1988 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 58, в. 1
1988 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 58, № 1

УДК 537.533.7

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ ПРИ КОМПЕНСАЦИИ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

А. С. Артамонов, Н. И. Иноземцев

Рассматривается многократное рассеяние электронов, распространяющихся вдоль однородного электрического поля при наличии реверсивной фокусировки. Показано, что в случае компенсации потерь энергии электрическим полем устанавливается стационарное распределение электронов в сечении, перпендикулярном направлению их распространения. Приведены параметры этого распределения. Рассмотрен численный пример.

Транспортировка пучков заряженных частиц в рассеивающих средах на большие расстояния без заметного увеличения их поперечных размеров возможна только при наличии поперечной фокусировки, противодействующей силе рассеивающих центров. Если, кроме того, с помощью электрического поля удается компенсировать потери энергии, то возможно установление стационарного распределения заряженных частиц в сечении, перпендикулярном направлению их распространения. Распределение электронов пучка по энергии будет также стационарным, если линейные потери импульса являются возрастающей функцией энергии. Это условие выполняется в области релятивистских скоростей.

Одна из таких возможностей изучалась в работе [1], где в качестве поперечной фокусирующей силы рассматривалась сила со стороны аксиально-симметричного магнитного поля прямого тока.

В настоящей работе мы рассмотрим другую возможность реализации стационарного распространения пучков заряженных частиц с использованием реверсивной фокусировки [2]. Этот тип фокусировки при его относительной простоте может оказаться эффективным средством для транспортировки пучков на большие расстояния в рассеивающих средах.

Пусть релятивистские электроны распространяются в рассеивающей среде вдоль оси z декартовой системы координат. Вдоль этой же оси направлены векторы однородного электрического и кусочно-однородного магнитного полей. Предположим, что вдоль всего пути распространения скорость частиц $|\mathbf{v}|$ постоянна, а угол отклонения ее от оси z мал. Кроме того, предположим, что электрическое поле $\mathbf{E}$ и магнитное поле $\mathbf{B}$ достаточно слабы и не меняют сечения рассеяния частиц на отдельном атоме.

Решая задачу в диффузионном приближении [1, 3, 4], запишем уравнения движения заряженной частицы под действием внешних полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, силы трения $\varepsilon\mathbf{v}$, обусловленной потерями энергии и случайной силы рассеивающих центров $\mathbf{f}$

$$\frac{dx}{dz}=\theta_x,\quad \frac{dy}{dz}=\theta_y,\quad \frac{dp}{dz}=\frac{eE}{v}-\varepsilon(p),$$

$$vp\frac{d\theta_x}{dz}=eBv\theta_y-eE\theta_x+f_x(z),$$

$$vp\frac{d\theta_y}{dz}=-eBv\theta_x-eE\theta_y+f_y(z), \qquad (1)$$

здесь e, p — заряд и импульс частицы; f_x и f_y — проекции случайной силы рассеивающих центров, представленные как компоненты нормального белого шума

$$\langle f_x \rangle = \langle f_y \rangle = \langle f_x f_y \rangle = 0,$$
$$\langle f_x(z_1) f_x(z_2) \rangle = \langle f_y(z_1) f_y(z_2) \rangle = \frac{E_s^2}{2X_0}\delta(z_2 - z_1) \equiv L_0^2 \delta(z_2 - z_1),$$

где $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака; E_s — константа с размерностью энергии ~ 15.5 МэВ; X_0 — радиационная длина в рассеивающей среде.

Для простоты мы ограничимся рассмотрением периодической с периодом $2L$ системы соленоидов, период которой состоит из двух соленоидов одинаковой длины L, и полями, равными по величине, но имеющими противоположные направления относительно скорости движения частиц. В такой системе магнитных полей существует краевая фокусировка: частицы, имеющие поперечное смещение от оси соленоида, на краях последнего приобретают поперечный импульс из-за действия радиального магнитного поля. Следовательно, в знакопеременном продольном магнитном поле при компенсации потерь энергии электрическим полем должно существовать стационарное распределение заряженных частиц в плоскости, перпендикулярной направлению их распространения.

Стационарная функция распределения $F_s(\mathbf{r}_\perp, \boldsymbol{\theta}, z)$ будет, очевидно, периодической функцией z с периодом $2L$. Это утверждение в равной степени относится и к корреляционным моментам функции распределения F_s

$$\langle \eta(z)\eta^*(z) \rangle, \quad \langle \mu(z)\mu^*(z) \rangle, \quad \langle \mu^*(z)\eta(z) \rangle,$$

где

$$\mu = x + iy, \quad \eta = \theta_x + i\theta_y.$$

Мы используем это условие для определения корреляционных моментов стационарной функции распределения F_s в начале периода рассматриваемой нами фокусирующей системы, зная которые можно определить корреляционные моменты, а следовательно, и выражение для F_s при любом значении z.

Нахождение моментов можно существенно упростить, если заметить, что уравнения движения (1) инвариантны относительно замены

$$B \to -B, \quad x \to -x, \quad \theta_x \to -\theta_x, \quad f_x = -f_x.$$

Отсюда следует, что имеют место следующие соотношения, связывающие значения корреляционных моментов при $z=0$ и $z=L$:

$$\langle \eta^*\eta \rangle_{z=0} = \langle \eta^*\eta \rangle_{z=L}, \quad \langle \mu\mu^* \rangle_{z=0} = \langle \mu\mu^* \rangle_{z=L},$$
$$\langle \eta^*\mu \rangle_{z=0} = \langle \eta\mu^* \rangle_{z=L}. \tag{2}$$

В случае компенсации потерь энергии однородным электрическим полем ($eE/v = \varepsilon$) с помощью системы стохастических дифференциальных уравнений (1) получим

$$\eta_{z=L} = \eta_{z=0} e^{-i\omega L} + e^{-i\omega L} \int_0^L dz e^{i\omega z} F(z) + i\bar{\omega}\mu_{z=L}, \tag{3}$$

$$\mu_{z=L} = \mu_{z=0} + \frac{i}{\omega}(e^{-i\omega L} - 1)\eta_{z=0} + \int_0^L dz e^{-i\omega z} \int_0^z dz_1 e^{i\omega z_1} F(z_1), \tag{4}$$

где

$$\omega = \frac{eB}{pc} - i\frac{eE}{pv} \equiv \bar{\omega} - i\lambda, \quad F = \frac{1}{pv}(f_x + if_y).$$

Последний член в уравнении (3) связан с мгновенным изменением поперечного импульса частицы при прохождении участка фокусирующей системы, где магнитное поле меняет знак, т. е. при переходе из одного соленоида в другой.

Такое представление краевого эффекта является правильным, если длина шага ларморовской спирали много больше поперечного размера соленоидов.

Используя выражения (3), (4), перепишем условия (2) на корреляционные моменты функции распределения в виде

$$
\begin{gathered}
(1-e^{-2\lambda L})\,\eta_0^2+\bar{\omega}^2\mu_0^2+i\bar{\omega}\,(\mu\eta_0^*-\mu^*\eta_0)=\eta^2,\\
(e^{-i\omega L}-1)(e^{i\omega^* L}-1)\,\eta_0^2-i\omega\,(e^{i\omega^* L}-1)\,\mu\eta_0^*+i\omega^*(e^{-i\omega L}-1)\,\mu^*\eta_0=-|\omega|^2\mu^2,\\
ie^{-i\omega L}(e^{i\omega^* L}-1)\,\eta_0^2-i\bar{\omega}\omega^*\mu_0^2-\omega^* e^{-i\omega L}\mu^*\eta_0+\omega^*\mu\eta_0=\omega^*\mu^*\eta,\\
ie^{i\omega^* L}(e^{-i\omega L}-1)\,\eta_0^2-i\bar{\omega}\omega\mu_0^2+\omega e^{i\omega^* L}\mu\eta_0^*-\omega\mu^*\eta_0=-\omega\mu\eta^*.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$
\eta_0^2=\langle\eta\eta^*\rangle_{z=0},\quad \mu_0^2=\langle\mu\mu^*\rangle_{z=0},\quad \mu\eta_0^*=\langle\mu\eta^*\rangle_{z=0},\quad \mu^*\eta_0=\langle\mu^*\eta\rangle_{z=0},
$$
$$
\eta^2=\frac{L_0^2}{\lambda p^2v^2}(1-e^{-2\lambda L}),
$$
$$
\mu\eta^*=(\mu^*\eta)^*=\frac{iL_0^2}{\lambda p^2v^2}\,e^{i\omega^* L}\left[\frac{1}{\omega^*}(e^{-i\omega^* L}-1)-\frac{1}{\omega}(e^{-i\omega L}-1)\right],
$$
$$
\mu^2=\frac{L_0^2}{\lambda p^2v^2}\left[\frac{1+2\lambda L-e^{-2\lambda L}}{|\omega|^2}-\frac{4\lambda^2}{|\omega|^4}+e^{-i\omega L}\left(\frac{1}{|\omega|^2}-\frac{1}{\omega^2}\right)+e^{i\omega^* L}\left(\frac{1}{|\omega|^2}-\frac{1}{(\omega^*)^2}\right)\right].
$$

Решая систему уравнений (5) относительно η_0^2, μ_0^2, $\mu\eta_0^*$, $\mu^*\eta_0$, получим

$$
\begin{gathered}
\eta_0^2=\frac{|\omega|^2\mu^2+2\eta^2+i\,(\omega\mu\eta^*-\omega^*\mu^*\eta)}{1-e^{-2\lambda L}},\\
\mu\eta_0^*=(\mu^*\eta_0)^*=\frac{i}{\bar{\omega}\,(e^{i\omega^* L}-1)}\left\{\eta^2+i\bar{\omega}\mu\eta^*-\left[\frac{\bar{\omega}}{\omega}\,e^{i\omega^* L}(e^{-i\omega L}-1)+1-e^{-2\lambda L}\right]\eta_0^2\right\},\\
\mu_0^2=\frac{1}{\bar{\omega}^2}\left[\eta^2-(1-e^{-2\lambda L})\,\eta_0^2-i\bar{\omega}\,(\mu\eta_0^*-\mu^*\eta_0)\right].
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Существование конечных значений корреляционных моментов при $z=0$ означает, что действительно существует стационарное состояние пучка заряженных частиц, описываемое функцией распределения, периодической с периодом $2L$. Отметим, что эта функция имеет гауссов характер и полностью определяется найденными выше корреляционными моментами второго порядка [1, 3].

Выражения (6) существенно упрощаются в практически интересном случае $\lambda/\bar{\omega}\ll 1$, $\lambda L\ll 1$, что соответствует относительно малому ларморовскому периоду движения частиц в соленоиде и относительно большой длине торможения в рассеивающей среде

$$
\begin{gathered}
\eta_0^2\equiv\langle\theta^2\rangle=2L_0^2/\lambda p^2v^2,\\
\mu_0^2\equiv\langle\mathbf{r}_\perp^2\rangle=4L_0^2/\lambda\bar{\omega}^2p^2v^2,\\
\mu\eta_0^*-i\,|\langle[\mathbf{r}_\perp\cdot\theta]\rangle|=2iL_0^2/\lambda\bar{\omega}p^2v^2.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Заметим, что в тех же обозначениях выражения для среднеквадратичного угла рассеяния и радиуса пучка заряженных частиц в однородном магнитном поле при компенсации потерь энергии электрическим полем имеют вид [2]

$$
\langle\theta^2\rangle=L_0^2/\lambda p^2v^2,\quad \langle\mathbf{r}_\perp^2\rangle=2L_0^2z/\bar{\omega}^2p^2v^2.
\tag{8}
$$

Сравнение выражений (7) и (8) показывает, что в кусочно-однородном магнитном поле среднеквадратичный угол рассеяния оказывается несколько бо́льшим из-за действия на заряженные частицы радиального магнитного поля на стыке двух соленоидов. Этот же эффект приводит к фокусировке и установлению среднеквадратичного радиуса $\langle\mathbf{r}_\perp^2\rangle$, который в рассматриваемом нами случае практически не изменяется внутри периода фокусирующей системы, в то время как в однородном магнитном поле среднеквадратичный размер пучка при больших z растет линейно с пройденным расстоянием.

Рассмотрим численный пример. Пусть электроны с кинетической энергией 2 МэВ распространяются в гелии при нормальных условиях: $X_0=5.2\cdot 10^3$ м,

$E_s=15.5$ МэВ. Ионизационные потери энергий компенсируются электрическим полем $E=4\cdot10^4$ В/м. Реверсивная фокусировка осуществляется системой соленоидов длиной $L=100$ см и магнитным полем $B=10$ кГс. Тогда при $z\geqslant 100$ м устанавливается стационарное распределение заряженных частиц в сечении, перпендикулярном их распространению со среднеквадратичным радиусом $\langle r_\perp^2\rangle=0.76\cdot10^{-4}$ м^2 и среднеквадратичным углом рассеяния $\langle\theta^2\rangle=0.46$ рад.^{2} Заметим, что если энергия электронов является достаточно большой, так что ее потери определяются радиационным взаимодействием с ядрами рассеивающей среды, то длина релаксации к стационарному состоянию оказывается равной X_0. При этом установившийся среднеквадратичный размер электронного пучка с логарифмической точностью не зависит от энергии электронов и равен $\langle r_\perp^2\rangle = 2E_s^2/(eBv)^2$, а среднеквадратичный угол оказывается обратно пропорциональным квадрату энергии частиц: $\langle\theta^2\rangle=E_s^2/p^2v^2$.

Рассмотренная в работе реверсивная магнитная система транспортировки заряженных частиц в рассеивающих средах не является единственно возможной. Ее использование разумно при относительно невысоких энергиях электронов — от нескольких МэВ до нескольких десятков МэВ. При более высоких энергиях целесообразно использовать систему квадрупольных линз (жесткую фокусировку) [6].

Существенное влияние на процесс многократного рассеяния может оказывать также собственное электромагнитное поле сильноточного пучка [7]. Результаты настоящей работы применимы к слаботочным электронным пучкам, т. е. при условии

$$\frac{Ip}{2\pi\varepsilon_0 e\langle r_\perp^2\rangle B^2v^2}\left[1-f^{э}-\beta^2(1-f^{м})\right]\ll 1,$$

здесь I — ток пучка электронов; $f^{э}$, $f^{м}$ — степени зарядовой и токовой нейтрализации соответственно; ε_0 — диэлектрическая проницаемость; $\beta=v/c$.

Литература

[1] *Артамонов А. С., Горбунов В. А.* ЖТФ, 1983, т. 53, № 1, с. 23—27.
[2] *Молоковский С. И., Сушков Л. Д.* Интенсивные электронные и ионные пучки. Л.: Энергия, 1972, с. 270.
[3] *Артамонов А. С., Горбунов В. А.* Препринт 80-117 ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1980, с. 15.
[4] *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977, с. 485.
[5] *Кляцкин В. И., Татарский В. И.* УФН, 1973, т. 10, № 4, с. 499—536.
[6] *Коломенский А. А., Лебедев А. Н.* Теория циклических ускорителей. М.: Физматгиз, 1962, с. 352.
[7] *Чихаев А. С.* ЖТФ, 1986, т. 56, № 10, с. 2062—2065.

Научно-исследовательский, проектно-конструкторский и технологический институт комплектного электропривода
Новосибирск

Поступило в Редакцию
22 августа 1986 г.
В окончательной редакции
23 июля 1987 г.