1988 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 58, в. 2
1988 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 58, № 2

УДК 53 : 51

ЭВОЛЮЦИЯ ШУМОВЫХ СИГНАЛОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СЛАБОДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

Ф. Х. Абдуллаев, С. А. Дарманян

Рассмотрена задача эволюции случайных сигналов в нелинейной среде со слабой дисперсией, описываемой уравнением Кортевега де Вриза (КдВ). Найдена эволюция усредненного солитона при случайном начальном условии, близком к односолитонному решению уравнения КдВ. Вычислен вклад в интегральные инварианты КдВ за счет возбуждения непрерывного спектра. Показано, что наиболее эффективно возбуждаются гармоники с $k \sim l^{-1}$, где l — корреляционная длина. Найдена функция распределения амплитуд солитонов, образующихся из начальных сигналов в виде белого шума и случайной последовательности δ-импульсов.

1. Задача распространения шумовых сигналов в нелинейных средах всегда привлекала большое внимание. Интерес к ней обусловлен как потребностями практики (возбуждение солитонов частично-когерентным полем лазера в световоде и др.), так и важностью для общей теории нелинейных волн.

К настоящему времени довольно подробно изучена эволюция шумовых начальных распределений в нелинейных средах без дисперсии. Это связано с тем, что уравнение Бюргерса, которое используется для описания таких процессов, допускает точное решение с помощью подстановки Хопфа—Коула и можно выписать замкнутые выражения для конечных решений. Хотя эти выражения громоздки, они допускают получение аналитических оценок для преобразованных сигналов. Так, например, найдено явление усиления низкочастотного регулярного сигнала в поле шумовой накачки [1] и ряд других. В случае нелинейных сред с дисперсией изучено влияние статистики поля на процессы самофокусировки, генерации высших гармоник и т. д. [2]. Следует отметить, что все результаты получаются на основе использования различных приближенных методов и искусственных приемов. Например, успех анализа процесса генерации второй гармоники частично-когерентным излучением был связан с нахождением дополнительного интеграла уравнений. Новые возможности для описания эволюции случайных волн в нелинейных диспергирующих средах (в одномерной постановке) открывает метод обратной задачи (МОЗ) [3]. Его использование автоматически учитывает существование бесконечного числа полиномиальных интегралов движения. Как известно, МОЗ сводит исследование задачи Коши для ряда нелинейных уравнений в частных производных к решению линейной спектральной задачи и линейных интегральных уравнений. Как будет показано ниже, на его основе можно аналитически описать преобразование шумовых сигналов в солитоны. Кроме того, он эффективен при изучении эволюции шумовых нелинейных диспергирующих волновых пакетов в бессолитонном секторе и задач распространения шумовых сигналов в случайно-неоднородных нелинейных диспергирующих средах (в случае почти интегрируемых систем). Эти проблемы будут рассмотрены отдельно.

Недавно на основе МОЗ были решены задача о нелинейной дифракции Фраунгофера для случайных полей [4] и задача распространения мощных электромагнитных импульсов со случайной модуляцией фазы в нелинейных оптических волноводах [5]. Все эти задачи сводились к исследованию эволюции случайного начального условия в нелинейном уравнении Шредингера.

В настоящей работе мы рассмотрим проблему эволюции случайных начальных сигналов на примере уравнения Кортевега де Вриза (КдВ), дающего универсальное описание динамики длинных волн в слабонелинейных диспергирующих средах.

2. Рассмотрим уравнение КдВ

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

со следующим начальным условием:

$$u(x, t)|_{t=0} = u_s(x)(1 + \varepsilon(x)), \tag{2}$$

где

$$u_s(x) = -2q_0^2 \operatorname{sech}^2 q_0 x,$$

u_s — односолитонное решение, $\varepsilon(x) \ll 1$ — случайная гауссовская функция, причем

$$\langle\varepsilon\rangle = 0, \quad \langle\varepsilon(x)\varepsilon(y)\rangle = B(x-y, l),$$
$$B(x-y) \to \sigma^2\delta(x-y) \quad \text{при } l \to 0.$$

Здесь l — корреляционная длина.

Как известно, эволюция начального состояния может быть изучена на основе метода обратной задачи (МОЗ) [3]. Согласно схеме МОЗ, необходимо найти характеристики спектра линейного оператора

$$L\psi = E\psi, \quad \psi'' + (E-u)\psi = 0, \quad E = k^2, \tag{4}$$

где u дается выражением (2). Если в (2) положить $\varepsilon(x) = 0$, то из (4) следует, что имеется один дискретный отрицательный энергетический уровень $E = -q_0^2$, которому соответствует

$$\psi = \sqrt{\frac{q_0}{2}} \operatorname{sech} q_0 x. \tag{5}$$

Соответствующая функция Иоста есть

$$\psi_k(x) = \frac{e^{-ikx}}{ik - q_0}(ik + q_0 \operatorname{th} q_0 x). \tag{6}$$

Найдем поправку Δ к собственному значению $E = -q_0^2$, связанную с наличием в (2) $\varepsilon \neq 0$. При $\varepsilon \ll 1$, используя теорию возмущений с точностью до второго порядка по ε, получим

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = q_0^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(x)\,dx}{\operatorname{ch}^4 q_0 x} -$$

$$- \frac{q_0^5}{\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} dk\,dx\,dy \frac{\varepsilon(x)\varepsilon(y)\psi_k(x)\psi_k^*(y)}{(k^2+q_0^2)^2 \operatorname{ch}^3 q_0 x \operatorname{ch}^3 q_0 y}. \tag{7}$$

Отсюда в случае δ-коррелированной случайной функции получаем

$$\langle\Delta\rangle = \langle\Delta_2\rangle \approx -0.15\sigma^2 q_0^3, \quad \langle\Delta^2\rangle = \langle\Delta_1^2\rangle \approx 0.9\sigma^2 q_0^5. \tag{8}$$

Здесь $\langle\ldots\rangle$ означает усреднение по всем реализациям ε.

Имея (8), можно вычислить среднее солитонное поле, а также найти функции распределения солитонов по скоростям или амплитудам. Так, например, для $\langle u\rangle$ при $b\Delta \ll 1$ получаем следующее выражение:

$$\langle u(x, t)\rangle = -2\langle q^2 \operatorname{sech}^2 q(x - 4q^2 t)\rangle \approx -2q_0^2 \operatorname{sech}^2 a \times$$
$$\times \{1 - \langle\Delta_1^2\rangle[(2b - 0.75a)\operatorname{th} a - b^2(1 - 3\operatorname{th}^2 a)] + \langle\Delta_2\rangle(1 - 2b \operatorname{th} a)\}, \tag{9}$$

где

$$a = q_0 (x - 4q_0^2 t), \quad b = x/2q_0 - 6q_0 t.$$

При малых a, т. е. в центре солитона, получаем, что амплитуда равна

$$2q^2 \approx 2q_0^2 \left(1 + \langle \Delta_2 \rangle - \frac{\langle \Delta_1^2 \rangle}{q_0^2} x\right). \tag{10}$$

Отметим, что это выражение справедливо при $x \langle \Delta_1^2 \rangle \ll q_0^2$.

Итак, можно заключить, что в центре солитона амплитуда уменьшается по мере его распространения в среде. При этом, как следует из (9), в области больших a ($a \gg 1$), т. е. на краях солитона, амплитуда увеличивается.

3. Проанализируем теперь непрерывную компоненту, образующуюся при формировании солитона из шумового сигнала. Для этого нам необходимо знать значение квадрата модуля коэффициента отражения на потенциале (2). Найдем коэффициент отражения, используя следующее представление [6]:

$$R(k) = \frac{A(k, k)}{2ki - A(-k, k)}, \tag{11}$$

где

$$A(q, k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x) \psi_k(x) e^{-iqx}.$$

Отметим, что потенциал $u = u_s$ является безотражательным, однако добавление к u_s члена εu_s приводит к появлению отраженной волны. Из (11) получаем

$$|R|^2 = q_0^4 J \left[k^2 (k^2 + q_0^2) + q_0^4 (J_1^2 + J_2^2) + 2kq_0^3 J_2 - 2q_0^2 k^2 J_1\right]^{-1}. \tag{12}$$

где

$$J = \iint_{-\infty}^{\infty} dx dy \frac{\varepsilon(x) \varepsilon(y)}{\operatorname{ch}^2 q_0 x \operatorname{ch}^2 q_0 y} (q_0 \operatorname{th} q_0 x + ik)(q_0 \operatorname{th} q_0 y - ik) e^{2ik(y-x)},$$

$$J_1 = q_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\varepsilon(x) \operatorname{th} q_0 x}{\operatorname{ch}^2 q_0 x}, \quad J_2 = k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \varepsilon(x)}{\operatorname{ch}^2 q_0 x}. \tag{13}$$

В области малых значений k ($k \ll q_0 \alpha$, $\alpha^2 = \langle J_1^2 \rangle$) можно считать, что

$$|R|^2 \approx q_0^2 J_1^2 (k^2 + q_0^2 J_1^2)^{-1}. \tag{14}$$

Знание коэффициента $|R|^2$ позволяет вычислить вклад непрерывного спектра в интегральные инварианты I_j уравнения КдВ (такие как импульс, энергия и т. д.) при распространении случайного сигнала, используя с этой целью следующую формулу для I_{j-1}, $j = 0, 1, 2 \ldots$ [3]

$$2I_{j-1}(u) = \frac{2^{2(j+1)}}{2j+1} \sum_n q_n^{2j+1} + 2^{2(j+1)} (-1)^j \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} k^{2j} \ln (1 - |R|^2) dk. \tag{15}$$

Здесь сумма отвечает вкладу солитонов, интеграл — вкладу непрерывной компоненты.

При малых R можно считать, что $\ln (1 - |R|^2) \approx -|R|^2$. Если предположить, что корреляционная функция (3) имеет вид

$$B(x - y, l) = B_0 \exp[-(x - y)^2/l^2], \tag{16}$$

то при $l \ll 1$ в области $k \gg q_0 \alpha$ получаем

$$\langle |R|^2 \rangle \approx \frac{q_0^2 \alpha^2 (5k^2 + q_0^2)}{k^4 + q_0^2 k^2 + q_0^4 \alpha^2} e^{-k^2 l^2}, \tag{17}$$

где $\alpha^2 = \langle J_1^2 \rangle \approx 0.5 q_0 l B_0$.

Используя выражения (14)—(17), можно вычислить вклад непрерывного спектра, отвечающего возбуждению хвоста солитона в полный гамильтониан уравнения КдВ $I_1 = I_1^d + I_1^c$. Анализ показывает, что спектральная плотность энергии $\partial \langle I_1^c \rangle / \partial k$ имеет максимум при $k_c \sim l^{-1}$, т. е. в хвосте солитона наиболее эффективно возбуждаются гармоники с $k \sim k_c$.

Применим полученные результаты к динамике ионно-звуковых волн в плазме [7, 8]. В этом случае уравнение КдВ описывает изменение плотности ионов. Используя выражение (15) при $j=0$, можно записать для первого интеграла КдВ

$$I_{-1} = I_{-1}^d + I_{-1}^c = \int_{-\infty}^{\infty} u dx = 4 \sum q_n + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \ln (1 - |R|^2) dk. \tag{18}$$

В случае ионно-звуковых волн u есть относительная плотность частиц, участвующих в движении. Удобно записать солитонное решение в размерных величинах

$$u_s = \frac{\delta n}{n_0} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{\delta n}{6 n_0}} \frac{x - vt}{\lambda_D} \right],$$

где n_0 — плотность ионов, λ_D — дебаевский радиус экранирования. В экспериментах Икези [7] при $\lambda_D = 4 \cdot 10^{-2}$ см, $n_0 \sim 10^{10}$ см$^{-3}$ было получено $\delta n / n_0 \sim 0.2$. При этих значениях параметров вклад дискретного спектра в правой части (18) порядка единицы. Вклад непрерывного спектра (хвоста солитона) при $l_\varepsilon \sim \lambda_D$, $B(0) \simeq 10^{-2}$

$$\langle I_{-1}^c \rangle \simeq \frac{2}{\pi} (2 l q_0^3 B_0)^{1/2} \simeq 5 \cdot 10^{-3}.$$

Отсюда следует, что когда величина флуктуаций амплитуды солитона в начальном состоянии от среднего значения порядка 0.1, а $l_\varepsilon \sim 0.1 l_s$, где l_s — ширина солитона, то примерно 0.5 % частиц уходит в хвост солитона. Отметим, что при прохождении солитона через плазму со скачком концентрации соответствующая величина для образующегося хвоста $\sim$0.4 %, т. е. того же порядка [9].

4. Представляет интерес анализ эволюции достаточно большого случайного начального сигнала. Рассмотрим для определенности два предельных случая.

а) Начальный сигнал имеет вид последовательности δ-импульсов одинаковой амплитуды и длительности со случайным расстоянием между ними. Соответствующая спектральная задача имеет вид

$$\psi'' + (k^2 - u(x)) \psi = 0,$$
$$u(x) = \sum_j k_j \delta (x - x_j). \tag{19}$$

Случайные точки x_j предполагаются независимыми и равномерно распределенными по интервалу, и плотность вероятностей расстояний $y_j = x_{j+1} - x_j$ равна

$$f(y) = d^{-1} \exp \{-y d^{-1}\},$$

k_j — независимые друг от друга величины с плотностью вероятностей $P(k_j)$ [10]

$$P(k_j) = \delta (k - k_0), \quad k_0 < 0.$$

Из (19) следует, что анализ собственных функций и собственных значений k^2 в этой постановке эквивалентен исследованию электронных состояний в модели твердого тела типа структурного беспорядка (модель Лифшица). Как показывается в теории неупорядоченных систем, в одномерных системах все собственные функции уравнения (19) локализованы, а спектр дискретен. Используя результаты [10], можно выписать выражение для функции распределения амплитуд солитонов $P(q)$ в интервале q, $q + dq$. При высокой концентрации ям ($c = |k_0| d^{-1} \gg 1$) имеем

$$P(q) = |q| \exp \left[-2 |q| \frac{c}{\langle u \rangle} \ln \frac{q^2}{\langle u \rangle} \right]. \tag{20}$$

б) Модель начального сигнала в виде «белого шума»

$$\langle u \rangle = 0, \quad \langle u(x)\, u(y) \rangle = 2D\delta(x-y).$$

Соответствующая функция распределения амплитуд солитонов имеет вид

$$P(q) = \frac{|q|}{\pi} \exp\left\{-\frac{4|q|^3}{3D}\right\}.$$

Отметим, что это выражение справедливо при $|q| \gg (D)^{1/3}$. Аналогичные рассуждения справедливы и для эволюции сигнала в виде периодической последовательности импульсов со случайными амплитудами. В теории неупорядоченных систем соответствующая модель есть модель Андерсона.

Более подробно анализ связи между проблемой андерсоновской локализации в неупорядоченных твердых телах и проблемой эволюции случайных волн в нелинейных интегрируемых системах будет проведен в отдельной публикации.

Авторы признательны участникам семинара Лаборатории волновых процессов ОТФ АН УзССР за полезные обсуждения.

Литература

[1] *Гурбатов С. Н., Саичев А. А., Якушин И. Г.* УФН, 1983, т. 141, № 3, с. 221—255.
[2] *Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981, с. 640.
[3] *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980, с. 320.
[4] *Басс Ф. Г., Кившарь Ю. С., Конотоп В. В.* В сб.: Волны и дифракция. Тбилиси, 1985, с. 96—98.
[5] *Elgin J. N.* Phys. Lett., 1985, v. 110A, N 9, p. 441—443.
[6] *Калоджеро Ф., Дегасперис А.* Спектральные преобразования и солитоны. М.: Мир, 1985, с. 470.
[7] *Ikezi H.* Phys. Fluids, 1973, v. 16, p. 1668—1673.
[8] *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973, с. 175.
[9] *Пелиновский Е. Н., Степанянц Ю. А.* ЖТФ, 1975, т. 45, № 1, с. 173—175.
[10] *Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А.* Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982, с. 358.

Отдел теплофизики АН УзССР
Ташкент

Поступило в Редакцию
21 ноября 1985 г.
В окончательной редакции
28 июля 1986 г.