

УДК 53 : 57

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ИНВАРИАНТЫ И ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ДВУМЕРНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В. В. Вечеславов

Описывается способ построения инвариантов двумерных канонических отображений, использующий тесную связь этих инвариантов с интегралами движения гамильтоновых систем специального вида. Интегралом m -го порядка таких систем оказывается разрывная функция, обобщенная производная которой вдоль истинных траекторий движения имеет порядок ε^{m+1} (ε — параметр возмущения). В качестве примера отыскиваются ДЛТ инварианты первых трех порядков стандартного отображения и обсуждаются возможности метода ДЛТ. Показано, что знание интегралов движения позволяет восстановить производящие функции соответствующего преобразования переменных, получить явные выражения для инвариантных кривых и найти приближенные гамильтонианы отдельных резонансов. Приведены резонансные гамильтонианы третьего порядка стандартного отображения.

1. Введение

Многие проблемы нелинейной динамики связаны с каноническими отображениями фазового пространства. Введение соответствующих отображений обеспечило значительный прогресс при аналитических и численных исследованиях долговременного поведения заряженных частиц в магнитных ловушках и ускорителях со встречными пучками, механизма ускорения Ферми, движения вблизи сепаратрисы нелинейного резонанса и др. [1, гл.3; 2]. В случае двух степеней свободы наиболее часто встречается так называемое явное отображение поворота [1, § 3.16]

$$J_{n+1} - J_n = -\varepsilon \frac{dV}{d\Theta}(\Theta_n), \quad \Theta_{n+1} - \Theta_n = 2\pi\omega_0(J_{n+1}), \quad (1.1)$$

где J , Θ , $\omega_0(J)$ — переменные действие—угол и частота невозмущенного движения; ε — малый параметр; возмущение $V(\Theta + 2\pi) = V(\Theta)$ содержит конечное число гармоник. Отметим, что выбор $V = \cos \Theta$, $\omega_0 = J$ отвечает известному отображению Чирикова, играющему важную роль в современной нелинейной теории [2].

Построение приближенных инвариантов канонических отображений, как и построение приближенных интегралов движения непрерывных гамильтоновых систем, является актуальной задачей. Для решения этой задачи в случае аналитических степенных отображений Драгт и Финн привлекли технику преобразований Ли [3], которая до того уже успешно применялась при анализе непрерывных систем [1, § 2.5; 4]. Они представляли изучаемое отображение произведением конечного числа преобразований Ли и заменяли это произведение одним приближенным преобразованием, производящая функция которого являлась искомым инвариантом.

Можно действовать иначе, используя эквивалентность канонических отображений уравнениям Гамильтона специального вида [1, § 3.1; 2], что позволяет исследовать отображения в рамках общей теории гамильтоновых систем. От разностных уравнений (1.1) следует перейти к дифференциальным

$$\dot{\Theta} = \omega_0(J) = \frac{\partial H}{\partial J}, \quad \dot{J} = -\varepsilon \delta_*(t) \frac{dV}{d\Theta} = -\frac{\partial H}{\partial \Theta},$$

которые описывают динамику интегрируемой гамильтоновой системы $H_0(J)$, периодически возмущаемой внешними толчками [1, § 3-1; 2]

$$H(J, \Theta, t) = H_0(J) + \varepsilon H_1(\Theta, t) = H_0(J) + \varepsilon \delta_*(t) V(\Theta). \quad (1.2)$$

В этих выражениях $\omega_0(J) = dH_0/dJ$ — частота невозмущенного движения, $\delta_*(t) = \left[1 + 2 \sum_{n \geq 1} \cos(nt)\right] 2\pi$ — периодическая дельтафункция. Заметим, что гамильтониан (1.2) оказывается разрывной функцией времени, хотя эквивалентное ему отображение (1.1) может быть аналитическим.

Из рис. 1 видно, что на любом интервале свободного движения $t_n < t < t_{n+1}$ импульс системы (1.2) сохраняется, а фаза линейно зависит от локального времени $\tau = t \pmod{2\pi}$

$$J(0 < \tau < 2\pi) = J_{n+1}, \quad \Theta(0 < \tau < 2\pi) = \Theta_n + \tau \omega_0(J_{n+1}). \quad (1.3)$$

На границах интервалов величина J изменяется скачком и траектория движения оказывается разрывной функцией времени. Это обстоятельство делает невозможным или необоснованным применение многих известных методов теории возмущений, ориентированных, как правило, на достаточно гладкие функции [1, гл. 2; 4, 5]. При построении интегралов движения системы (1.2) необходимо с самого начала учитывать скачкообразный характер изменения динамических переменных и функций от них; соответствующий подход представлен в п. 2. Предлагаемая схема в сочетании с методом ДЛТ используется для построения первых трех инвариантов стандартного отображения (п. 3). С помощью этих инвариантов можно нарисовать фазовую картину взаимного расположения резонансов и оценить их размеры, но нельзя найти, например, частоты движений. В п. 4 показано, как восстановить производящие функции соответствующего канонического преобразования переменных и построить приближенные гамильтонианы, дающие детальное описание отдельных резонансов.

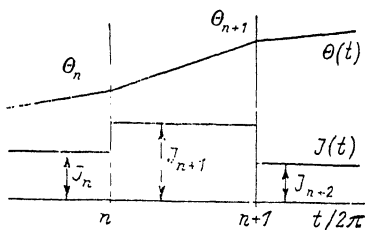


Рис. 1. Характерное поведение динамических переменных $\Theta(t)$ и $J(t)$ системы (1.2).

2. Построение приближенных интегралов движения системы (1.2)

Назовем интегралом движения порядка m такую функцию динамических переменных и времени вида

$$S_m[J(t), \Theta(t), t, \varepsilon] = R(J, \varepsilon) + \sum_{n=1}^m \frac{\varepsilon^n}{n!} G_n(J, \Theta, t), \quad (2.1)$$

для которой вдоль траекторий истинного движения системы (1.2) выполнено условие

$$\frac{D}{Dt} S_m(t) = \frac{d}{dt} S_m(t) + \frac{\Delta}{\Delta t} S_m(t) = O(\varepsilon^{m+1}). \quad (2.2)$$

Здесь D/Dt — обобщенная производная, являющаяся суммой обычной производной d/dt и обусловленной разрывами компоненты $\Delta/\Delta t$; последняя в нашем случае равна [6, § 2]

$$\frac{\Delta S_m}{\Delta t} = \sum_n \delta(t - t_n) \lim_{\eta \rightarrow 0} [S_m(t_n + \eta) - S_m(t_n - \eta)].$$

Ниже показано, что величины всех слагаемых в выражении (2.1) сохраняются при $t_n < t < t_{n+1}$ и испытывают скачкообразные изменения только в моменты толчков. Следовательно, обычная производная $S_m(t)$ всюду равна нулю и условие (2.2) надо понимать как ограничение на величину разрыва первого рода

ступенчатой функции. На интервалах непрерывности $0 < \tau = t \pmod{2\pi} < 2\pi$ для вычисления полной производной по времени можно использовать обычное выражение

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + [\dots, H] = \frac{\partial}{\partial \tau} + \omega_0(J) \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (2.3)$$

где $[\dots, \dots]$ — скобка Пуассона и учтены зависимости (1.3).

Интегралом нулевого порядка является любая зависящая только от J и ε и аналитическая по этим переменным функция $R(J, \varepsilon)$ (этот факт отражен в формуле (2.1))

$$R(J, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \frac{\varepsilon^k}{k!} r_k(J), \quad (2.4)$$

для которой по критерию (2.2) с учетом (1.1) в общем случае имеем

$$\begin{aligned} \frac{DR}{Dt} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_n) [R(J_{n+1}, \varepsilon) - R(J_n, \varepsilon)] = \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{\varepsilon^k}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{dV}{d\theta}(\theta_n) \right]^{k-j} r_j^{k-j}(J_n) \delta(t - t_n) = O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Видно, что разрывы интеграла (2.4) проявляются во всех порядках по ε и задача их последовательной ликвидации должна быть возложена на остальные слагаемые суммы (2.1). Так, чтобы уничтожить скачок первого порядка $R(J, \varepsilon)$, необходимо в силу соотношений (2.3) и (2.5) подчинить G_1 уравнению (штрих означает производную по J)

$$\frac{\partial G_1}{\partial \tau} + \omega_0(J) \frac{\partial G_1}{\partial \theta} = \delta_*(t) r'_0(J) \frac{dV}{d\theta}. \quad (2.6)$$

Нас интересует частное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $\langle G_1 \rangle = 0$ (см. Приложение 1, 2)

$$G_1(J, \theta, t) = \frac{r'_0(J)}{2} \sum_{l \geq 1} \frac{l}{\sin[\pi l \omega_0]} [b_l \sin(l\Omega) + a_l \cos(l\Omega)], \quad (2.7)$$

где

$$\langle G \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(J, \theta, t) d\theta$$

— среднее по θ ; a_l, b_l — коэффициенты Фурье функции $V(\theta)$ и введено сокращенное обозначение фазы

$$\Omega = \theta + (\pi - \tau) \omega_0(J). \quad (2.8)$$

Напомним, что, поскольку $V(\theta)$ — тригонометрический многочлен, число отличных от нуля коэффициентов a_l, b_l конечно.

Нетрудно видеть, что $G_1(0 < \tau < 2\pi) = \text{const}$ вдоль траекторий (1.3) системы (1.2). Из выражения для обобщенной производной этой ступенчатой функции (см. Приложение 1) следует, что она действительно компенсирует разрыв первого порядка $R(J, \varepsilon)$, но одновременно вносит свой вклад в разрывы всех порядков выше первого. Это явление оказывается типичным, и при отыскании $G_k(J, \theta, t)$ приходится интегрировать уравнение вида (2.6) с правой частью, равной сумме обобщенных производных k -го порядка всех стоящих перед G_k в соотношении (2.1) членов (см. Приложение 2). Именно здесь обнаруживается отличие нашей схемы от обычно применяемой для гладких гамильтонианов: вида $H_0 + \varepsilon H_1$, где каждый очередной член суммы (2.1) определяется только одним своим предшественником из уравнения $[G_k, H_0] = [G_{k-1}, H_1]$, $k \geq 1$ (см., например, [5]).

По описанной схеме можно в принципе построить приближенный интеграл любого порядка m , но при фиксированном m конкретное выражение $S_m(J, \Theta, t)$ этого интеграла, его функциональные свойства и область применимости будут определяться заданием нулевого приближения $R(J, \epsilon)$ (см. формулы (2.1) и (2.4)). Возникает, таким образом, интересная задача оптимального выбора $R(J, \epsilon)$. Поскольку решение этой задачи пока не найдено, приходится руководствоваться простым желанием избежать определенных сингулярностей или упростить формулы.

Дальнейшее рассмотрение удобно провести на конкретном примере, в качестве которого выбрано стандартное отображение.

3. ДЛТ инварианты стандартного отображения

Гамильтониан стандартного отображения в обозначениях работы [2] имеет вид

$$H(J, \Theta, t) = \frac{J^2}{2} + \frac{K}{2\pi} \delta_*(t) \cos \Theta, \quad (3.1)$$

где $K=2\pi\epsilon$ — параметр стохастичности; при $K=K_0 \approx 1$ наступает перекрытие всех резонансов и стохастичность становится глобальной.

К обычной записи (1.1) стандартного отображения приходят, фиксируя значения переменных в моменты времени $\tau = t \pmod{2\pi} = 2\pi$, непосредственно перед очередным толчком. Из-за наличия сдвига по фазе (см. (2.8)) возникает несимметрия по Θ , что хорошо видно на фазовых картинках [2]. Можно ввести симметрию и заодно упростить формулы, если наблюдать за системой (3.1) при $\tau = \pi$. Получающееся при этом отображение $J_1, \Theta_1 \rightarrow J_2, \Theta_2$ (его можно назвать симметризованным стандартным отображением) таково:

$$J_2 - J_1 = \frac{K}{2\pi} \sin(\Theta_1 + \pi J_1), \quad \Theta_2 - \Theta_1 = \pi(J_1 + J_2). \quad (3.2)$$

Интегралы системы (3.1) представлены в общем виде в Приложении 2. Если для нулевого приближения $R(J, \epsilon)$ согласно (2.4), принять

$$R(J, \epsilon) \equiv r_0(J), \quad r_j(J) \equiv 0, \quad j \geq 1, \quad (3.3)$$

то первые три интеграла примут вид

$$S_1(J, \Theta, t) = r_0 + \frac{K}{4\pi} \frac{r'_0}{\sin(\pi J)} \cos \Omega, \quad (3.4)$$

$$S_2(J, \Theta, t) = S_1 + \left(\frac{K}{8\pi}\right)^2 \frac{r''_0 \sin(2\pi J) - 2\pi r'_0}{\sin^2(\pi J) \sin(2\pi J)} \cos(2\Omega), \quad (3.5)$$

$$S_3(J, \Theta, t) = S_2 + \frac{1}{32} \left[\frac{K}{2\pi \sin(\pi J)} \right]^3 \left\{ \left[\frac{r'''_0}{6} - \frac{\pi r''_0}{\sin(2\pi J)} \right] \cos(3\Omega) - \left[\frac{r'''_0}{2} - \pi r''_0 \frac{1 + 2 \cos(2\pi J)}{\sin(2\pi J)} \right] \cos \Omega + 2\pi^2 r'_0 \left[\frac{\sin(\pi J)}{\sin(3\pi J)} \cos(3\Omega) - \cos \Omega \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{1 + \cos(2\pi J) + \cos^2(2\pi J)}{\sin^2(2\pi J)} \right\}. \quad (3.6)$$

Эти выражения легко превратить в инварианты эквивалентного системе (3.1) отображения, если фиксировать значение фазы Ω (см. (2.8)) в соответствии с моментом наблюдения τ ; для симметризованного стандартного отображения (3.2), например, $\tau = \pi$ и $\Omega = \Theta$.

В формулах (3.4)–(3.6) присутствуют резонансные знаменатели, для подавления которых вблизи одного конкретного резонанса обычно используют преобразование к специальным (резонансным) переменным [1, § 2.4; 2]. Дунетом, Лейнгом и Тейлором был предложен другой метод (метод ДЛТ), позволяющий в ряде случаев устранять знаменатели сразу всех проявляющихся в рассматриваемом порядке резонансов [7]. Сами авторы ограничились первым порядком, но позднее Мак-Намара соединил метод ДЛТ с техникой преобразований Ли и получил инварианты первых двух порядков [5]. По методу ДЛТ

функцию $r'_0(J)$ выбирают так, чтобы устранить все особенности в каждом из выражений (3. 4)—(3. 6). Число и порядок нулей $r'_0(J)$ должны при этом совпадать с числом и порядком полюсов, порожденных резонансными знаменателями.

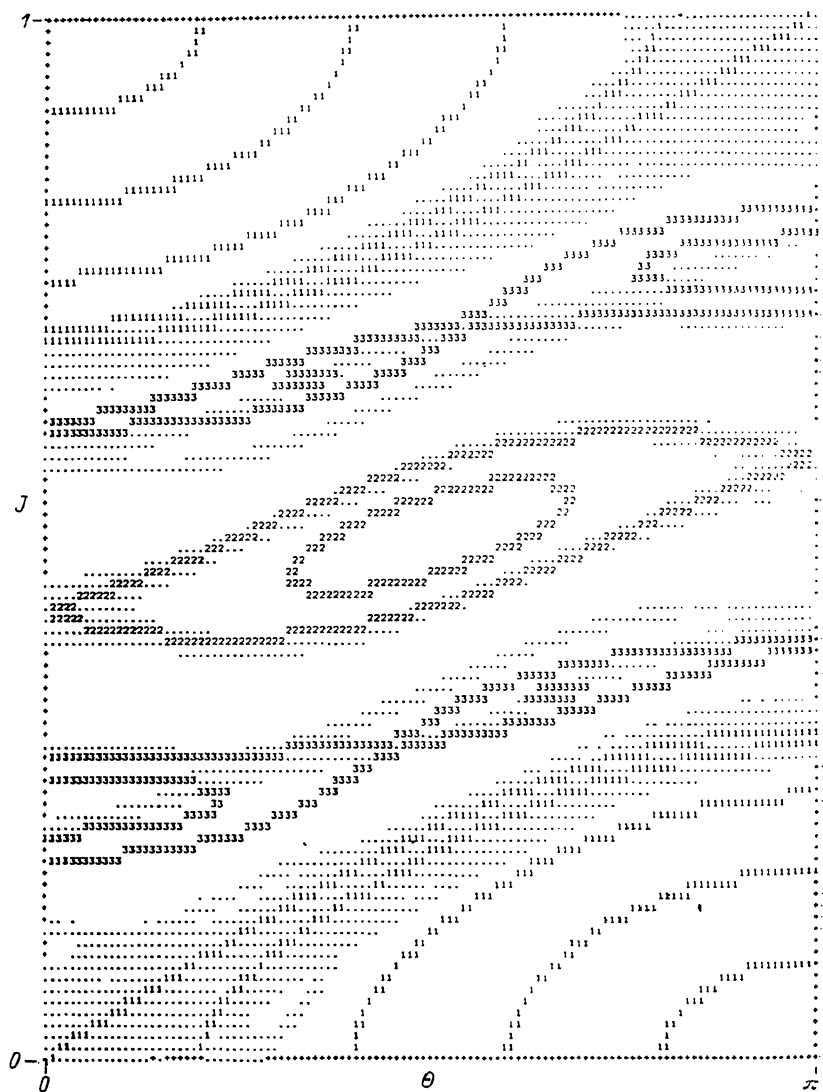


Рис. 2. Сопоставление результатов численного счета (точки) и применения ДЛТ инвариантов (цифры) для сямметризованного стандартного отображения (3. 2) при $K=0.9$.

Точками представлены стохастические слои резонансов. Цифры, которыми изображены линии, означают порядок использованных при построении этих линий инвариантов.

В нашем случае естественным является выбор для инварианта первого порядка (3. 4)

$$r'_0 = \pi \sin(\pi J), \quad (3. 7)$$

для инварианта второго порядка (3. 5)

$$r'_0(J) = \pi \sin^2(\pi J) \sin(2\pi J), \quad (3. 8)$$

для инварианта третьего порядка (3. 6)

$$r'_0(J) = \pi \sin^2(\pi J) \sin^2(2\pi J) \sin(3\pi J). \quad (3. 9)$$

Заметим, что зависимости (3. 7) и (3. 8) точно совпадают с найденными в работе [5].

ДЛТ инвариант любого порядка m не имеет особенностей на всей фазовой плоскости. Оказывается, однако, что он правильно передает топологию только тех резонансов, которые впервые появляются именно в m -м порядке. Это важное и не получившее пока надежного объяснения обстоятельство было обнаружено в работе [5], где ДЛТ инвариант первого порядка хорошо описывал все целые резонансы, а ДЛТ инвариант второго порядка сильно их искажал, но обеспечивал хорошее описание всех полужелых резонансов. Для получения глобальной фазовой картины в m -м порядке необходимо, таким образом, использовать полный набор S_1, S_2, \dots, S_m ДЛТ инвариантов, каждый из которых отвечает за «свою» часть фазового пространства (рис. 2).

Из рис. 2 видно, что размеры и расположение трех резонансов переданы с помощью ДЛТ инвариантов удовлетворительно, хотя величина параметра возмущения $K=0.9$ близка к порогу возникновения глобальной стохастичности $K_0 \approx 1$. Вместе с тем качество описания третьего резонанса заметно хуже, чем первых двух. Вероятно, существует нулевое приближение $R(J, \varepsilon)$, отличное от задаваемого формулами (3.3), (3.9) и позволяющее улучшить ситуацию, но способ его отыскания пока не разработан.

4. Производящие функции и резонансные гамильтонианы стандартного отображения

Выше интеграл $S_m(J, \theta, t)$ записывался в исходных переменных. Существует близкое к тождественному каноническое преобразование $J, \theta \rightarrow I, \psi$, при котором $S_m(J, \theta, t)$ оказывается функцией $F_m(I)$ только нового действия. Это преобразование можно задать, указав либо производящую функцию Ли [4, 5]

$$W(J, \theta, t; \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \frac{\varepsilon^k}{k!} W_{k+1}(J, \theta, t), \quad (4.1)$$

либо обычную производящую функцию от смешанного набора старых и новых переменных [1]

$$Q(I, \theta, t; \varepsilon) = I\theta + \sum_{k \geq 1} \frac{\varepsilon^k}{k!} Q_k(I, \theta, t). \quad (4.2)$$

Знание одной из этих функций равносильно знанию другой, поскольку между ними существует соотношение эквивалентности [8]

$$W\left(I, \theta + \frac{\partial Q}{\partial I}, t; \varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q(I, \theta, t; \varepsilon). \quad (4.3)$$

Вначале попытаемся найти несколько первых членов ряда (4.1). В теории преобразований Ли подробная запись равенства

$$F_m(I) = \sum_{k \geq 0} (\varepsilon^k/k!) f_k(I) = S_m(J, \theta, t)$$

выглядит так [4, 5]:

$$\begin{aligned} F_m[I(J, \theta, t)] = & f_0 + \varepsilon \{f_1 + [f_0, W_1]\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \{f_2 + 2[f_1, W_1] + \\ & + [[f_0, W_1], W_1] + [f_0, W_2]\} + \frac{\varepsilon^3}{6} \{f_3 + 3[f_2, W_1] + 3[[f_1, W_1], W_1] + \\ & + 3[f_1, W_2] + [f_0, W_3] + [[f_0, W_1], W_2] + [[[f_0, W_1], W_1], W_1] + \\ & + 2[[f_0, W_2], W_1]\} + O(\varepsilon^4) = S_m(J, \theta, t). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Подстановка в правую часть этого соотношения $S_3(J, \theta, t)$ по формуле (3.6) дает возможность последовательно в каждом порядке найти функции $W_k, f_k, k=1, 2, 3$ ($\Omega = \Theta + (\pi - \tau)J$)

$$\begin{aligned} W_1 = & -\frac{\sin \Omega}{2 \sin(\pi J)}, \quad W_2 = \frac{\pi \sin(2\Omega)}{8 \sin^2(\pi J) \sin(2\pi J)}, \quad W_3 = -\left[\frac{\pi}{4 \sin(\pi J) \sin(2\pi J)} \right]^2 \times \\ & \times \left[\frac{\varepsilon^2 + \cos(2\pi J)}{\sin(3\pi J)} \sin(3\Omega) + \frac{\cos(2\pi J)(2 \cos(2\pi J) + 3)}{\sin(\pi J)} \sin \Omega \right], \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$f_0 = r_0(I), \quad f_1 = f_3 = 0, \quad f_2 = \frac{1}{8 \sin^2(\pi I)}. \quad (4.6)$$

Соотношения (4.3), (4.5) позволяют получить первые три члена ряда (4.2) (здесь обозначено $\bar{\Omega} = \Theta + (\pi - \tau)I$)

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{\sin \bar{\Omega}}{2 \sin(\pi I)}, \quad Q_2 = \frac{1}{4 \sin^2(\pi I)} \left[(\pi - \tau) \cos^2 \bar{\Omega} - \frac{\pi \sin(2\bar{\Omega}) \cos(2\pi I)}{2 \sin(2\pi I)} \right], \\ Q_3 &= -\left[\frac{\pi}{4 \sin(\pi I) \sin(2\pi I)} \right]^2 \left\{ \left[\frac{2 + \cos(2\pi I)}{\sin(3\pi I)} + \frac{3 \cos^2(2\pi I) - 1}{2 \sin(\pi I)} \right] \sin(3\bar{\Omega}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(\cos(2\pi I) + 1)^2}{2 \sin(\pi I)} \sin \bar{\Omega} \right\} + \frac{3\pi(\pi - \tau) \cos(2\pi I)}{16 \sin^3(\pi I) \sin(2\pi I)} (\cos(3\bar{\Omega}) + \cos \bar{\Omega}) + \\ &\quad + \frac{3(\pi - \tau)^2}{32 \sin^3(\pi I)} (\sin(3\bar{\Omega}) + \sin \bar{\Omega}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Обе найденные таким образом производящие функции полезны при исследовании отображений. С помощью Q , например, удобно строить инвариантные кривые $I = \text{const}$, явное уравнение которых имеет вид

$$J(I, \Theta, t) = \partial Q(I, \Theta, t) / \partial \Theta.$$

Знание W сильно упрощает всякие преобразования от одних переменных к другим и позволяет, в частности, написать выражения для резонансных гамильтонианов. Преобразованный с точностью $\sim \varepsilon^3$ гамильтониан (3.1) должен быть функцией только нового действия I и иметь вид суммы

$$H_3(I) = \frac{I^2}{2} + \sum_{k=1}^3 \frac{\varepsilon^k}{k!} h_k(I), \quad (4.8)$$

первый член которой определен вследствие близости преобразования к тождественному. Чтобы записать H_3 в старых переменных, можно снова обратиться к формуле (4.4), заменив в ней f_k на h_k . Неизвестные функции $h_k(I)$ нужно угадать исходя из желания избежать сингулярностей вблизи целого резонанса $J = J_r = 0$. Этого можно добиться многими способами, например так:

$$h_1(I), h_3(I) \equiv 0, \quad h_2(I) = \frac{1}{8 \sin^2(\pi I)}. \quad (4.9)$$

Для нового гамильтониана, используя соотношения (4.5) и (4.9), находим ($\varepsilon = K/2\pi$)

$$\begin{aligned} H_3 &= \frac{J^2}{2} + \left[\frac{K}{8\pi \sin(\pi I)} \right]^2 = \frac{J^2}{2} + \frac{K^2}{32\pi^2} \frac{\sin(\pi J) - \pi J \cos(\pi J)}{\sin^3(\pi J)} + \\ &+ \frac{K}{4\pi} \frac{J}{\sin(\pi J)} \cos \bar{\Omega} + \left(\frac{K}{8\pi} \right)^2 \frac{\sin(2\pi J) - 2\pi J}{\sin^2(\pi J) \sin(2\pi J)} \cos(2\bar{\Omega}) + \frac{K^3}{256\pi^2} \left\{ \left[\frac{\cos(3\bar{\Omega})}{\sin(3\pi J)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{\cos \bar{\Omega}}{\sin(\pi J)} \right] \frac{2\pi J [1 + \cos(2\pi J) + \cos^2(2\pi J)] - \sin(2\pi J) - \sin(4\pi J)}{\sin^2(\pi J) \sin^2(2\pi J)} + \\ &\quad \left. + \frac{2\pi J [2 + \cos(2\pi J)] - 3 \sin(2\pi J)}{\sin^5(\pi J)} \cos \bar{\Omega} \right\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Поскольку $H_3(J, \Theta, t)$ есть интеграл системы (3.1), то он может быть найден прямо из общей формулы (7.4) Приложения 2, если принять

$$r_0 = \frac{J^2}{2}, \quad r_2 = \frac{\sin(\pi J) - \pi J \cos(\pi J)}{4 \sin^3(\pi J)}, \quad r_1, r_j \equiv 0, \quad j \geq 3.$$

Заметим, что гамильтониан $\sim K^2$, входящий в выражение (4.10), совпадает с полученным Соколовым [9].

Чтобы найти гамильтонианы, не содержащие особенностей вблизи другого целого $J_r = p$ или дробного $J_r = p + 1/2$, $p \pm 1/3$ резонанса (p — целое число), надо в (3.1) выполнить замену переменных $J, \Theta \rightarrow \mathcal{J}, \varphi$ с помощью произво-

дядей функции $\Phi = (\mathcal{P} + Jr) [\Theta + \pi(-\tau) J_r]$ и вновь проделать вычисления настоящего раздела. В результате в формулах (4. 5), (4. 10) аргументы тригонометрических функций πJ и $\Theta + (\pi - \tau) J$ заменяются на $\pi (\mathcal{P} + J_r)$ и $\varphi + (\pi - \tau) \mathcal{P}$ соответственно, а вместо свободно входящего действия J встанет \mathcal{P} . Учитывая это, можно из (4. 10) сразу получить правильные резонансные гамильтонианы третьего порядка системы (3. 1) и провести исследование резонансов $J_p = p_1, p \pm 1/2, p \pm 1/3$. Всегда возникающий в подобных случаях вопрос о точности и области пригодности полученных приближенных выражений надежно может быть решен только сравнением с результатами численного счета. Такое сравнение в отношении содержащихся в формуле (4. 10) инвариантов первого и второго порядков стандартного отображения проведено в работе [10].

Заключение

Инварианты канонических отображений тесно связаны с интегралами движения гамильтоновых систем специального вида. В работе сделана попытка предложить вариант теории возмущений, учитывающий в полной мере специфику таких систем.

Если возмущение содержит конечное число гармоник, то инвариантам младших порядков $m=1, 2, 3, \dots$ часто удается придать форму ДЛТ, удобную для применения эффективного критерия перекрытия резонансов [2, 5]. Однако даже в рассмотренном выше случае одной гармоники асимптотические свойства метода ДЛТ неясны: при $m \rightarrow \infty$ определяющая функция $r'_0(J)$ (см. (3. 7) — (3. 9)) должна, оставаясь аналитической, проходить через нуль при любом рациональном J , что превращает ее в тождественный нуль [5]. Точно такая же ситуация возникает уже в первом порядке (см. (2. 7)), когда ряд Фурье возмущающей функции $V(\Theta)$ бесконечен (факт, отмеченный в § 2.4 г книги [1]).

Знание интегралов движения позволяет восстановить производящие функции соответствующего преобразования переменных, написать явные выражения для инвариантных кривых и построить резонансные гамильтонианы. Этот путь представляется достаточно перспективным для продвижения в высокие порядки теории возмущений, поскольку он связан с устранением не всех (как в методе ДЛТ), а лишь части особенностей.

Описанный подход может быть обобщен на системы вида $H_0(J) + \varepsilon V(J, \Theta) \times \times \delta_*(t)$, эквивалентные так называемым неявным отображениям поворота [1, § 3.1].

Автор благодарен Б. В. Чирикову, В. В. Соколову и М. Б. Севрюку за обсуждения и советы.

Приложение 1

Вычисление обобщенных производных

При интегрировании уравнения (2. 6) возникают ряды вида

$$I(J, \Theta, t) = \frac{A(J)}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(m\theta - kt - \alpha)}{m\omega(J) - k}, \quad \alpha = 0; \pi/2,$$

которые на любом интервале $0 < \tau = t \pmod{2\pi} < 2\pi$ сходятся к функции (формулы 5. 4. 5 (1) и (5) в [11])

$$I(0 < \tau < 2\pi) = \frac{A(J)}{\sin[\pi m\omega(J)]} \cos[m\theta + (\pi - \tau)m\omega(J) - \alpha].$$

Вдоль траекторий (1. 3) системы (1. 2) имеем $I(0 < \tau < 2\pi) = \text{const}$, а величина совершаемого этой ступенчатой функцией при $t = t_n$ скачка равна (рис. 1)

$$\begin{aligned} \Delta I(t_n) &= \frac{A(J_{n+1})}{\sin[\pi m\omega(J_{n+1})]} \cos[m\theta_n + \pi m\omega(J_{n+1}) - \alpha] - \\ &\quad - \frac{A(J_n)}{\sin[\pi m\omega(J_n)]} \cos[m\theta_n - \pi m\omega(J_n) - \alpha]. \end{aligned}$$

Обобщенная производная обусловлена только скачками и может быть найдена по формуле [6, § 2]

$$\frac{DI}{Dt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_n) \Delta I(t_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_n) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[-\varepsilon \frac{dV}{d\Theta}(\Theta_n) \right]^k \times \right. \\ \left. \times [\cos(m\Theta_n - \alpha) B^{(k)}(J_n) - \sin(m\Theta_n - \alpha) A^{(k)}(J_n)] - 2A(J_n) \sin(m\Theta_n - \alpha) \right\},$$

здесь обозначено $B(J) = A(J) \operatorname{ctg}[\pi m \omega(J)]$ и учтено первое из уравнений (1.1).

Приложение 2

Интегралы движения первых трех порядков системы (3.1)

При практическом построении интеграла m -го порядка $S_m(J, \Theta, t)$ по формуле (2.1) и выборе частных решений уравнений вида (2.6) удобно руководствоваться дополнительными условиями

$$R(J, \varepsilon) = \langle S_m(J, \Theta, t) \rangle, \quad \langle G_n(J, \Theta, t) \rangle \equiv 0, \quad 1 \leq n \leq m,$$

где

$$\langle \dots \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots d\Theta$$

— среднее по Θ . Обобщенная производная интеграла $R(J, \varepsilon)$ нулевого порядка равна (см. формулы (2.4), (2.5))

$$\frac{DR}{Dt} = \delta_*(t) \left\{ \varepsilon r'_0 \sin \Theta + \frac{\varepsilon^2}{2} (r''_0 \sin^2 \Theta + 2r'_1 \sin \Theta) + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^3}{6} (r'''_0 \sin^3 \Theta + 3r''_1 \sin^2 \Theta + 3r'_2 \sin \Theta) + O(\varepsilon^4) \right\},$$

где $\varepsilon = K/2\pi$, штрих означает производную по J .

Применяя схему п. 2, Приложение 1 и учитывая формулы (2.1), (2.3) и (2.8), в первом порядке по ε имеем

$$\frac{\partial G_1}{\partial \tau} + J \frac{\partial G_1}{\partial \Theta} = -\delta_*(t) r'_0 \sin \Theta, \\ G_1(J, \Theta, t) = \frac{r'_0(J)}{2 \sin(\pi J)} \cos \Omega, \quad (\text{П 2.1}) \\ \varepsilon \frac{DG_1}{Dt} = \varepsilon \delta_*(t) \left[-r'_0 \sin \Theta - \frac{\varepsilon}{2} r''_0 \sin^2 \Theta - \frac{\varepsilon^2}{4} r'''_0 \sin^3 \Theta + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon}{4} a'_{1,0} \sin 2\Theta + \frac{\varepsilon^2}{8} a''_{1,0} \sin \Theta \sin 2\Theta + O(\varepsilon^3) \right].$$

В последнем выражении и ниже встречаются функции

$$a_{0,q} = r'_q(J), \quad a_{p+1,q} = a_{p,q} \operatorname{ctg}[\pi(p+1)J], \quad q, p \geq 0.$$

Во втором порядке

$$\frac{\partial G_2}{\partial \tau} + J \frac{\partial G_2}{\partial \Theta} = -\delta_*(t) \left(2r'_1 \sin \Theta + \frac{a'_{1,0}}{2} \sin 2\Theta \right), \\ G_2(J, \Theta, t) = \frac{r'_1(J)}{\sin(\pi J)} \cos \Omega + \frac{a'_{1,0}(J)}{4 \sin(2\pi J)} \cos(2\Omega), \quad (\text{П 2.2})$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \frac{DG_2}{Dt} = \frac{\varepsilon^2}{2} \hat{\delta}_*(t) \left[-2r'_1 \sin \Theta - \varepsilon r''_1 \sin^2 \Theta + \frac{\varepsilon}{4} a'_{1,1} \sin 2\Theta - \right. \\ \left. \frac{a'_{1,0}}{2} \sin 2\Theta + \frac{\varepsilon}{4} a'_{2,0} \sin \Theta \cos 2\Theta - \frac{\varepsilon}{4} a''_{1,0} \sin \Theta \sin 2\Theta + O(\varepsilon^2) \right].$$

В третьем порядке

$$\frac{\partial G_3}{\partial \tau} + J \frac{\partial G_3}{\partial \Theta} = -\hat{\delta}_*(t) \sin \Theta \left[3r'_2 - \frac{r''_0}{2} \sin^2 \Theta + \frac{3a'_{1,1}}{2} \cos \Theta + \frac{3a'_{2,0}}{4} \cos 2\Theta \right], \\ G_3(J, \Theta, t) = \frac{3}{16} \frac{3r'_2 - a'_{2,0} - r''_0}{\sin(\pi J)} \cos \Omega + \\ + \frac{3}{8} \frac{a'_{1,1}}{\sin(2\pi J)} \cos(2\Omega) + \frac{3a'_{2,0} + r''_0}{16 \sin(3\pi J)} \cos(3\Omega), \quad (\text{П 2.3}) \\ \frac{\varepsilon^3}{6} \frac{DG_3}{Dt} = \frac{\varepsilon^3}{6} \hat{\delta}_*(t) \left[-3r'_2 \sin \Theta - \frac{3}{4} a'_{1,1} \sin 2\Theta - \right. \\ \left. \frac{3a'_{2,0} + r''_0}{8} \sin 3\Theta + \frac{3}{8} (a'_{2,0} + r''_0) \sin \Theta + O(\varepsilon) \right].$$

Интегралы первых трех порядков можно записать в общем виде с помощью формул (2.1), (П 2.1)—(П 2.3). Для S_3 , например, имеем

$$S_3(J, \Theta, t) = r_0 + \varepsilon(r_1 + G_1) + \frac{\varepsilon^2}{2}(r_2 + G_2) + \frac{\varepsilon^3}{6}(r_3 + G_3). \quad (\text{П 2.4})$$

Конкретные выражения, как отмечалось, определяются заданием интеграла нулевого порядка $R(J, \varepsilon)$ по формуле (2.4).

Литература

- [1] Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
- [2] Chirikov B. V. Phys. Rep., 1979, v. 52, p. 265—379.
- [3] Dragt A. J., Finn J. M. J. Math. Phys., 1976, v. 17, N 12, p. 2215—2227.
- [4] Джакалья Г. Е. О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.
- [5] McNamara B. J. Math. Phys., 1978, v. 19, N 10, p. 2154—2164.
- [6] Гельфонд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: ГИФМЛ, 1958. 439 с.
- [7] Dunnet D. A., Laing E. W., Taylor J. B. J. Math. Phys., 1968, v. 9, N 11, p. 1819—1823.
- [8] Mersman W. A. Celest. Mech., 1971, N 3, p. 384—389.
- [9] Соколов В. В. Препринт ИЯФ СО АН СССР, № 85-31. Новосибирск, 1985. 23 с.
- [10] Izrailov F. M., Sokolov V. V. Phys. Lett., 1985, v. 112A, N 6, 7, p. 254—258.
- [11] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1984. 798 с.

Институт ядерной физики
СО АН СССР
Новосибирск

Поступило в Редакцию
14 июля 1986 г.