УДК 53 : 51

# МЕТОД МОМЕНТОВ В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНО ТОНКИХ НЕЗАМКНУТЫХ ПРОВОДНИКОВ

*А. В. Грибовский, Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин*

Методом моментов получено строгое решение задачи о пространственном распределении электростатического потенциала в системе из конечного числа одинаковых металлических лент с заданными потенциалами. Использовано известное поведение функции распределения поверхностных зарядов на бесконечно тонком идеально проводящем незамкнутом проводнике вблизи его ребра. Решение задачи путем полуобращения оператора сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений второго рода. Приведены численные результаты, показывающие быструю сходимость метода редукции.

Задача о пространственном распределении электростатического потенциала вблизи заряженных бесконечно тонких идеально проводящих незамкнутых оболочек представляет значительный интерес, так как тонкие оболочки являются основными элементами электростатических экранов, конденсаторов, электронно-оптических систем и других устройств. В настоящее время для решения подобных задач разработано несколько методов. Одним из них является метод парных интегральных уравнений. Для проводников с осевой симметрией парные интегральные уравнения сводятся к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно специальным образом введенной новой неизвестной функции [1, 2]. Для расчета плоских полей эффективно применяется метод теории функций комплексного переменного [3, 4]. В [5, 6] описан векторно-параметрический метод решения задач электростатики. Существует также и ряд других методов: метод конечных разностей, метод интегральных уравнений и т. д.

В данной работе для определения потенциала в структуре, состоящей из конечного числа одинаковых идеально проводящих бесконечно тонких лент с заданными потенциалами, расположенных в параллельных плоскостях (число лент и расстояние между ними в каждой плоскости произвольно; рис. 1), применен метод моментов, который эффективно использован в [7] при решении задачи дифракции плоской электромагнитной волны на металлической ленте. Этот метод в отличие от известных позволяет свести решение плоской задачи электростатики к решению системы линейных алгебраических уравнений второго рода сравнительно невысокого порядка. Суть метода применительно к плоским задачам электростатики для бесконечно тонких идеально проводящих незамкнутых оболочек заключается в том, что неизвестная функция распределения поверхностной плотности заряда на проводнике представляется в виде произведения двух функций, одна из которых есть ряд по полиномам Чебышева, а другая учитывает особенность поведения поверхностной плотности заряда вблизи краев оболочки. Как известно, для бесконечно тонких идеально проводящих тел такая особенность при $\rho \to 0$ имеет вид $\rho^{-1/2}$, где $\rho$ — расстояние от точки наблюдения на проводнике до его ребра.

Предполагая, что структура (рис. 1) в целом нейтральна, решение с точностью до постоянной, удовлетворяющее уравнению Лапласа и регулярное на бесконечности ($|z| \to \infty$), будем искать в виде разложения в интеграл Фурье

$$U_k(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\lambda, z) e^{i\lambda y} d\lambda, \quad z \in [h_{k-1}, h_k], \quad |y| < \infty,$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, N+1, \tag{1}$$

$$f_k(\lambda, z) = a_k e^{|\lambda| z} + d_k e^{-|\lambda| z}, \quad a_k = a_k(\lambda), \quad d_k = d_k(\lambda), \quad k = 2, 3, 4, \ldots, N,$$

$$f_1(\lambda, z) = a_1 e^{|\lambda| z}, \quad f_{N+1}(\lambda, z) = d_{N+1} e^{-|\lambda|(z-h_N)}, \quad d_1 = a_{N+1} = 0,$$

$h_1 = 0$; $z = h_k$ — уравнение $k$-й плоскости.

Воспользовавшись граничными условиями, получим связь между неизвестными функциями

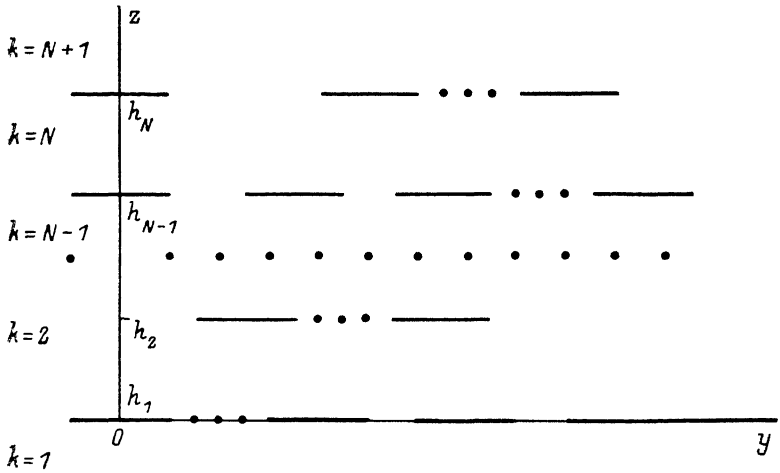


Рис. 1.

$$a_k e^{|\lambda| h_k} + d_k e^{-|\lambda| h_k} = a_{k+1} e^{|\lambda| h_k} + d_{k+1} e^{-|\lambda| h_k}, \quad k = 2, 3, 4, \ldots, N-1,$$

$$a_1 = a_2 + d_2, \quad a_N e^{|\lambda| h_N} + d_N e^{-|\lambda| h_N} = d_{N+1} \tag{2}$$

и систему парных интегральных уравнений

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_1 e^{i\lambda y} d\lambda = V_{1, s}, \quad y \in [y_s^1 - d, y_s^1 + d],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda| d_2 e^{i\lambda y} d\lambda = 0, \quad y \in Щ,$$

$$s = 1, 2, 3, \ldots, n_1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(a_k e^{|\lambda| h_k} + d_k e^{-|\lambda| h_k}\right) e^{i\lambda y} d\lambda = V_{k, s}, \quad y \in [y_s^k - d, y_s^k + d],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda| (d_{k+1} - d_k) e^{-|\lambda| h_k} e^{i\lambda y} d\lambda = 0, \quad y \in Щ,$$

$$k = 2, 3, 4, \ldots, N-1, \quad s = 1, 2, 3, \ldots, n_k,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_{N+1} e^{i\lambda y} d\lambda = V_{N, s}, \quad y \in [y_s^N - d, y_s^N + d],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda| a_\lambda e^{|\lambda| h_\lambda} e^{i\lambda y} d\lambda = 0, \quad y \in Щ,$$

$$s = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n_\lambda, \tag{3}$$

где $V_{k,s}$ — потенциал $s$-й ленты в $k$-й плоскости; $y_s^k$ — координата по оси $oy$ середины $s$-й ленты в $k$-й плоскости; $d$ — полуширина ленты, одинаковая для всех лент; $n_k$ — число лент в $k$-й плоскости. Буквой $Щ$ обозначены интервалы изменения переменной $y$, на которых ленты отсутствуют.

Функция

$$w_{ks}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda| (d_{k+1} - d_k) e^{-|\lambda| h_k} e^{i\lambda y} d\lambda$$

при $y \in [y_s^k - d,\ y_s^k + d]$ и фиксированных $k$ и $s$ представляет собой с точностью до множителя поверхностную плотность заряда на $s$-й ленте в $k$-й плоскости. Представим $w_{ks}(y)$ при $y \in [y_s^k - d,\ y_s^k + d]$ в виде

$$w_{ks}(y) = \frac{2}{\sqrt{1 - \tilde{y}^2}} \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{k,s} T_p(\tilde{y}), \tag{4}$$

где $\tilde{y} = (y - y_s^k)/d$; $T_p(x)$ — полиномы Чебышева 1-го рода.

Используя (3), получим связь между неизвестными функциями и коэффициентами разложения (4)

$$d_2 = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{s=1}^{n_1} \varphi_{1,s}, \quad a_N = \frac{e^{-|\lambda| h_N}}{|\lambda|} \sum_{s=1}^{n_N} \varphi_{N,s},$$

$$d_{k+1} - d_k = \frac{e^{|\lambda| h_k}}{|\lambda|} \sum_{s=1}^{n_k} \varphi_{k,s}, \quad k = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ N - 1, \tag{5}$$

где

$$\varphi_{k,s}(\lambda) = d e^{-i\lambda y_s^k} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \{C_{2p}^{k,s} J_{2p}(\lambda d) - i C_{2p+1}^{k,s} J_{2p+1}(\lambda d)\},$$

$J_p(x)$ — функции Бесселя. Воспользовавшись рекуррентными соотношениями (2), получим

$$d_{N-l} = \sum_{q=1}^{N-l-1} \sum_{s=1}^{n_q} \frac{e^{|\lambda| h_q}}{|\lambda|} \varphi_{q,s}, \quad a_{N-l} = \sum_{j=0}^{l} \sum_{s=1}^{n_{N-j}} \frac{e^{-|\lambda| h_{N-j}}}{|\lambda|} \varphi_{N-j,s}, \tag{6}$$

$$l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N - 2.$$

Подставив (6) в оставшиеся уравнения (3), придем к системе функциональных уравнений

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{l} \sum_{s=1}^{n_{N-j}} \frac{e^{-|\lambda| h_{jl}}}{|\lambda|} \varphi_{N-j,s} + \sum_{q=1}^{N-l-1} \sum_{s=1}^{n_q} \frac{e^{-|\lambda| h_{ql}}}{|\lambda|} \varphi_{q,s} \right\} e^{i\lambda y} d\lambda = V_{N-l,n}, \quad y \in L_n^{N-l},$$

$$l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N - 2; \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n_{N-l},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{N-2} \sum_{s=1}^{n_{N-j}} \frac{e^{-|\lambda| h_{N-j}}}{|\lambda|} \varphi_{N-j,s} + \sum_{s=1}^{n_1} \frac{1}{|\lambda|} \varphi_{1,s} \right\} e^{i\lambda y} d\lambda = V_{1,n}, \quad y \in L_n^1,$$

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n_1,$$

где

$$L_n^k \in [y_n^k - d,\ y_n^k + d], \quad h_{jl} = h_{N-j} - h_{N-l}, \quad h_{ql} = h_{N-l} - h_q. \tag{7}$$

Разложим левые и правые части выражений (7) как функции $y$ в ряды по полиномам Чебышева 1-го рода и коэффициенты разложений приравняем. В результате получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений 1-го рода относительно неизвестных коэффициентов

$$\sum_{j=0}^{l} \sum_{s=1}^{n_{N-j}} \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{N-j,\,s} A_{p,\,m}^{j,\,n,\,s} + \sum_{q=1}^{N-l-1} \sum_{s=1}^{n_q} \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{q,\,s} B_{p,\,m}^{q,\,n,\,s} = \frac{V_{N-l,\,n}}{2d} \delta_{0m},$$

$$m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \quad l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-2; \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n_{N-l},$$

$$\sum_{j=0}^{N-2} \sum_{s=1}^{n_{N-j}} \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{N-j,\,s} D_{p,\,m}^{j,\,n,\,s} + \sum_{s=1}^{n_1} \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{1,\,s} F_{p,\,m}^{n,\,s} = \frac{V_{1,\,n}}{2d} \delta_{0m},$$

$$m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n_1, \tag{8}$$

где

$$\delta_{0m} = 0,\ m \neq 0; \quad \delta_{0m} = 1, \quad m = 0,$$

$$A_{p,\,2m}^{j,\,n,\,s} = k_{p,\,2m} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi \frac{h_{jl}}{d}}}{\xi} J_p(\xi) J_{2m}(\xi) f_{n,\,s}^{j}(\xi)\, d\xi, \tag{9}$$

$$f_{n,\,s}^{j}(\xi) = \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left( \xi \frac{y_n^{N-l} - y_s^{N-j}}{d} \right) - \begin{Bmatrix} p \text{ — четное и } 0 \\ p \text{ — нечетное} \end{Bmatrix},$$

$k_{p,\,2m} = (-1)^{m+p}$ для всех $p$. Для нечетного $m$ в функциях $f_{n,\,s}^{j}$ необходимо синус и косинус поменять местами, $k_{p,\,2m+1} = (-1)^p k_{p,\,2m}$. Матричные элементы $B_{p,\,m}^{q,\,n,\,s}$ вычисляются аналогично (9), где вместо $h_{jl}$ надо подставить $h_{ql}$, а вместо $y_s^{N-j} - y_s^q$. Для вычисления $D_{p,\,m}^{j,\,n,\,s}$ в (9) надо положить $l = N-1$; $F_{p,\,m}^{n,\,s}$ вычисляются аналогично $B_{p,\,m}^{q,\,n,\,s}$, где надо положить $q = 1$, $l = N-1$.

Регуляризацию системы (8) проведем в несколько этапов. Выделим в (8) систему с индексом $m=0$ и рассмотрим ее относительно коэффициентов $C_0^{k,\,s}$. В результате получим конечную систему линейных алгебраических уравнений, матричные элементы которой обращаются в бесконечность. Для того чтобы такая система имела решение, необходимы дополнительные условия, накладываемые на искомое решение. Эти условия сформулированы нами при постановке задачи и заключаются в требовании равенства нулю суммарного заряда на единицу длины структуры.

Заряд, приходящийся на единицу длины $s$-й ленты в $k$-й плоскости, равен

$$Q_{ks} = \int_{y_s^k - d}^{y_s^k + d} w_{ks}(y)\, dy = 2\pi d C_0^{k,\,s}.$$

Вычислив полный заряд, приходящийся на единицу длины структуры, и приравняв его нулю, получим условие

$$\sum_{j=0}^{l} \sum_{s=1}^{n_{N-j}} C_0^{N-j,\,s} + \sum_{q=1}^{N-l-1} \sum_{s=1}^{n_q} C_0^{q,\,s} = 0, \tag{10}$$

которое выполняется при всех значениях $l$, лежащих в пределах от 0 до $N-2$. В (10) выделим коэффициент $C_0^{1,\,1}$ и подставим его в систему уравнений для $C_0^{k,\,s}$. В результате получим

$$\sum_{j=0}^{l}\sum_{s=1}^{n_{N-j}} C_0^{N-j,s} A_0^{j,n,s} + \sum_{q=2}\sum_{s=1}^{n_q} C_0^{q,s} B_0^{q,n,s} + \sum_{s=2}^{n_1} C_0^{1s,} A_0^{n,s} = \frac{V_{N-l,n}}{2d} -$$

$$-\sum_{j=0}^{l}\sum_{s=1}^{n_{N-j}}\sum_{p=1}^{\infty} C_p^{N-j,s} A_{p,0}^{j,n,s} - \sum_{q=1}^{N-l-1}\sum_{s=1}^{n_q}\sum_{p=1}^{\infty} C_p^{q,s} B_{p,0}^{q,n,s},$$

$$l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-2, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n_{N-l},$$

$$\sum_{j=0}^{N-2}\sum_{s=1}^{n_{N-j}} C_0^{N-j,s} D_0^{j,n,s} + \sum_{s=2}^{n_1} C_0^{1,s} D_0^{n,s} =$$

$$= \frac{V_{1,n}}{2d} - \sum_{j=0}^{N-2}\sum_{s=1}^{n_{N-j}}\sum_{p=1}^{\infty} C_p^{N-j,s} D_{p,0}^{j,n,s} - \sum_{s=1}^{n_1}\sum_{p=1}^{\infty} C_p^{1,s} F_{p,0}^{n,s},$$

$$n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n_1, \tag{11}$$

где

$$A_0^{j,n,s} = \int_0^{\infty} \frac{J_0^2(\xi)}{\xi}\left[e^{-\xi\frac{h_{jl}}{d}} f_{n,s}^{j}(\xi) - e^{-\xi\frac{h_{N-l}}{d}} f_{n,1}^{N-1}(\xi)\right] d\xi. \tag{12}$$

Матричные элементы $B_0^{q,n,s}$ вычисляются аналогично (12), где вместо $h_{jl}$ надо подставить $h_{ql}$, а вместо $y_s^{N-j}$ — $y_s^q$

$$A_0^{n,s} = B_0^{1,n,s}, \quad D_0^{j,n,s} = A_0^{j,n,s}\Big|_{l=N-1}, \quad D_0^{n,s} = A_0^{n,s}\Big|_{l=N-1}.$$

Решая систему (11) с учетом (10), мы найдем все коэффициенты $C_0^{k,s}$. Предположим, что все коэффициенты $C_0^{k,s}$ найдены. Подставим их значения в оставшуюся часть системы (8), предварительно введя обозначения

$$P_m^{l,n} = -\sum_{j=0}^{l}\sum_{s=1}^{n_{N-j}} C_0^{N-j,s} A_{0,m}^{j,n,s} - \sum_{q=1}^{N-l-1}\sum_{s=1}^{n_q} C_0^{q,s} B_{0,m}^{q,n,s},$$

$$R_m^n = -\sum_{j=0}^{N-2}\sum_{s=1}^{n_{N-j}} C_0^{N-j,s} D_{0,m}^{j,n,s} - \sum_{s=1}^{n_1} C_0^{1,s} F_{0,m}^{n,s}. \tag{13}$$

В результате получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений 1-го рода относительно неизвестных коэффициентов $C_p^{k,s}$, $p \neq 0$

$$\sum_{j=0}^{l}\sum_{s=1}^{n_{N-j}}\sum_{p=1}^{\infty} C_p^{N-j,s} A_{p,m}^{j,n,s} + \sum_{q=1}^{N-l-1}\sum_{s=1}^{n_q}\sum_{p=1}^{\infty} C_p^{q,s} B_{p,m}^{q,n,s} = P_m^{l,n},$$

$$m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\quad l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-2, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n_{N-l},$$

$$\sum_{j=0}^{N-2}\sum_{s=1}^{n_{N-j}}\sum_{p=1}^{\infty} C_p^{N-j,s} D_{p,m}^{j,n,s} + \sum_{s=1}^{n_1}\sum_{p=1}^{\infty} C_p^{1,s} F_{p,m}^{n,s} = R_m^n,$$

$$m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n_1. \tag{14}$$

Регуляризацию системы (14) проведем путем полуобращения ее оператора. Выделим в (14) оператор, соответствующий $l$-й плоскости ($j = l$). В этом операторе выделим оператор, соответствующий $n$-й ленте ($s = n$). Учитывая, что функции Бесселя ортогональны с весом $\xi^{-1}$ на полубесконечном интервале, обратим эту часть оператора системы. В результате придем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов

$$X_m^{N-l,n} + \sum_{\substack{s=1\\ s\neq n}}^{n_{N-l}}\sum_{p=1}^{\infty} X_p^{N-l,s} A_{p,m}^{l,n,s} t_{pm} + \sum_{j=0}^{l-1}\sum_{s=1}^{n_{N-j}}\sum_{p=1}^{\infty} X_p^{N-j,s} A_{p,m}^{j,n,s} t_{pm} +$$

$$+\sum_{q=1}^{N-l-1}\sum_{s=1}^{n_q}\sum_{p=1}^{\infty} X_p^{q,s} B_{p,m}^{q,n,s} t_{pm} = \frac{t_{pm}}{\sqrt{p}} P_m^{l,n},$$

$$m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\quad l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-2;\quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n_{N-l},$$

$$X_m^{1,n} + \sum_{\substack{s=1\\ s\neq n}}^{n_1}\sum_{p=1}^{\infty} X_p^{1,s} F_{p,m}^{n,s} t_{pm} + \sum_{j=0}^{N-2}\sum_{s=1}^{n_{N-j}}\sum_{p=1}^{\infty} X_p^{N-j,s} D_{p,m}^{j,n,s} t_{pm} = \frac{t_{pm}}{\sqrt{p}} R_m^n,$$

$$m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n_1, \tag{15}$$

где

$$X_m = C_m/\sqrt{m},\quad t_{pm} = 2(-1)^m\sqrt{pm}.$$

Диагональные элементы матрицы системы уравнений (15) с ростом индекса убывают как $m^{-2}$, а внедиагональные — как $\sqrt{pm}\,|p^2-m^2|^{-3}$. Для решения

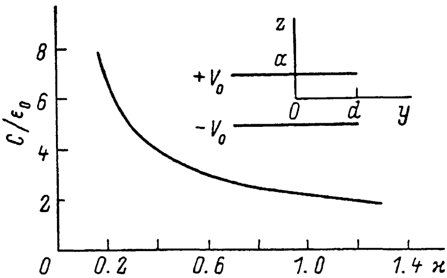


Рис. 2.

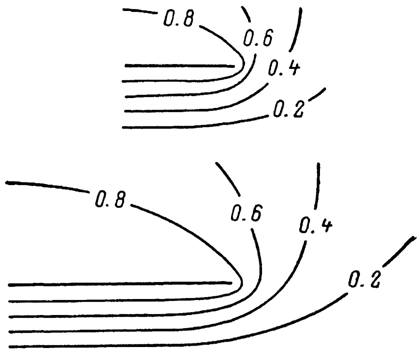


Рис. 3.

системы (15) можно применить метод редукции. Кроме того, матричные элементы симметричны относительно перестановки индексов «$p$» и «$m$», что значительно облегчает численное решение системы уравнений.

Выполненные преобразования эквивалентны обращению с помощью метода моментов оператора в левой части системы уравнений (3) при $h/d \to \infty$, где $h$ — расстояние между соседними плоскостями, в которых лежат ленты. На основании вышесказанного и из выражений (9), для матричных элементов системы (15) можно указать границы изменения параметров задачи, при которых данный алгоритм является эффективным. Наиболее эффективно метод моментов работает в случае, когда расстояния между плоскостями превосходят полуширину лент, т. е. когда взаимодействие между лентами мало. Критерием слабого взаимодействия служит условие $h/d > 1$. В случае, когда все ленты лежат в одной плоскости, критерием слабого взаимодействия служит условие $y_0/d \gg 1$, где $y_0$ — расстояние между серединами соседних лент. При сильном взаимодействии ($h/d < 1$) эффективность метода несколько снижается за счет увеличения порядка редукции и времени счета матричных элементов.

Для того чтобы проанализировать возможности описанного метода, была рассмотрена задача о плоском конденсаторе из двух одинаковых лент (рис. 2), для которой известно решение, полученное методом конформного отображе-

| $\frac{d}{a}$ | $\frac{C}{\varepsilon_0}$ [8] | $\frac{C}{\varepsilon_0}$ — расчет | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $M=1$ | $M=2$ | $M=3$ | $M=5$ | $M=10$ |
| 0.0998 | 0.8508 | 0.850878 | 0.850890 | 0.850890 | 0.850890 | 0.850890 |
| 0.4338 | 1.4001 | 1.398495 | 1.400167 | 1.400167 | 1.400167 | 1.400167 |
| 3.6818 | 5.0929 | 4.299313 | 5.093008 | 5.093016 | 5.093016 | 5.093016 |
| 20.392 | 22.282 | 1.963188 | 22.27770 | 22.28077 | 22.28087 | 22.28219 |

ния [8]. Здесь же приведена зависимость емкости на единицу длины от параметра $\varkappa = a/d$ ($a$ — половина расстояния между лентами). В таблице отражена зависимость емкости, рассчитанной методом моментов, от порядка $M$ усеченной системы и значения из [8] для различных значений параметра $d/a$. Из таблицы видно, что для достижения точности не хуже, чем 0.1 %, достаточно решать систему уравнений 3-го порядка. На рис. 3 показаны эквипотенциальные кривые пространственного распределения потенциала при $d/a=1.5$ и 3 соответственно. Цифрами обозначены значения $U/V_0$, где $V_0$ — потенциал лент.

Таким образом, путем полуобращения оператора с помощью метода моментов построено строгое решение задачи о пространственном распределении электростатического потенциала в двумерной структуре, состоящей из конечного числа одинаковых металлических лент, расположенных в $N$ параллельных плоскостях.

## Литература


[1] *Лебедев Н. Н.* ДАН СССР, 1957, т. 114, № 3, с. 513—516.
[2] *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. М.; Л.: Наука, 1977. 220 с.
[3] *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.
[4] *Лебедев Н. Н.* ЖТФ, 1958, т. 28, № 6, с. 1330—1339.
[5] *Дружкин Л. А.* Задачи теории поля. М., 1964. 461 с.
[6] *Дружкин Л. А.* Интегральные уравнения электростатики и краевые задачи. М.: Сов. радио, 1967. 133 с.
[7] *Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л.* Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. Киев: Наукова думка, 1984. 239 с.
[8] *Иоссель Ю. Я., Кочанов Э. С., Струнский М. Т.* Расчет электрической емкости. Л.: Энергоиздат, 1981. 288 с.
[9] *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1963. 1100 с.



Радиоастрономический институт
АН УССР
Харьков



Поступило в Редакцию
18 апреля 1986 г.
В окончательной редакции
11 ноября 1986 г.