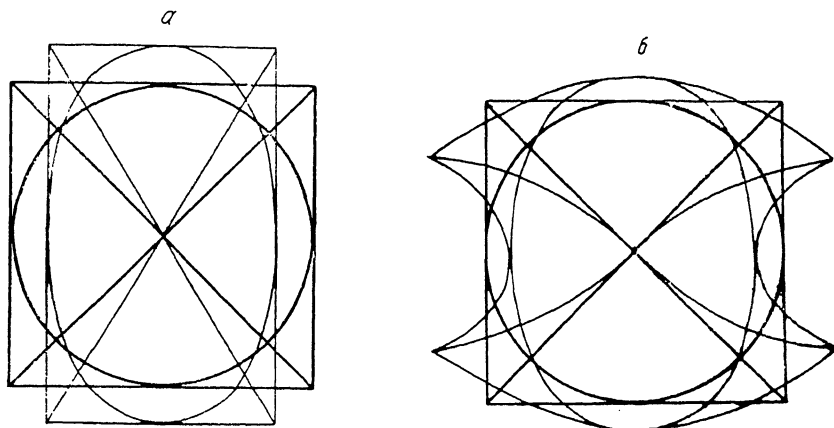


Рис. 3. Искажения тест-объекта, соответствующие второй гармонике Φ_2 . $r_{33\beta} > 0$, $r_{333\beta}^1 = r_{333\beta}^2 = 0$ (а), $r_{33\beta} = r_{333\beta}^1 = 0$, $r_{333\beta}^2 > 0$ (б).

симметричная дисторсия (рис. 3, б) является комбинированной — «подушкообразной» вдоль оси Ox и «бочкообразной» вдоль оси Oy . Такой анизотропный характер дисторсии в электростатических катодных линзах может быть обусловлен только нарушениями осевой симметрии.

4. $\Phi_3 \neq 0$, остальные гармоники равны нулю. Абберационное разложение $\Delta_3 r$ с учетом линейных по β дисторсионных членов имеет вид

$$\Delta_3 r = \dots + \frac{1}{2} \beta r_0^2 r_{333} e^{-2i\beta_0} + \dots \quad (6)$$

Характер геометрических искажений для этого случая представлен на рис. 4. Можно показать, что гармоники возмущения поля, начиная с третьей и выше, в рассматриваемом приближении не дают вклада в коэффициенты временных aberrаций.

5. $\Phi_4 \neq 0$, остальные гармоники равны нулю. В этом случае

$$\Delta_3 r = \dots + \frac{1}{6} \beta r_0^3 r_{3333} e^{-3i\beta_0} + \dots \quad (7)$$

Геометрические искажения тест-объекта, соответствующие рассматриваемой гармонике, имеют четко выраженный квадрупольный вид.

2. Модельные задачи

Достоверность разработанной методики расчета aberrаций проверялась авторами на модельных задачах, допускающих точные решения. Ниже в качестве иллюстрации рассматриваются три такие задачи.

Первая модельная задача состоит в aberrационном анализе движения заряженных частиц в электростатическом поле катодной линзы «сферический конденсатор», представляющей собой совокупность двух concentрических сфер,

одна из которых, имеющая радиус кривизны R_k , предполагается катодом, а другая, имеющая радиус кривизны R_c , — анодом, выполненным из мелко-структурной сетки (рис. 5). Будем считать, что между катодом и анодом приложена разность потенциалов U , распределение потенциала в сечении γ такое же, как и в эквивалентном сферическом конденсаторе, а пространство «за анодом» является эквипотенциальным.

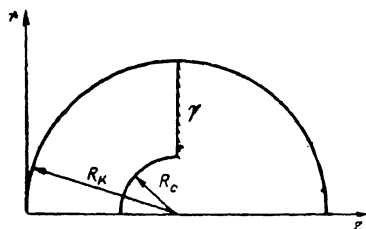


Рис. 5. Катодная линза «сферический конденсатор».

Легко показать, что распределение потенциала на оси симметрии Oz в области $0 \leq z \leq R_k - R_c$ имеет вид

$$\Phi(z) = \alpha z / (R_k - z), \quad \alpha = UR_c / (R_k - R_c). \quad (8)$$

Аналитическое представление произвольного пространственного движения заряженной частицы в катодной линзе «сферический конденсатор» и конечные выражения для коэффициентов осесимметричных пространственных aberrаций до третьего порядка включительно получены в работе [3]. В качестве примера, который будет полезен и далее, приведем формулы для коэффициентов дисторсии E и кривизны D в области $0 < z \leq R_k - R_c$

$$E = \frac{R_k - z}{2R_k^2}, \quad D = -\frac{1}{2} \frac{(R_k - z)^{1/2} (R_k - 2z)}{\alpha^{1/2} R_k z^{1/2}}. \quad (9)$$

Можно показать, что коэффициенты осесимметричных временных aberrаций до второго порядка включительно в области $0 < z \leq R_k - R_c$ имеют вид

$$\begin{aligned} a_2 &= -\sqrt{\frac{2m}{e}} \frac{R_k}{\alpha}, & A_{11} &= -\frac{3}{4} \sqrt{\frac{2m}{e}} \alpha^{-3/2} \left[\sqrt{z(R_k - z)} + \frac{R_k}{2} \arccos \frac{R_k - 2z}{R_k} \right], \\ A_{13} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2m}{e}} \frac{z}{\alpha R_k}, & A_{22} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2m}{e}} \alpha^{-3/2} \left[\frac{2R_k + z}{\sqrt{z(R_k - z)}} - \frac{3R_k}{2} \arccos \frac{R_k - 2z}{R_k} \right], \\ A_{33} &= -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2m}{e}} \frac{1}{\sqrt{\alpha} R_k^2} \frac{(R_k - z)^{3/2}}{\sqrt{z}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Аберрационные разложения траектории и времени пролета (см. (I.8), (I.9)) были построены путем подстановки осевого потенциала (8) в общие соотношения (I.11)–(I.14), (I.20), (I.24) и строгого решения соответствующих дифференциальных уравнений. Полученные при этом коэффициенты пространственных и временных aberrаций полностью совпали с коэффициентами, найденными из аналитических представлений.

Вторая модельная задача заключается в исследовании aberrаций катодной линзы с так называемым гиперболическим полем [4], осевое распределение которого имеет вид

$$\Phi_r(z) = pz^2 + qz. \quad (11)$$

Рассмотрим случай неэквипотенциального катода, обладающего кривизной $1/R_k$. Не представляет особого труда получить общие аналитические выражения для произвольной траектории и времени пролета в гиперболическом поле, а из них — соотношения для параксиальных траекторий и коэффициентов пространственных и временных aberrаций. Опуская подробные выкладки, приведем окончательные результаты для случая $p > 0, q > 0$.

Определим предельные параксиальные траектории v, w в катодной линзе с гиперболическим полем при $p > 0, q > 0$

$$v = \sqrt{2/p} \sin(\sqrt{p/2} \Theta), \quad w = \cos(\sqrt{p/2} \Theta), \quad (12)$$

где

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{p}} \ln \left[2 \sqrt{\frac{p}{q} \left(\frac{p}{q} z^2 + z \right)} + \frac{2p}{q} z + 1 \right],$$

коэффициенты осесимметричных пространственных aberrаций до третьего порядка включительно

$$\begin{aligned}
 H &= -\frac{2}{q}w, \quad K = \frac{p}{q}v, \\
 E &= \frac{p}{4R_kq} \frac{\Phi'_r}{\sqrt{\Phi_r}} v, \quad D = -\frac{1}{2R_kq} \frac{\Phi'_r}{\sqrt{\Phi_r}} w, \\
 Q &= -\frac{p}{q^2}w - \frac{p}{2q^2} \frac{\Phi'_r}{\sqrt{\Phi_r}} v, \quad P = -\frac{p}{q^2}v + \frac{1}{q^2} \frac{\Phi'_r}{\sqrt{\Phi_r}} w, \\
 B &= 0, \quad C = 0, \quad G = F = 0,
 \end{aligned} \tag{13}$$

коэффициенты осесимметричных временных aberrаций до второго порядка включительно

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -\sqrt{\frac{2m}{e}} \frac{1}{q}, \quad A_{11} = 0, \quad A_{13} = 0, \\
 A_{22} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2m}{e}} \frac{\Phi'_r}{q^2 \sqrt{\Phi_r}}, \quad A_{33} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2m}{e}} \frac{\Phi'_r}{R_kq \sqrt{\Phi_r}}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Как и в первой задаче, параксиальные траектории и коэффициенты aberrаций, вычисленные для гиперболического поля по общей методике, тождественно совпали с приведенными выше.

Третья из рассматриваемых здесь модельных задач предназначена для проверки aberrационных формул, соответствующих неосесимметричным возмущениям поля. Применялся прием искусственного нарушения осевой симметрии, состоящий в сдвиге произвольной электронно-оптической системы перпендикулярно оси симметрии на малую величину β . В этом случае, как нетрудно видеть в линейном приближении по β отлична от нуля только первая гармоника $\Phi_1 = \Phi'/2$ (напомним, что Φ — осевое распределение невозмущенного потенциала).

Коэффициенты aberrаций сдвига, вычисленные по общей методике, могут быть следующим образом выражены через коэффициенты aberrаций невозмущенной осесимметричной системы:

$$\begin{aligned}
 r_\beta &= 1 - w, \quad r_{2\beta} = -K, \quad r_{22\beta} = -2Q, \\
 r_{11\beta}^1 &= -2G, \quad r_{11\beta}^2 = -2F, \quad r_{33\beta}^1 = -4E, \\
 r_{33\beta}^2 &= -2E, \quad r_{13\beta}^1 = r_{13\beta}^2 = -D, \quad r_{13\beta}^3 = -2C, \\
 \tau_{1\beta} &= -2A_{13}, \quad \tau_{3\beta} = -2A_{33}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Соотношения (15) можно получить и непосредственно из aberrационных разложений (I.22), (I.23), используя тот очевидный факт, что возмущенная система обладает осевой симметрией, но уже относительно новой, сдвинутой оси.

3. Численные эксперименты

Вычислительные преимущества разработанной методики проиллюстрируем путем сравнения результатов расчета aberrаций по изложенному выше методу τ -вариаций и по формулам работ [5, 6], основанных на анализе общего нелинейного уравнения траекторий и интегральных представлений коэффициентов aberrаций.¹

В приведенных численных экспериментах исследовалось влияние погрешности задания осевого потенциала на погрешность расчета параметров первого порядка и коэффициентов aberrаций. В качестве модели использовалась упомянутая выше катодная линза «сферический конденсатор» с параметрами:

¹ Окончательный вид этих формул с выделенными особенностями в подынтегральных выражениях получен А. Н. Игнатьевым (не опубликовано); по этому поводу см. также работу [7].

$R_k=18$ см, $R_c=6$ см, $U=1 \cdot 10^4$ В. Потенциал и его производные на оси симметрии одновременно «заглублялись» по формуле

$$\Phi^{(n)}(z) = \Phi_{\tau}^{(n)}(z)(1 + \omega \cdot 10^{-N}), \quad (16)$$

где $\Phi_{\tau}^{(n)}(z)$ ($n=0, \dots, 4$) — теоретическое значение соответствующей величины; ω — равномерно распределенная на $[0, 1]$ псевдослучайная величина, моделируемая на ЭВМ независимо для каждого значения n, N, z ; N — натуральное число, регулирующее максимальную величину погрешности.

При вычислении электронно-оптических характеристик по формулам работ [5, 6], предельное параксиальное уравнение для траекторий v, w интегрировалось при помощи метода Милна. В прилегающей к катоду области «старта» $0 \leq z \leq z_{\text{ст}}$ траектории v, w представлялись в виде известных разложений по степеням z (см., например, [8, 9]). Интегрирование дифференциальных уравнений для τ -вариаций осуществлялось при помощи модифицированного метода Рунге—Кутты [10]. В тех случаях, когда использовались z -представления операторов T и M (см. ч. 1), в области «старта» применялись степенные разложения, аналогичные упомянутым выше. Следует отметить, что для τ -представлений указанных операторов (удобных, например, при расчете зеркально-линзовых систем) необходимость в этих разложениях отпадает. Шаг интегрирования выбирался таким образом, чтобы для обоих сравниваемых между собой методов расчета аберраций обеспечивалось одинаковое количество вычислений потенциала и его производных на всем промежутке интегрирования.

Характеристики	Теоретическое значение	$N = \infty$	$N = 5$	$N = 4$	$N = 3$	$N = 2$	$N = 1$
Положение плоскости изображения z_G , см	36.00	Менее 0.001 0.01	Менее 0.001 0.01	0.01 0.3	0.06 3.3	0.6 7.3	6.3 84.8
Увеличение M	-1.0000	Менее 0.001 0.02	Менее 0.001 0.02	0.02 0.05	0.12 4.4	1.2 15.1	12.4 Более 100
Коэффициент кривизны D , в $^{-1/2} \cdot \text{см}^{-1}$	$0.55555 \cdot 10^{-3}$	0.2 0.5	0.2 0.5	0.2 2.6	0.3 26.1	0.6 50.6	1.5 78.1
Коэффициент дисторсии E , см^{-2}	$0.15432 \cdot 10^{-2}$	Менее 0.001 0.3	Менее 0.001 0.3	0.03 8.4	0.03 3.2	1.0 53	10.1 Более 100

В таблице приведены теоретические значения положения плоскости изображения z_G , увеличения M , коэффициентов кривизны D и дисторсии E , соответствующие указанным выше параметрам R_k, R_c, U в катодной линзе «сферический конденсатор», а также погрешности (в процентах) расчета электронно-оптических характеристик для $N=1, \dots, 5, \infty$ (метод τ -вариаций — верхняя строка, метод работ [5, 6] — нижняя строка). Нетрудно видеть, что при погрешности потенциала и производных, составляющей не более 0.001 % ($N \geq 5$), оба способа расчета аберраций практически эквивалентны, поскольку имеют весьма малую погрешность, не превышающую 0.5 %.

При проведении расчетов по методу τ -вариаций в случае максимальной 10 %-ной погрешности потенциала и производных ($N=1$) погрешность параметров первого порядка и коэффициентов аберраций не превысила 13 %. Интегрирование параксиального уравнения по Милну дает в этом случае настолько грубые значения параметров первого порядка, что говорить о погрешности расчета коэффициентов аберраций не имеет смысла.

Наиболее ясное представление о вычислительной устойчивости обоих методов расчета аберраций дает рассмотрение случаев $N=3$ и $N=4$. Даже если сравнивать расчеты с различными N , но примерно одинаковыми погрешностями параметров первого порядка, погрешность метода τ -вариаций по коэффициентам

аббераций оказывается на 1—2 порядка меньше погрешности метода абберационных интегралов.

Проанализируем более детально причины различной вычислительной устойчивости рассмотренных методов.

Коснемся сначала метода τ -вариаций. В первой части работы уже подчеркивалось, что разложения траектории и времени пролета по τ -вариациям являются равномерно точными на любом отрезке вида $0 \leq z \leq a$. При этом сами τ -вариации представляют собой ограниченные всюду (включая точку $z=0$) функции пространственной переменной z . Например, для катодной линзы «сферический конденсатор» τ -вариация r_{133}^2 , соответствующая коэффициенту кривизны D , в области $0 \leq z \leq R_k - R_c$ имеет вид

$$r_{133}^2 = \frac{2z^{3/2}}{a^{1/2} R_k^2 (R_k - z)^{1/2}} \quad (17)$$

и обращается в нуль при $z=0$.

Далее нетрудно показать, что определяемая соотношением (I. 4) обратная функция $\tau(z, \xi, \beta)$, представляющая собой время пролета, является непрерывно дифференцируемой по ξ, β на опорной траектории и соответственно допускает регулярное асимптотическое разложение по τ -вариациям лишь в точках оси Oz , удовлетворяющих условию $\Phi(z) \gg \epsilon$, т. е. в точках, достаточно удаленных от поверхности катода. При этом условии существуют и ограничены преобразования перехода (I. 21) от τ -вариаций к z -вариациям и, следовательно, справедливы построенные в первой части работы абберационные разложения.

В области пограничного слоя, непосредственно прилегающего к катоду и имеющего величину порядка ϵ/Φ_0' , регулярные разложения по z -вариациям перестают быть асимптотическими, о чем, в частности, свидетельствует наличие неограниченного при $z \rightarrow 0$ множителя $\Phi^{-1/2}$ в соотношениях (I. 20), (I. 21). Нетрудно показать, что в этой области нарушаются условия известных теорем (см., например, [11]), позволяющих представить траекторию $r(z, \xi)$ в плоскости $z = \text{const}$ в виде асимптотических разложений по малым параметрам ξ , с коэффициентами, зависящими от z . Таким образом, в области пограничного слоя, строго говоря, не существует регулярных абберационных разложений в обычном для электронной оптики смысле.

Физически сказанное выше означает, что пространственно-временные свойства электронных траекторий в области пограничного слоя вблизи катода и вдали от него настолько различны, что описать их единичными регулярными абберационными разложениями невозможно. Это обстоятельство по существу и создает те хорошо известные особенности, которые присущи теории аббераций катодных линз.

Обобщенные абберационные разложения траекторий и времени пролета, являющиеся равномерно точными как в области пограничного слоя, так и вне его, могут быть построены с привлечением асимптотических методов теории сингулярных возмущений аналогично рассмотренному в работах [12] случаю хроматических аббераций. Коэффициенты разложений такого типа зависят уже не от одной, а от двух пространственных переменных — внутренней переменной $\zeta = \Phi/\epsilon$, характерной для области пограничного слоя, и внешней переменной z , характерной для точек, удаленных от поверхности катода на расстояние, существенно превышающее толщину пограничного слоя. За пределами пограничного слоя (при $\zeta \gg 1$) обобщенные разложения переходят в регулярные внешние разложения. Подчеркнем, что коэффициенты обобщенных и внешних разложений независимо от конкретного способа их представления и связанных с этим вычислительных процедур определяются единственным образом по фиксированной системе малых параметров.

Затронутый вопрос важен прежде всего для понимания общих физических закономерностей формирования аббераций в областях, где скорости электронов малы (например, вблизи катода или в окрестности точек поворота в зеркально-линзовых системах). Детальному исследованию таких закономерностей на основе теории сингулярных возмущений будет посвящена отдельная работа. Кроме того, анализ этого вопроса зачастую позволяет установить причины устойчивости (или неустойчивости) того или иного метода расчета аббераций.

Что касается метода τ -вариаций, то здесь важны следующие два обстоятельства. Во-первых, τ -вариации являются регулярными всюду, в том числе и в пограничном слое, функциями внешней переменной z и вычисляются они отдельно от сингулярных при $z \rightarrow 0$ множителей вида $\Phi^{-1/2}$. Во-вторых, абберационные характеристики электронного изображения, определяемые формулами пересчета, содержащими множители $\Phi^{-1/2}$, представляют обычно практический интерес в областях, где скорости электронов достаточно высоки ($\Phi \gg \epsilon$), т. е. заведомо вне пограничного слоя, протяженность которого в направлении нормали к катоду для большинства эмиссионных систем не превосходит десятых долей миллиметра.

Указанные факторы определяют в конечном итоге высокую вычислительную устойчивость метода τ -вариаций.

Рассмотрим теперь с позиций вычислительной устойчивости абберационные формулы, полученные в работах [5, 6] на основе традиционного подхода к теории аббераций. Как известно, этот подход состоит в редукции уравнений Лоренца путем исключения времени на возмущенном движении к общему нелинейному уравнению траекторий с подвижной особой точкой, положение которой зависит от начальной энергии частицы. Формализм теории регулярных возмущений позволяет из общего уравнения траекторий получить систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений непосредственно для коэффициентов внешних абберационных разложений. Выше уже отмечалось, что внешние абберационные разложения не являются асимптотическими в пограничном слое вблизи катода и, следовательно, не отражают поведения электронных траекторий в этой области. С математической точки зрения, этот факт проявляется в неограниченности при $z \rightarrow 0$ правых частей уравнений и соответственно решений для отдельных абберационных коэффициентов (см., например, формулу (9) для коэффициента кривизны D). Из сказанного следует, что в рассматриваемом методе в отличие от метода τ -вариаций влияние пограничного слоя может отрицательно сказаться на абберационном расчете траекторий даже в области изображения, где скорости электронов достаточно высоки ($\Phi \gg \epsilon$). Поэтому при практическом расчете аббераций возникает необходимость построения специальных, иногда весьма сложных, численных процедур, учитывающих наличие указанных сингулярностей. К таким процедурам относятся повышение точности расчета потенциала в прикатодной области [13], выделение особенностей в подынтегральных выражениях для коэффициентов аббераций, автоматическое или «ручное» согласование возникающих при этом счетных параметров и т. д.

Применение таких мер, безусловно, дает положительный эффект, однако, как показывают приведенные в таблице результаты численных экспериментов (в которых использовались указанные процедуры), вычислительная устойчивость, а следовательно, экономичность алгоритмов и, что особенно важно, достоверность получаемых на практике результатов в рассматриваемом методе оказываются все же существенно ниже, чем в методе τ -вариаций.

Заключение

Сформулируем основные результаты, полученные в первой и второй частях настоящей работы.

1. На основе метода τ -вариаций в приближении третьего порядка построена полная абберационная модель электростатических катодных линз с нарушенной осевой симметрией и развит устойчивый метод расчета неосесимметричных пространственных и временных аббераций.

Разработанная абберационная модель единым образом описывает катодные линзы с кривизной или распределенной проводимостью поверхности катода; катодные линзы, содержащие мелкие структурные сетки в оптически действующей части поля, а также катодные линзы, являющиеся электронным зеркалом.

2. В качестве частного случая, вытекающего из общих результатов работы, для указанных классов катодных линз реализован устойчивый метод расчета пространственных и временных аббераций при наличии осевой симметрии.

3. Проведен качественный анализ искажений электронного изображения, вызванных некоторыми конкретными видами нарушенной осевой симметрии.

4. Достоверность основных результатов работы подтверждена на модельных задачах, допускающих точное решение.

5. При помощи численных экспериментов исследована устойчивость разработанной абберационной модели по отношению к погрешности осевого потенциала и его производных. Показано, что предложенный метод расчета аббераций позволяет существенно (на 1—2 порядка) снизить требования к точности расчета электростатического поля по сравнению с одной из известных реализаций вычисления коэффициентов аббераций методом абберационных интегралов.

Литература

- [1] *Щелев М. Я.* В кн.: Пикосекундная электронно-оптическая диагностика в лазерных исследованиях. Тр. ФИАН. М.: Наука, 1985, т. 155.
- [2] *Воробьев Ю. В.* ЖТФ, 1959, т. 29, № 5, с. 589—596.
- [3] *Игнатьев А. Н., Куликов Ю. В.* В кн.: Новые методы расчета электронно-оптических систем. М.: Наука, 1983.
- [4] *Rüdenberg R. J.* Franklin Inst., 1948, v. 246, N 1, p. 311—339; N 2, p. 337—408.
- [5] *Куликов Ю. В., Монастырский М. А., Фейгин Х. Н.* РиЭ, 1978, т. 23, № 1, с. 167—174.
- [6] *Игнатьев А. Н., Куликов Ю. В.* РиЭ, 1978, т. 23, № 11, с. 2470—2472.
- [7] *Семан О. И.* Автореф. канд. дис. Л., 1950.
- [8] *Бонштедт Б. Э.* РиЭ, 1964, т. 9, № 5, с. 844—850.
- [9] *Власов А. Г., Шапиро Ю. А.* Методы расчета эмиссионных электронно-оптических систем. Л.: Машиностроение, 1974.
- [10] *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.
- [11] *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.
- [12] *Монастырский М. А.* ЖТФ, 1978, т. 46, № 6, с. 1117—1122.
- [13] *Монастырский М. А., Иванов В. Я., Куликов Ю. В.* В кн.: Новые методы расчета электронно-оптических систем. М.: Наука, 1983.

Поступило в Редакцию
8 июля 1986 г.
В окончательной редакции
28 ноября 1986 г.