

УДК 53 : 51

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ РАЗРУШЕНИИ ДВУХЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В НЕАВТОНОМНОМ ГЕНЕРАТОРЕ

А. С. Дмитриев, С. О. Старков

Исследуются нелокальные явления, сопровождающие разрушение двухчастотных колебаний. Экспериментально обнаружено и подтверждено расчетами на математической модели, что при увеличении амплитуды внешнего воздействия разрушение эргодического тора с двухпетлевой структурой происходит в момент, когда петли тора почти касаются друг друга. Для случая воздействия внешнего сигнала на генератор с двумерным фазовым пространством рассматриваются нелокальные явления, связанные с разрушением двухчастотных колебаний при влипании двумерного тора в устойчивое многообразие седлового периодического движения.

Анализу воздействия внешней периодической силы на автоколебательные системы и возникающему при этом сложному поведению посвящено в последнее время значительное число расчетных, теоретических и экспериментальных исследований [1-10]. При этом был изучен ряд закономерностей разрушения двухчастотных колебаний через локальные бифуркации, в целом согласующихся с математическими результатами по классификации возможных сценариев разрушения двумерных торов [11].

Однако наряду с локальными эффектами в разрушении двухчастотных колебаний существенную роль могут играть нелокальные явления, связанные с наличием в фазовом пространстве системы дополнительных аттракторов, неустойчивых положений равновесия и сепаратрис. В этом случае при изменении параметров системы сепаратрисные поверхности, разделяющие фазовое пространство на ячейки, разрушаются с рождением нового типа поведения системы.

В данной работе простейшие явления этого типа изучаются в физическом и численном эксперименте на примере неавтономного кольцевого генератора с полутора степенями свободы.

1. Математическая модель и ее основные особенности

Кольцевой генератор с полутора степенями свободы [12-14] описывается уравнениями

$$T\dot{X} + X = F(Z), \quad \dot{Y} = X - Z + B \cos \omega t, \quad \dot{Z} = Y - \alpha Z, \quad (1)$$

где T — постоянная времени RC -фильтра; α — коэффициент линейной диссипации в RLC -фильтре; B , ω — амплитуда и частота внешнего сигнала. Ниже в математической модели рассматривается нелинейный элемент с характеристикой

$$F(Z) = MZ \exp(-(Z - \beta)^2). \quad (2)$$

Здесь M — параметр, прямо пропорциональный коэффициенту усиления элемента на линейном участке; β — параметр асимметрии. В экспериментальном макете генератора используется нелинейный элемент с характеристикой, ка-

ественно подобной (2) при больших значениях параметра β . Для $M > 1$ модель генератора при $B=0$ обладает тремя положениями равновесия

$$(X, Y, Z)_1 = (0, 0, 0), \quad (X, Y, Z)_{2,3} = (\beta \mp \sqrt{\ln M})(1, \alpha, 1). \quad (3)$$

Одно из них всегда неустойчиво, а два других могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми.

В автономном случае система (1) при $T=0$ вырождается в двумерный нелинейный осциллятор с линейным трением

$$\ddot{Z} + \alpha \dot{Z} + Z - F(Z) = 0, \quad (4)$$

при $T \ll 1$ является автоколебательной системой с эффективным двумерным фазовым пространством и сводится в первом приближении по T к уравнению типа Ван-дер-Поля

$$\ddot{Z} + \left(\alpha + T \frac{dF}{dZ}\right) \dot{Z} + (Z - F(Z)) = 0, \quad (5)$$

и, наконец, при $T \geq 1$ (1) — принципиально трехмерная система, обладающая при соответствующих значениях M и β хаотическим поведением.

Таким образом, в зависимости от значения параметра T эффективное фазовое пространство автономного генератора может быть как трехмерным, так и двумерным, что позволяет изучать на примере (1) нелокальные явления при разрушении двухчастотных колебаний, свойственные как существенно трехмерным, так и двумерным неавтономным автоколебательным системам.

2. Основные закономерности динамики неавтономной системы. Физический эксперимент

В экспериментах использовалась схема генератора, описанная в [14]. Внешний сигнал подавался на вход RLC-фильтра. Исходный режим автономного генератора представлял собой режим однократных предельных циклов вблизи

границы мягкого рождения двухтактных циклов, т. е. рассматривалась ситуация с трехмерным фазовым пространством, не сводимым к эффективному двумерному.

В плоскости параметров (ω, B) общая картина изменения колебательных режимов характеризуется наличием областей клявов синхронизации для резонансов низких порядков (наблюдались резонансы до 5-го порядка), областями эргодических биений и синхронизованных колебаний, близких, с экспериментальной точки зрения, к эргодическим биениям («квазиэргодические» режимы), областями удвоения резонансных циклов на торах, а также зонами, соответствующими странному аттрактору двух типов и многотактным аттракторам при больших интенсивностях внешнего сигнала.

Фрагмент двухпараметрической диаграммы в окрестности резонанса $2/3$ приведен на рис. 1. Выход из клява синхронизации в область эргодических биений происходит жестким образом через тангенциальную бифуркацию. Второй участок границы клява синхронизации связан с мягкой потерей устойчивости резонансного тора через бифуркацию удвоения периода колебаний. Экспериментально в области P_2 наблюдалось не более двух таких бифуркаций, после чего при трансверсальном пересечении границы области CA_x происходил переход к странному аттрактору CA первого типа (рис. 2, б). С левой стороны клява синхронизации имеется участок границы, при пересечении которого происходит

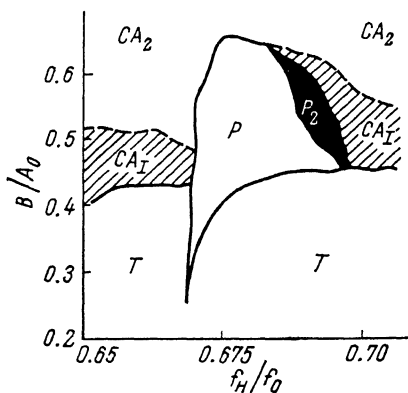


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма в окрестности резонанса $2/3$. Эксперимент.

A_0 — амплитуда колебаний в автономной системе. Обозначены области: P — резонанса, P_2 — колебаний удвоенного периода, T — квазипериодических колебаний, CA_1 — хаотических колебаний первого типа, CA_2 — многотактных циклов и узких зон хаоса.

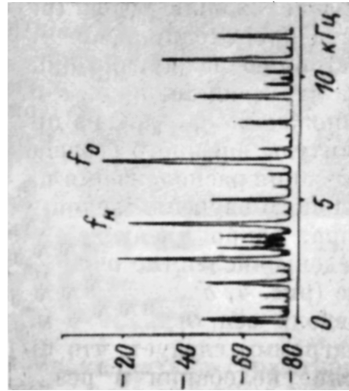
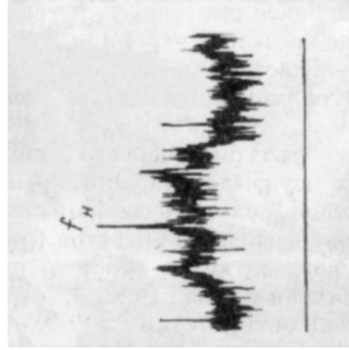
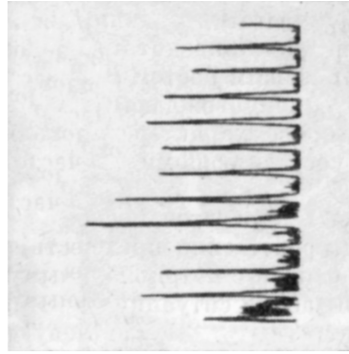
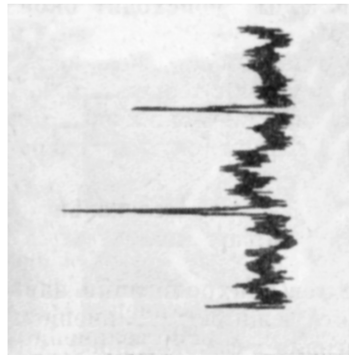
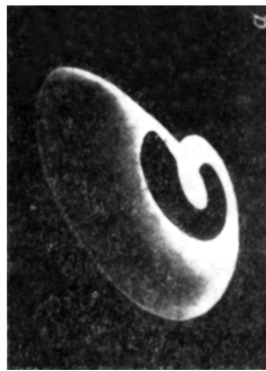
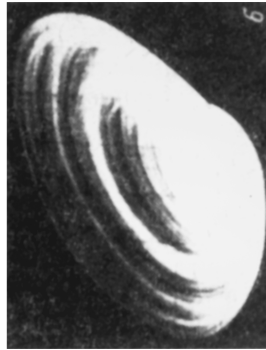
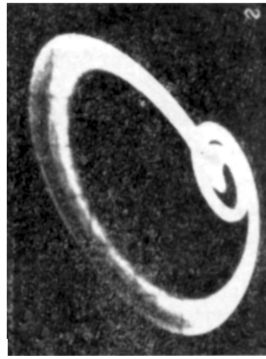


Рис. 2. Эволюция проекций фазовых портретов и спектров мощности и спектров поргетов и спектров амплитуды внешнего воздействия. Эксперимент.

жесткий переход к CA того же типа. Еще одна область на рис. 1 обозначена через CA_2 . Ей свойственны узкие зоны хаотических колебаний (со структурой CA , отличной от структуры CA в области CA_x) и многотактных циклов (рис. 2, в, г). Выше этой зоны происходит окончательная синхронизация колебаний внешним сигналом.

Отметим, что описанное поведение системы в клеве синхронизации и на его границах согласуется с теоремой о разрушении торов [11], а также с результатами численных и физических экспериментов по исследованию разрушения двухчастотных колебаний (см. например, [10]).

3. Нелокальная перестройка инвариантного множества аттрактора

Вне зоны клево́в синхронизации наиболее показательной является эволюция колебательного режима с увеличением амплитуды внешнего сигнала (рис. 2). При введении сигнала в фазовом пространстве системы рождается эргодический тор, а в спектре мощности возникают комбинационные составляющие частот автоколебаний f_0 и частоты накачки $f_n: f_0 - f_n, f_0 + f_n, 2f_0 - f_n$. Увеличение амплитуды внешнего сигнала приводит к обогащению спектра новыми составляющими (рис. 2, а). С дальнейшим ростом B происходит пересечение границы между областями T и CA_x , сопровождающееся жестким возникновением хаотического режима, для которого характерен довольно равномерный спектр мощности с выделенными составляющими на частоте накачки и ее второй гармоники (рис. 2, б).

Анализ фазовых портретов колебаний в области эргодических биений для значений B , непосредственно предшествующих критическому, показывает, что переход к хаосу связан с нетривиальным явлением, заключающимся в следующем. В рассматриваемой ситуации фазовый портрет тора, как и исходный цикл автономной системы, имеет двухпетлевую структуру (рис. 2, а). С ростом амплитуды внешнего воздействия происходит «разрушение» фазового портрета тора и сближение внешней и внутренней петель. Переход к хаосу фиксируется в тот момент, когда внешняя и внутренняя петли практически касаются друг друга. В спектральной области ему соответствует значение параметра, при котором амплитуды спектральных составляющих f_0 и f_n становятся сопоставимыми друг с другом.

Для анализа структурной перестройки инвариантного множества аттрактора при переходе к хаосу была разработана и реализована экспериментальная методика, позволяющая получать отображение сдвига (рис. 3, справа) и отображение сдвига на фоне фазовых портретов (рис. 3, слева). Тору при малых амплитудах внешнего воздействия в отображении сдвига соответствует гладкая инвариантная замкнутая кривая (рис. 3, а). При сближении петель инвариантная кривая теряет гладкость, но тор все еще существует (рис. 3, б). Возникновение CA характеризуется в отображении «расслоением» инвариантного множества и хаотизацией расположения точек (рис. 3, в). «Расслоение» инвариантного множества активно происходит на участке отображения, соответствующем минимальному расстоянию между петлями тора в момент, предшествующий возникновению CA , что свидетельствует о нелокальном характере перестройки инвариантного множества аттрактора при переходе к хаосу. При последующем увеличении амплитуды внешнего воздействия в пределах зоны CA_x происходит дальнейшая хаотизация расположения точек в отображении (рис. 3, г).

С целью детального изучения нелокальной перестройки инвариантного множества аттрактора, сопровождающей разрушение двумерного эргодического тора, были проведены численные расчеты на модели генератора.

На диаграмме (рис. 4, а) вдоль оси абсцисс отложена амплитуда внешнего воздействия, а вдоль оси ординат — максимумы компоненты колебательного процесса. Из диаграммы следует, что при $0 < B < B_1$ в системе реализуются квазипериодические колебания и резонансы высоких порядков (рис. 4, б). Переход к хаосу наступает при амплитуде внешнего воздействия, равной B_1 . Этому событию соответствует на рис. 4, а пересечение двух пучков точек, опирающихся на ось A . Возникновение хаоса, как и при экспериментальном ис-

следовании, сопровождается нелокальной перестройкой инвариантного множества аттрактора, выражающейся на диаграмме в виде появления третьего (нижнего) пучка точек.

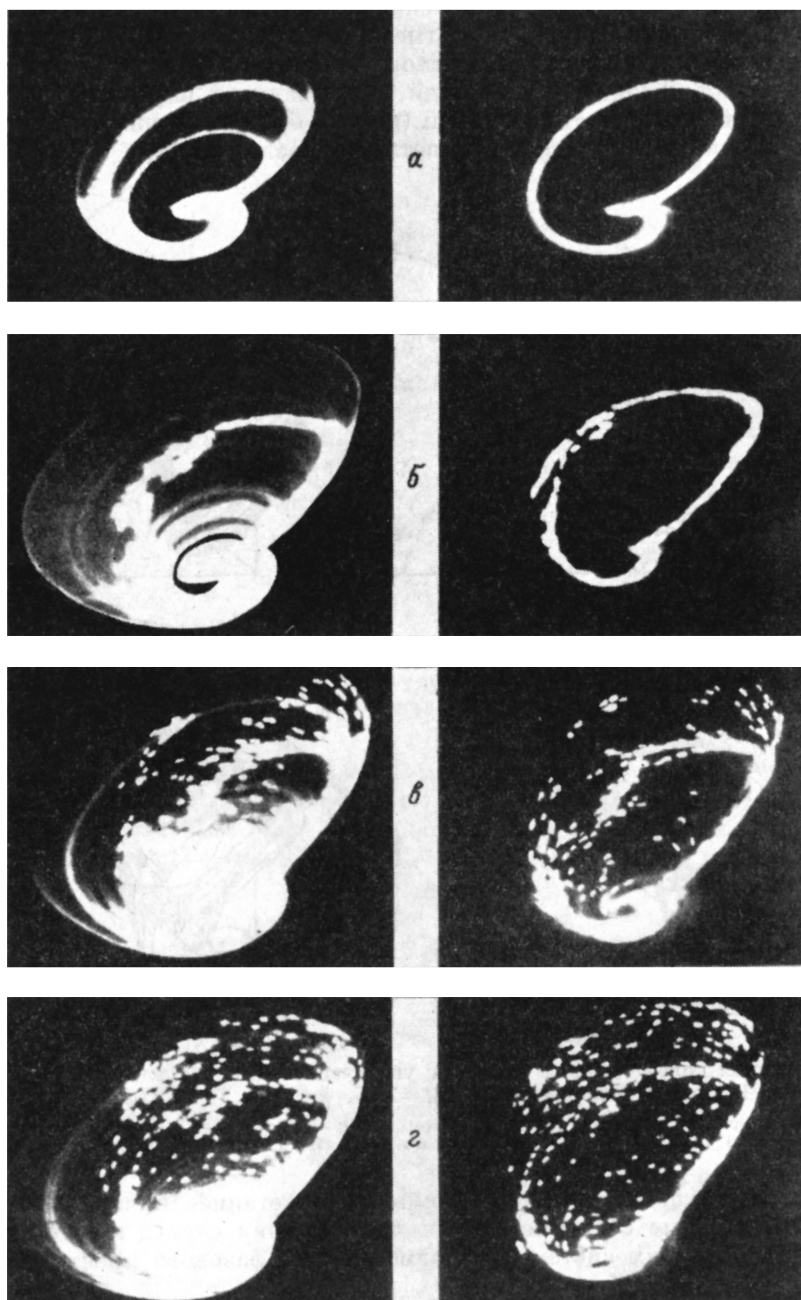


Рис. 3. Эволюция отображения сдвига с ростом амплитуды внешнего воздействия. Эксперимент.

В отображении сдвига первые признаки начала структурной перестройки инвариантного множества с ростом амплитуды внешнего воздействия проявляются в виде участков, на которых наблюдается «расслоение» и «сплетание» инвариантных кривых (рис. 5, б, в), но ляпуновская размерность аттрактора еще близка к двум. Рождению SA в отображении сдвига соответствует возникнове-

ние новых «петель» в результате «расплетания» инвариантных кривых (рис. 5, *г*). Дальнейшая эволюция CA связана с усложнением структуры «сплетения» и «расплетания» части инвариантных кривых, образованием новых «петель» в отображении и ростом дробной части ляпуновской размерности (рис. 5, *д*, *е*).

В окрестности наибольшего сближения петель тора, которой на отображении сдвига (рис. 6, *а*) соответствует фрагмент, выделенный прямоугольником, нелокальность перестройки инвариантного множества аттрактора проявляется в возникновении инвариантных линий, связывающих внутреннюю и внешние петли исходной инвариантной кривой (рис. 6, *б*). Примерная структура инвариантных линий, связывающих эти петли, показана на рис. 6, *в*.

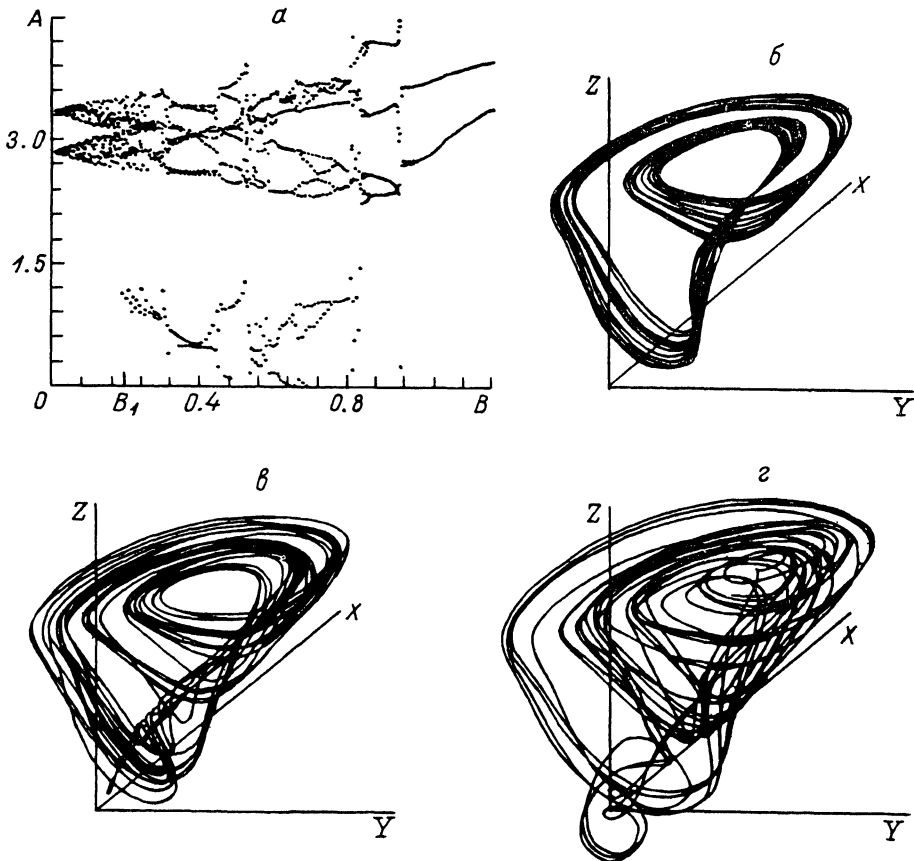


Рис. 4. Эволюция колебательного режима с увеличением амплитуды внешнего воздействия. Численное моделирование ($M=2.05$, $\beta=1.45$, $T=2.0$, $\omega=0.26$).

а — однопараметрическая бифуркационная диаграмма, *б*–*г* — трехмерные проекции фазовых портретов: *б* — эргодический тор ($B=0.06$), *г* — CA первого типа ($B=0.25$), *д* — CA второго типа ($B=0.55$).

Отметим, что обнаруженное в системе «сплетение» инвариантных линий существенно связано с трехмерностью отображения сдвига и не может иметь места в динамических системах с размерностью фазового пространства ниже четырех.

Таким образом, как в физическом эксперименте, так и при численных расчетах переход к хаосу от двухчастотных квазипериодических колебаний и колебаний, близких, с экспериментальной точки зрения, к квазипериодическим, сопровождается нелокальной перестройкой инвариантного множества аттрактора. Следует подчеркнуть, что, хотя речь идет о явлении, относящемся к разрушению эргодического тора, в расчетных отображениях сдвига имеются признаки, которые дают возможность уловить связь происходящей качественной перестройки инвариантного множества с разрушением тора в резонансном случае. Дело в том, что движение по параметру B происходит вблизи границы резонансного клюва с числом вращения $2/3$ и фрагмент, обведенный рамкой на

рис. 6, а, содержит след резонанса, разрушившегося жестким образом при переходе левой границы клюва синхронизации. По характеру расположения точек (рис. 6, б) можно предположить, что узел, соответствовавший резонансному

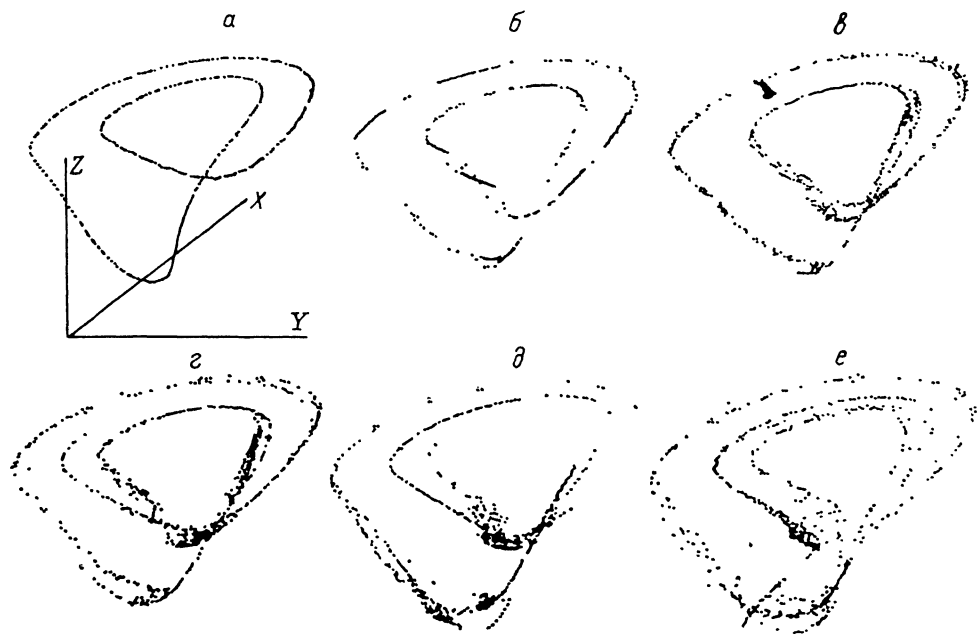


Рис. 5. Нелокальная перестройка инвариантного множества аттрактора.

D_L — ляпуновская размерность. а — $B=0.06$ ($D_L=2.0$), б — 0.18 (2.02 ± 0.05), в — 0.19 (1.97 ± 0.05), г — 0.20 (2.31 ± 0.05), д — 0.22 (2.22 ± 0.05), е — 0.245 (2.33 ± 0.05).

циклу, превратился в седло—фокус с двумя устойчивыми и одним неустойчивым направлениями. Тогда становится ясно, что в ситуации, представленной на рис. 6, часть инвариантных линий порождается неустойчивыми направлениями седло—фокусов в отображении сдвига.

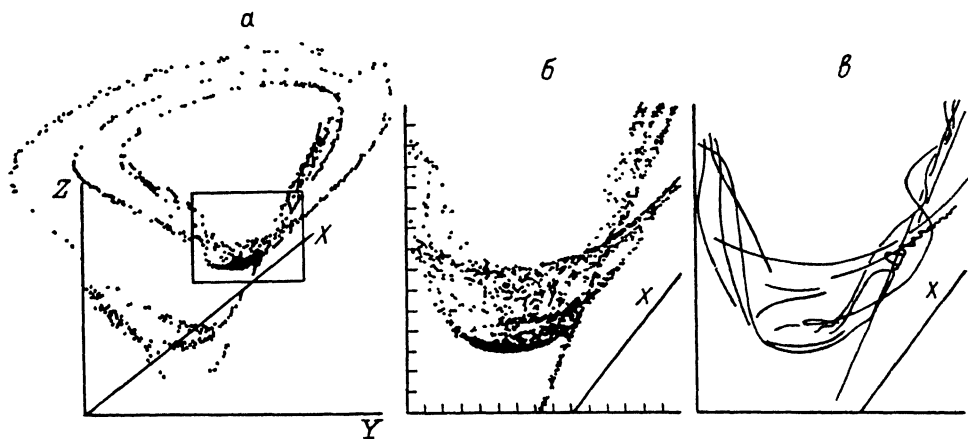


Рис. 6. Структура инвариантного множества аттрактора после перехода к хаосу.

Проведенный анализ отображений показывает, что предпосылкой для нелокальной перестройки служит рождение новых инвариантных линий. Однако их наличия еще недостаточно для реализации перестройки: новые линии могут просто навиваться на существующие, и развитие инвариантного множества будет при этом происходить локально. Вторым необходимым условием реализации нелокальных перестроек, определяющих жесткий характер возникновения СА

при разрушении квазипериодических колебаний, является существование у системы достаточно сложной структуры фазового пространства. Это требование выполняется в рассмотренной ситуации за счет двухпетлевой структуры исходного предельного цикла и наличия у автономной системы трех положений равновесия.

4. Нелокальное разрушение двухчастотных колебаний и переход к хаосу в двумерном случае

В качестве типичной ситуации с нелокальными эффектами при разрушении двухчастотных колебаний в случае двумерного эффективного фазового пространства исходной автономной системы рассмотрим эволюцию динамики генератора при $T \ll 1$ с изменением амплитуды внешнего сигнала. В системе со значениями параметров $M=2.05$, $T=0.1$, $\beta=1.45$, $B=0$ имеются два аттрактора: устойчивое положение равновесия и устойчивый предельный цикл. Причем предельный цикл проходит в фазовом пространстве вблизи особой точки седлового типа, а расстояние до бифуркационной границы $\sim T$.

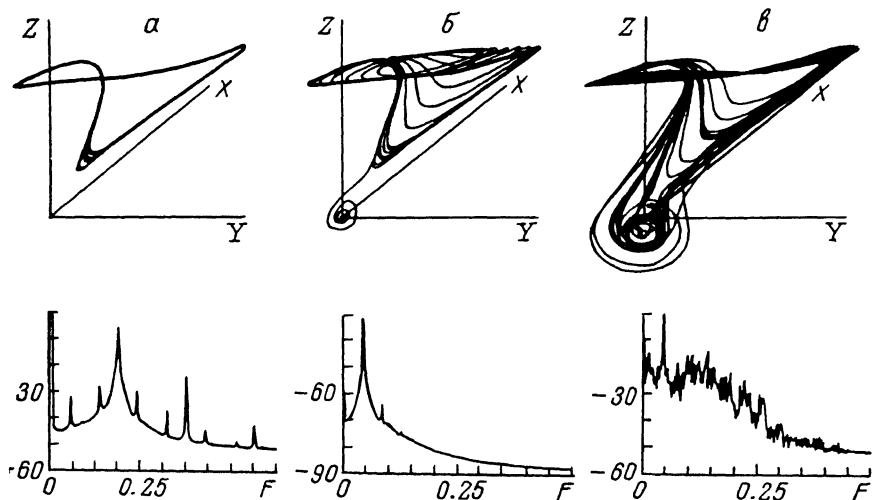


Рис. 7. Разрушение двухчастотных колебаний и рождение СА в случае внешнего воздействия на генератор с двумерным фазовым пространством.

$T=0.1$, $M=2.05$, $\omega=0.26$, $\beta=1.45$. $a - B=0.05$, $b - 0.025$, $v - 0.40$.

После введения малого внешнего сигнала в фазовом пространстве соседствуют устойчивый двумерный тор и седловое периодическое движение. В отображении сдвига системы это выглядит как инвариантная замкнутая кривая в окрестности седловой особой точки. Трехмерная проекция фазового портрета для этого случая приведена на рис. 7, a . Увеличение амплитуды внешнего сигнала приводит к влипанию тора в устойчивое многообразие седлового периодического движения, тор исчезает,¹ а траектория попадает на устойчивое периодическое движение (рис. 7, b) с частотой колебаний, соответствующей частоте внешнего сигнала. Преобразом периодического движения в автономной системе является устойчивое положение равновесия. При дальнейшем увеличении внешнего воздействия вплоть до $B=B_{кр}$ система ведет себя как нелинейный осциллятор: периодическое движение претерпевает жесткие субгармонические бифуркации, в результате которых рождаются двухтактные, а затем трехтактные периодические движения, локализованные в той же области фазового пространства. При достижении $B=B_{кр}$ возникает глобальный хаотический аттрактор (рис. 7, v), охватывающий в отображении все три особые точки. Фазовая траектория, принадлежащая этому аттрактору, часть времени проводит в окрест-

¹ При этом не исключена возможность возникновения сложной структуры траекторий в окрестности исчезнувшего тора [15], но толщина этого «стохастического» слоя $\sim T$ и этот эффект является более тонким, чем грубые явления, рассматриваемые в данной статье.

ности тора, существовавшего при малых амплитудах внешнего воздействия, а часть времени — вблизи потерявшего устойчивость одночастотного периодического движения. Расчеты показывают, что ляпуновская размерность таких аттракторов колеблется в пределах $2.2 < D_L < 2.5$.

В заключение отметим, что условия, при которых разрушение двухчастотных колебаний сопровождается нелокальными явлениями, подобными рассмотренным в данной работе, достаточно типичны для физических систем со сложной структурой стоков и не связаны со спецификой изучаемого генератора.

Авторы признательны В. Я. Кислову и С. Л. Зиглину за интерес к данной работе и полезные обсуждения.

Литература

- [1] *Uezu T., Aizawa Y.* Progr. Theor. Phys., 1982, v. 68, N 5, p. 1543—1560.
- [2] *Aizawa Y., Uezu T.* Progr. Theor. Phys., 1982, v. 68, N 6, p. 1864—1879.
- [3] *Дмитриев А. С., Кислов В.* Препринт ИРЭ АН СССР, № 27 (355). М., 1982, с. 19.
- [4] *Дмитриев А. С.* Изв. вузов. Радиофизика, 1983, т. 26, № 9, с. 1081—1086.
- [5] *Дудник Е. Н., Кузнецов Ю. И., Минакова И. И., Романовский Ю. М.* Вестник МГУ. Сер. физ., астрон., 1983, т. 24, № 4, с. 84—87.
- [6] *Анищенко В. С., Астахов В. В.* ЖТФ, 1983, т. 53, № 11, с. 2165—2170.
- [7] *Дмитриев А. С., Кислов В. Я., Спиро А. Г.* РИЭ, 1983, т. 28, № 12, с. 2430—2439.
- [8] *Кузнецов Ю. И., Мизгулин В. В., Минакова И. И., Сильнов Б. А.* ДАН СССР, 1984, т. 275, № 6, с. 1388—1391.
- [9] *Ланда П. С., Перминов С. М.* Вестник МГУ. Сер. физ., астрон., 1985, т. 26, № 2, с. 27—30.
- [10] *Анищенко В. С., Летчфорд Т. Е., Сафонова М. А.* Изв. вузов. Радиофизика, 1985, т. 28, № 9, с. 1112—1125.
- [11] *Афраймович В. С., Шильников Л. П.* В кн.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1983, с. 3—26.
- [12] *Кислов В. Я., Дмитриев А. С.* В кн.: Проблемы современной радиотехники и электроники. М., 1983, с. 193—212.
- [13] *Дмитриев А. С., Кислов В. Я.* РИЭ, 1984, т. 29, № 12, с. 2389—2398.
- [14] *Дмитриев А. С., Кислов В. Я., Старков С. О.* ЖТФ, 1985, т. 55, № 12, с. 2417—2419.
- [15] *Афраймович В. С., Шильников Л. П.* ПММ, 1977, т. 41, № 4, с. 618—627.

Институт радиотехники и электроники
АН СССР
Москва

Поступило в Редакцию
8 апреля 1986 г.

В окончательной редакции
18 сентября 1986 г.