

УДК 53 : 51

СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

А. Б. Белогорцев, Д. М. Ваврис, О. А. Третьяков

Проведен анализ возбуждения стохастических колебаний в квазилинейных колебательных системах, описываемых укороченными уравнениями при двухчастотном внешнем воздействии. Рассмотрены особенности переходов к хаосу, обусловленных перекрытием резонансов и разрушением неподвижной точки типа седло—фокус. Сформулированы аналитические условия возбуждения стохастических колебаний. Приведены результаты численных экспериментов.

1. Введение. Постановка задачи

Одно из интенсивно развивающихся направлений теории нелинейных колебаний связано с изучением стохастических колебаний (СК), возбуждаемых в детерминированных динамических системах регулярным внешним воздействием. Как правило, переход к хаосу в этом случае наблюдается при конечной (не малой) величине параметра, определяющего степень нелинейности конкретной системы [1, 2]. Например, применительно к обобщенному уравнению нелинейного осциллятора

$$d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x = \varepsilon [f(x, dx/dt) + g(t)] \quad (1)$$

это соответствует тому, что стохастические режимы колебаний возникают при конечных значениях ε . Такая закономерность возбуждения СК была продемонстрирована в целом ряде работ (см., например, [3–6]) для конкретных видов функций $f(x, dx/dt)$ и $g(t)$, определяющих нелинейные свойства колебательной системы и закон изменения во времени внешнего воздействия, при исследовании разнообразных физических процессов.

Важным представляется выяснить вопрос, при каких условиях в динамических системах, описываемых уравнением (1) с $\varepsilon \ll 1$, возможно возникновение хаоса уже в первом приближении по ε . Такие квазилинейные системы ($\varepsilon \ll 1$) являются характерными для большого числа практических ситуаций [7]. Так, постановка данных исследований в значительной степени была стимулирована обнаруженным экспериментально явлением стохастизации колебаний при воздействии амплитудно-модулированного сигнала на добротный радиотехнический контур [8], который является одной из простейших моделей слабонелинейных диссипативных колебательных систем.

Исходя из общих положений теории колебаний, понятно, что уравнения типа (1) могут допускать стохастические решения при $\varepsilon \ll 1$, если функция $g(t)$ является периодической (но не гармонической) функцией времени, т. е. содержит несколько дискретных спектральных составляющих в своем спектре. В этом случае механизм стохастизации колебаний может быть связан, например, с взаимодействием резонансов [1]. Основной задачей проведенных нами исследований являлось определение аналитических условий реализации этого или других возможных механизмов, приводящих к возбуждению СК в системах типа (1), а также исследование характерных особенностей их стохастической динамики путем проведения соответствующих численных экспериментов.

Решение уравнения (1) представим в виде $x = a_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi)$, где a_0 имеет размерность исходной переменной x ; $A(t)$, $\varphi(t)$ — медленно меняющиеся функции времени, которые, как известно [9], в первом приближении по ε находятся из следующей системы уравнений в безразмерных переменных:

$$dA/d\tau = D(A)A - B(\tau) \cos \varphi, \quad (2a)$$

$$A \frac{d\varphi}{d\tau} = \delta(A)A + B(\tau) \sin \varphi. \quad (2б)$$

Здесь $D(A)$ описывает диссипативные свойства системы, $\delta(A)$ — ее неизохронность, их связь с функцией $f(x, dx/dt)$ хорошо известна [9], $\tau = \varepsilon \omega_0 t$ — безразмерное «медленное» время. При выводе уравнений (2) предполагалось, что внешнее воздействие представляет собой амплитудно-модулированное колебание $g(t) \sim B(\tau) \cos \omega t$ с несущей частотой ω , близкой к собственной частоте системы ω_0 . При этом также не представляет особой сложности обобщить полученные результаты на случай других типов модуляции.

Для ряда частных случаев стохастические решения системы уравнений типа (2) известны. В отсутствие диссипации ($D(A) \equiv 0$) она сводится к виду, исследовавшемуся в работах [1, 2], а условия стохастизации ее решений определяются из критерия перекрытия резонансов. При $D(A) \neq 0$ и некоторых дополнительных предположениях относительно функций $D(A)$ и $\delta(A)$ уравнения (2) анализировались в работе [10], где рассматривалось внешнее воздействие в виде периодической последовательности δ -импульсов. Это позволило сравнительно просто свести исследование системы (2) к стандартному диссипативному отображению.

В данной работе проводится анализ стохастизации решений уравнений (1) при условии воздействия на колебательную систему внешнего источника с минимальным числом независимых частот. Это имеет место, если $B(\tau)$ является гармонической функцией, которую выбираем в следующем виде:

$$B(\tau) = b \cos \Omega \tau, \quad (3)$$

где Ω — безразмерная частота модуляции внешнего воздействия $g(t)$. Таким образом, в соответствии с (2), (3) рассматривается двухчастотное внешнее воздействие. При этом анализируется возбуждение СК в активных системах, что соответствует наличию устойчивого предельного цикла в системе (2) с конечной амплитудой A_a ($D(A_a) = 0$) при $B(\tau) \equiv 0$. Особенности перехода к хаосу в пассивных системах будут рассмотрены в отдельной работе.

2. Условия реализации механизма взаимодействия резонансов

Взаимодействие резонансов является одним из универсальных механизмов стохастизации колебаний в гамильтоновых системах [1, 11]. Рассмотрим возможность его реализации в диссипативных системах ¹ типа (2) при полигармоническом внешнем воздействии.

В силу неизохронности колебаний, описываемых уравнениями (2), резонансное взаимодействие системы с каждой из двух независимых частот внешнего воздействия имеет место вблизи различных значений амплитуды колебаний A_1 и A_2 , определяемых соотношением

$$\delta(A_i) = \pm \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

где $i=1$ соответствует верхнему знаку, а $i=2$ — нижнему. Следуя общей методике исследования взаимодействия резонансов [11], рассмотрим поведение решений уравнений (2) вблизи i -го резонансного значения амплитуды. Полагая, что

¹ Под диссипативными системами, как обычно, мы понимаем системы с несохраняющимся фазовым объемом. Отличие активной системы от пассивной состоит в том, что в первом случае существуют области фазового пространства, в которых фазовый объем расширяется, а в пассивных системах только сжимается.

амплитуда внешнего воздействия является малой в том смысле, что выполняется условие

$$b/A_i \ll 1, \quad (5)$$

сводим уравнения (2) к следующему виду для $i=1, 2$:

$$\frac{da_i}{d\tau} = \mu_i - p_i a_i - \frac{b}{2} \cos \psi_i, \quad (6a)$$

$$d\psi_i/d\tau = \kappa_i a_i. \quad (6б)$$

Здесь введены новые переменные $a_i = A - A_i$, $\psi_i = \varphi \mp \Omega \tau$ и обозначено: $\kappa_i = = d\delta(A_i)/dA$ — параметр неизохронности; $p_i = -d[D(A_i)A_i]/dA$ — прочность резонанса, которую мы вводим по аналогии с прочностью предельного цикла, определяемого как $p_a = -d[D(A_a)A_a]/dA$; $\mu_i = D(A_i)A_i$ — параметр, определяющий влияние отклонения резонансного значения амплитуды A_i от амплитуды предельного цикла A_a ; при $A_i = A_a$ величина $\mu_i = 0$. При выводе (6) предполагалось, что отклонения a_i являются малыми, что позволило ограничиться двумя первыми членами разложения функции $D(A)$ и $\delta(A)$ в ряд Тейлора по степеням a_i . Система уравнений (6), как легко убедиться, сводится к уравнению нелинейного маятника с затуханием и постоянным вращающим моментом

$$\frac{d^2\psi_i}{d\tau^2} + p_i \frac{d\psi_i}{d\tau} + b \frac{\kappa_i}{2} \cos \psi_i = \mu_i \kappa_i, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

которое описывает поведение динамической системы вблизи каждого из резонансов.

Исходя из известных результатов [12], можно ожидать, что стохастизация колебаний, обусловленная взаимодействием резонансов, будет наблюдаться при достаточно малом затухании p_i по сравнению с $b\kappa_i/2$, т. е. при

$$|p_i| \equiv \left| \frac{d[D(A_i)A_i]}{dA} \right| \ll \left| \frac{b\kappa_i}{2} \right|, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Влияние вращающего момента $\mu_i \kappa_i$ на взаимодействие резонансов до сих пор практически не рассматривалось. Однако, исходя из анализа фазового портрета уравнения (7), можно отметить [13], что увеличение $\mu_i \kappa_i$ по сравнению с $b\kappa_i/2$ приводит к сближению и последующему слиянию при $\mu_i = b/2$ точек типа седло и фокус, что соответствует исчезновению i -го резонанса. В силу этого понятно, что для реализации условия перекрытия резонансов необходимо, чтобы величина μ_i удовлетворяла условию

$$|\mu_i| \equiv |D(A_i)A_i| \ll b/2, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

При выполнении соотношений (8), (9) условие стохастизации решений системы (2) приближенно находится из (7) с помощью критерия перекрытия резонансов [11], полученного для гамильтоновых систем. В нашем случае он сводится к виду

$$1 \leq k \equiv \sqrt{b/2} (\sqrt{\kappa_1} + \sqrt{\kappa_2})/\Omega \leq 2. \quad (10)$$

Ограничение сверху на величину k определяется числом взаимодействующих резонансов [1], которое равняется двум. Таким образом, переход к хаосу, обусловленный взаимодействием резонансов в квазилинейных колебательных системах, может наблюдаться, если их обобщенные характеристики $D(A)$ и $\delta(A)$ удовлетворяют определенным условиям (8)—(10).

До настоящего времени мы не накладывали особых ограничений на вид функций $D(A)$ и $\delta(A)$. Однако для анализа возможности выполнения сформулированных условий (8)—(10) необходимо рассмотреть конкретный тип нелинейности системы. С учетом первых членов разложения по A функции $D(A)$ и $\delta(A)$ могут быть представлены в виде ²

$$D(A) = \alpha_0 - \beta_1 A^2, \quad \delta(A) = -\Delta_0 + \beta_2 A^2. \quad (11a), (11б)$$

² Как известно [9], отсутствие линейного члена по A в разложениях (14) обусловлено применением метода усреднения.

Такого рода представления широко применяются при моделировании разнообразных физических процессов в слабонелинейных системах [7].

При одночастотном воздействии на колебательную систему типа (2) характер возбуждаемых колебаний (синхронный или асинхронный режим возбуждения) определяется амплитудно-частотной характеристикой. Типичный вид этой зависимости, имеющий место при $(b/4\beta_1)^2 > (\alpha_0/3\beta_1)^3$, приведен на рис. 1 (кривая 1) в виде функции амплитуды A от параметра Δ_0 . Здесь Δ_0 определяет расстройку частоты внешнего воздействия относительно собственной частоты системы (1) при $\varepsilon=0$. Штриховыми линиями отмечены неустойчивые состояния типа фокус, точками — седловые неустойчивые состояния. На этом рисунке также отмечено положение амплитуды автономных колебаний A_a и параметра расстройки Δ_a , соответствующего частоте автоколебаний. Как и при получении условия перекрытия резонансов в гамильтоновых системах, не будем учитывать взаимное влияние спектральных составляющих $\Delta_0 \pm \Omega$, полагая, что в системе возбуждаются гармонические колебания на этих двух частотах. Их амплитуды опреде-

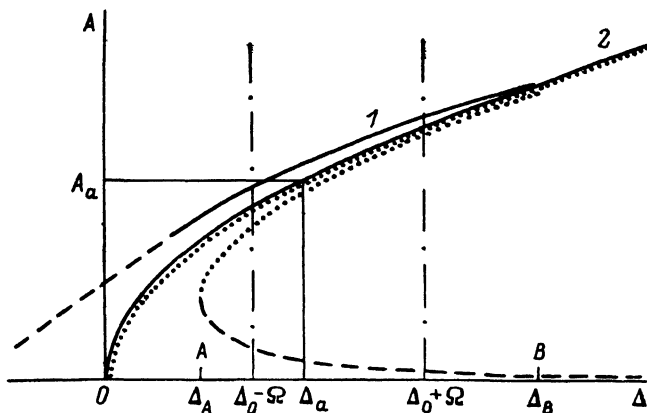


Рис. 1. Амплитудно-частотная зависимость неизосинхронной колебательной системы при одночастотном внешнем воздействии.

ляются относительным положением этих частот (на рис. 1 они выделены штрихпунктирными линиями) на амплитудно-частотной зависимости. Приближения, которые обычно делаются при выводе критерия перекрытия резонансов (10), соответствуют переходу от кривой 1 к кривой 2 (рис. 1). Понятно, что для реализации условия перекрытия резонансов в реальной физической ситуации частоты внешнего источника $\Delta_0 \pm \Omega$ должны попадать в область, где одновременно существуют седловая особая точка и состояние равновесия типа устойчивый фокус³ (интервал AB на рис. 1). Определив положения точек A, B , приходим к следующим необходимым условиям:

$$\Delta_0 + \Omega \leq \Delta_B \approx \beta_2 (b/2\beta_1)^{2/3} (\sqrt{1+q} + \sqrt{1-q})^2, \quad (12a)$$

$$\Delta_0 - \Omega \geq \Delta_A \approx 2 (\beta_2 b^2/4)^{1/3}, \quad (12b)$$

где $q = \sqrt{1 - 4\alpha^3/27\beta_1 b^2}$. Эти соотношения должны выполняться совместно с условием перекрытия резонансов (10), которое сводится с учетом представления (11) к виду

$$1 \leq k \equiv (\beta_2 b^2)^{1/3} (\sqrt[4]{\Delta_0 + \Omega} + \sqrt[4]{\Delta_0 - \Omega}) / \Omega \leq 2. \quad (13)$$

Теперь остановимся на анализе возможности реализации условий (8), (9), которые преобразуются к следующим неравенствам:

³ Строго говоря, при определенных значениях параметров неподвижные точки типа фокус могут переходить в точки типа узел, однако для последующего анализа различие между ними несущественно.

$$\left| 3\beta_1 \left(A_i^2 - \frac{1}{3} A_a^2 \right) \right| \ll b\beta_2 A_i, \quad (14a)$$

$$|\beta_1 (A_i^2 - A_a^2)| \ll \frac{b}{2} A_i, \quad (14б)$$

где резонансные значения амплитуд A_i и амплитуда автоколебаний A_a определяются соотношениями

$$A_i = \sqrt{(\Delta_0 \pm \Omega)/\beta_2}, \quad A_a = \sqrt{\alpha_0/\beta_1}. \quad (15)$$

Из анализа этих выражений следует, что условия (14) выполняются, если значения амплитуд A_1, A_2, A_a близки по значению, что соответствует следующему ограничению на порядок величин параметров:

$$(\Delta_0 \pm \Omega)/\beta_2 \approx \alpha_0/\beta_1, \quad (16a)$$

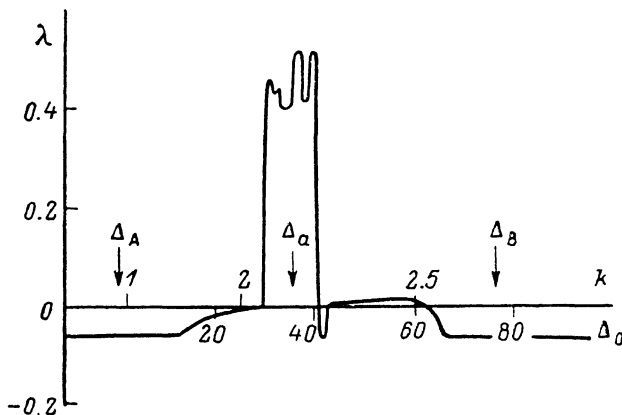


Рис. 2. Зависимость показателя Ляпунова λ от параметра частотной расстройки Δ_0 и параметра перекрытия резонансов k .

и, кроме того, параметры α_0 и β_1 должны удовлетворять условию

$$\alpha_0, \beta_1 \ll b. \quad (16б)$$

Последнее соответствует очевидному требованию, что для реализации механизма перекрытия резонансов параметры α_0, β_1 , определяющие величину диссипации в колебательной системе, должны быть малы по сравнению с амплитудой внешнего воздействия b . При выполнении (16б) соотношение (12а) значительно упрощается и сводится к виду

$$\Delta_0 + \Omega \leq \beta_2 (b/\beta_1)^{1/2}. \quad (17)$$

Полученные условия (12), (13), (16) совместно определяют допустимый диапазон изменения параметров колебательной системы, в котором могут возбуждаться СК. Как показали численные эксперименты, их использование позволяет достаточно точно локализовать в пространстве параметров область стохастического поведения решений уравнений (2). В качестве одного из численных критериев, определяющего переход системы в режим СК, служила величина максимального характеристического показателя Ляпунова λ [2]. Зависимость величины λ от Δ_0 приведена на рис. 2. На оси абсцисс отложены также значения параметра перекрытия резонансов k и отмечено положение характерных величин Δ_A, Δ_B и Δ_a (рис. 1). В соответствии с (12), (13), (16) параметры системы задавались следующими: $\alpha_0 = 0.0645$, $\beta_1 = 0.0018$, $\beta_2 = 1.0$, $b = 0.81$, $\Omega = 2.0$. Расчет λ проводился начиная с моментов времени $\tau_n \gg \tau_{\text{рел}}$, где $\tau_{\text{рел}} \approx 1/\alpha_0$ — характерное время релаксации колебаний в системе. Для параметров, удовлетворяющих условиям (12), (13), (16), обычно необходимо выбирать $\tau_n \geq 100 \tau_{\text{рел}}$, чтобы устранить влияние эффектов, связанных с переходным хаосом.

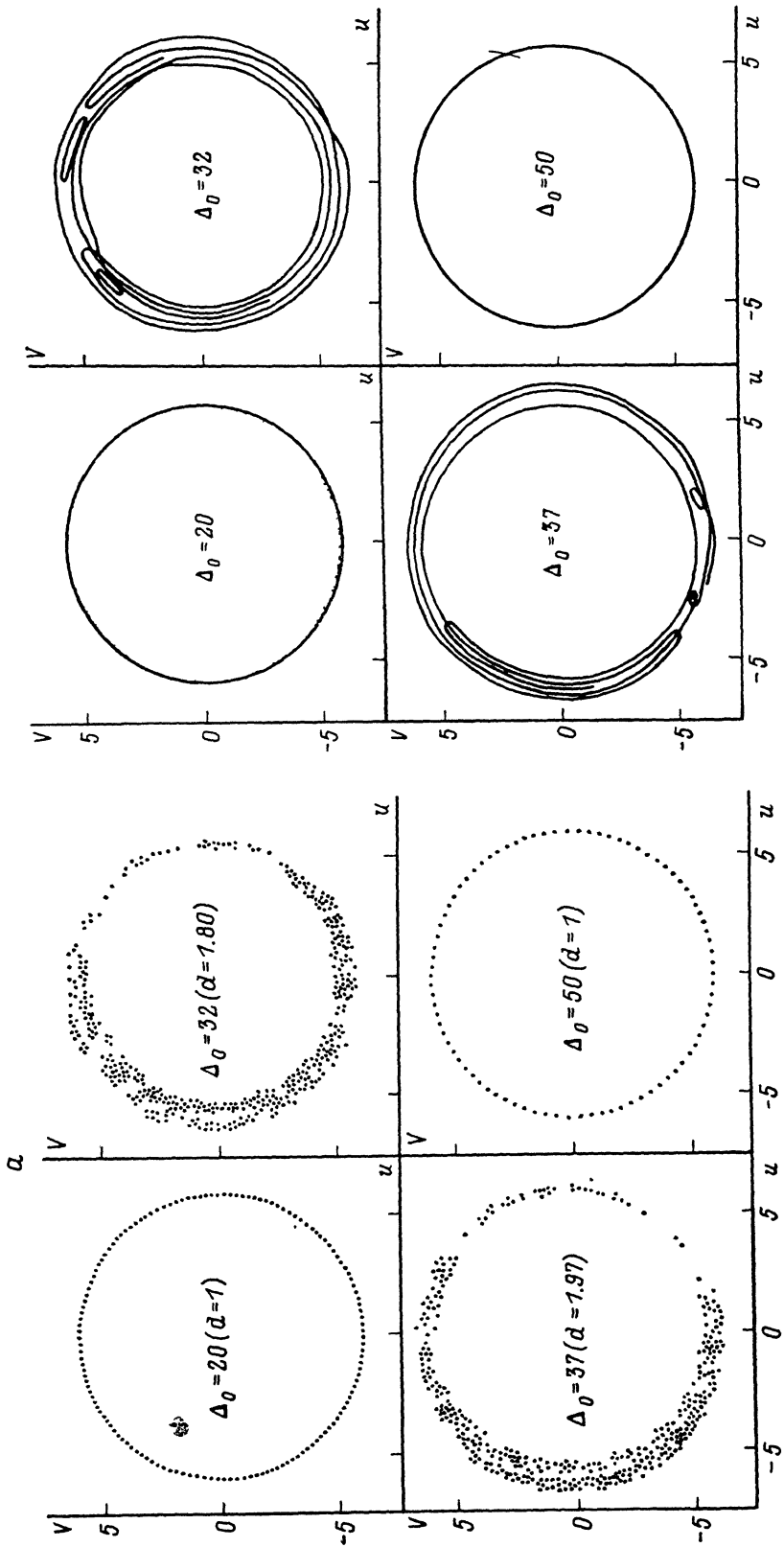


Рис. 3. Отображения Пуанкаре (а) и фазовые траектории (б) системы уравнений (2) для различных значений Δ_0 , находящихся в области стохастиче-ского ($\Delta_0 = 32$; 37) и регулярного ($\Delta_0 = 20$; 50) поведения решений (рис. 2).

Согласно рис. 1, изменение Δ_0 соответствует «перемещению» частот внешнего воздействия по амплитудно-частотной характеристике системы. Из рис. 2 следует, что стохастизация колебаний (положительные значения λ) наблюдается именно в окрестности $\Delta_0 \simeq \Delta_a$, что и следует из условия (16а). При отклонении параметра Δ_0 от значения Δ_a амплитуды A_i начинают заметно отличаться от A_a , что приводит одновременно к заметному увеличению прочности резонансов p_i и параметров μ_i . Это, как и следовало ожидать из проведенного анализа, приводит к переходу в режим регулярных колебаний.

Остановимся вкратце на свойствах хаотического движения в таких системах. На рис. 3 приведены результаты расчета отображений Пуанкаре через период внешней модуляции и фазовых траекторий на плоскости переменных $u = A \cos \varphi$, $v = A \sin \varphi$. Параметры системы выбирались такими же, как и в случае рис. 2. На рис. 3, а приведены также значения ляпуновской размерности d аттракторов в сечении Пуанкаре, рассчитанные по известной методике [2]. Близость этих значений к 2 для хаотических аттракторов указывает на то, что основные особенности реализации механизма взаимодействия резонансов подобны тем, которые имеют место в гамильтоновых системах [14].

При выборе расстройки Δ_0 вне области существования стохастических колебаний, но при $k \geq 1$ ($\Delta_0 = 20; 50$), в системе возбуждаются квазипериодические колебания с характерными для них отображениями Пуанкаре, размерность которых точно равна 1. В этом случае все точки отображения расположены на одной замкнутой линии, а движение происходит по поверхности тора, проекция которого на фазовую плоскость изображена на рис. 3, б.

Близость рассматриваемых систем к гамильтоновым определяется значениями параметров α_0 , β_1 , которые, как уже отмечалось, должны быть малыми по сравнению с b для реализации механизма взаимодействия резонансов. В реальных ситуациях это соответствует тому, что система находится вблизи порога самовозбуждения и характеризуется малой прочностью предельного цикла [7]. Другой предельный случай, который часто встречается в реальных системах, соответствует режиму развитых автоколебаний с большой прочностью предельного цикла. В рассматриваемом случае этому соответствуют значения α_0 , $\beta_1 \sim b$. Здесь уже невозможно говорить о близости уравнений (2) к гамильтоновой системе, и вопрос о возможном механизме стохастизации требует отдельного рассмотрения. Особенности разрушения квазипериодических колебаний в негамильтоновых системах под действием внешнего сигнала к настоящему времени, по-видимому, наиболее полно изучены для систем с инерционной нелинейностью (см., например, [15]).

3. Стохастизация колебаний в существенно негамильтоновых системах

Проведенные исследования показали, что при больших параметрах диссипации, когда система (2) является существенно негамильтоновой, также наблюдается переход к хаосу при двухчастотном внешнем воздействии. Стохастизация колебаний в данном случае обусловлена тем, что в таких системах при небольшом изменении параметров внешнего воздействия происходит рождение—уничтожение пары седло—фокус, если одна из независимых частот, например $\Delta_0 + \Omega$, находится вблизи точки B на рис. 1 (точка, которой на фазовой плоскости соответствует наличие неподвижной точки типа седло—фокус). Наличие второй независимой частоты $\Delta_0 - \Omega$ приводит к случайному каскаду прямых и обратных бифуркаций слияния седла и фокуса и, следовательно, переходу системы в режим СК. Исходя из сказанного можно выписать необходимое условие возбуждения СК, которое следует из требования попадания частоты $\Delta_0 + \Omega$ в точку B

$$\Delta_0 + \Omega = \Delta_B. \quad (18)$$

Проведенные численные исследования показали, что такой механизм стохастизации является грубым в том смысле, что он реализуется в определенном диапазоне параметров в окрестности (18), т. е. равенство (18) может выполняться приближенно. Для примера на рис. 4 приведены результаты расчета показателя Ляпунова λ от безразмерной амплитуды внешнего воздействия b .

Параметры модели задавались следующими: $\alpha_0=1$, $\beta_1=1$, $\beta_2=1.5$, $\Omega=1$, $\Delta_0=1.5$. Согласно рис. 4, стохастизация колебаний наблюдается при $b \sim \alpha_0$, β_1 и при этом большинство условий перекрытия резонансов (12)—(14), (16) не выполняется. Стрелкой на этом рисунке отмечено значение b , при котором точно выполняется соотношение (18), и именно в окрестности этого значения наблюдается возбуждение СК.

Наряду с выполнением условия (18), как показал численный анализ, должны накладываться определенные ограничения на допустимый диапазон изменения величины 2Ω , равной расстоянию между двумя частотами внешнего воздействия. Для иллюстрации этого на рис. 5 приведена типичная зависимость λ от расстояния 2Ω . При построении этой зависимости параметр Δ_0 изменялся таким образом, чтобы условие (18) выполнялось точно. Из рис. 5, а также из результатов расчетов в широком диапазоне изменения параметров прослеживается следующая закономерность. При увеличении 2Ω с определенного его значения наблю-

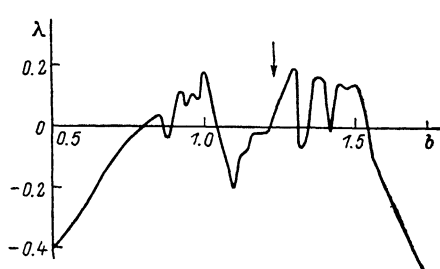


Рис. 4. Зависимость показателя Ляпунова от безразмерной амплитуды внешнего воздействия.

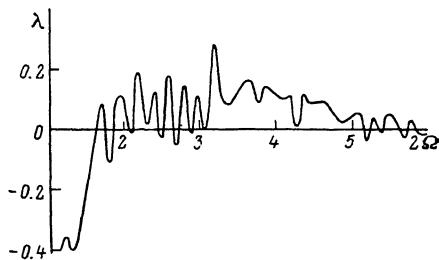


Рис. 5. Зависимость показателя Ляпунова от расстояния между независимыми частотами внешнего воздействия.

дается резкое увеличение λ и переход в режим СК. Такой переход наблюдается тогда, когда 2Ω становится больше ширины гистерезисного участка (рис. 1). Это позволяет получить оценку минимально необходимого расстояния между частотами внешнего воздействия

$$2\Omega \geq \Delta_B - \Delta_A.$$

При дальнейшем увеличении расстояния СК сохраняются в достаточно широком диапазоне изменения 2Ω при наличии ряда окон порядка. Уменьшение в среднем λ при больших значениях 2Ω и постепенный переход динамической системы к регулярному поведению, по-видимому, обусловлены тем, что в этом случае безразмерная частота $\Delta_0 - \Omega$ находится далеко от резонансной области и ее воздействие оказывается незначительным.

Для анализа структуры СК рассмотрим отображения Пуанкаре и фазовые портреты системы (рис. 6). Здесь выбирались параметры модели те же, что и на рис. 4 для значений b , соответствующих положительным значениям λ ($b=1$; 1.3), «окну» порядка в хаосе ($b=1.1$), и для $b=2$, когда частота $\Delta_0 + \Omega$ находится далеко от точки B (рис. 1). В последнем случае в системе возбуждаются периодические колебания с периодом, равным периоду модуляции внешнего воздействия. В «окнах» порядка структура периодических колебаний является более сложной, и обычно здесь наблюдаются периодические колебания с периодом, в несколько раз большим периода амплитудной модуляции; для приведенного случая $b=1.1$ он равняется трем периодам. Отображения при $\lambda > 0$, соответствующие переходу к СК, имеют канторовскую структуру. Здесь в отличие от случая перекрытия резонансов размерность странных аттракторов близка к единице. Это еще раз подтверждает, что при таких параметрах рассматриваемая система является существенно негамильтоновой.

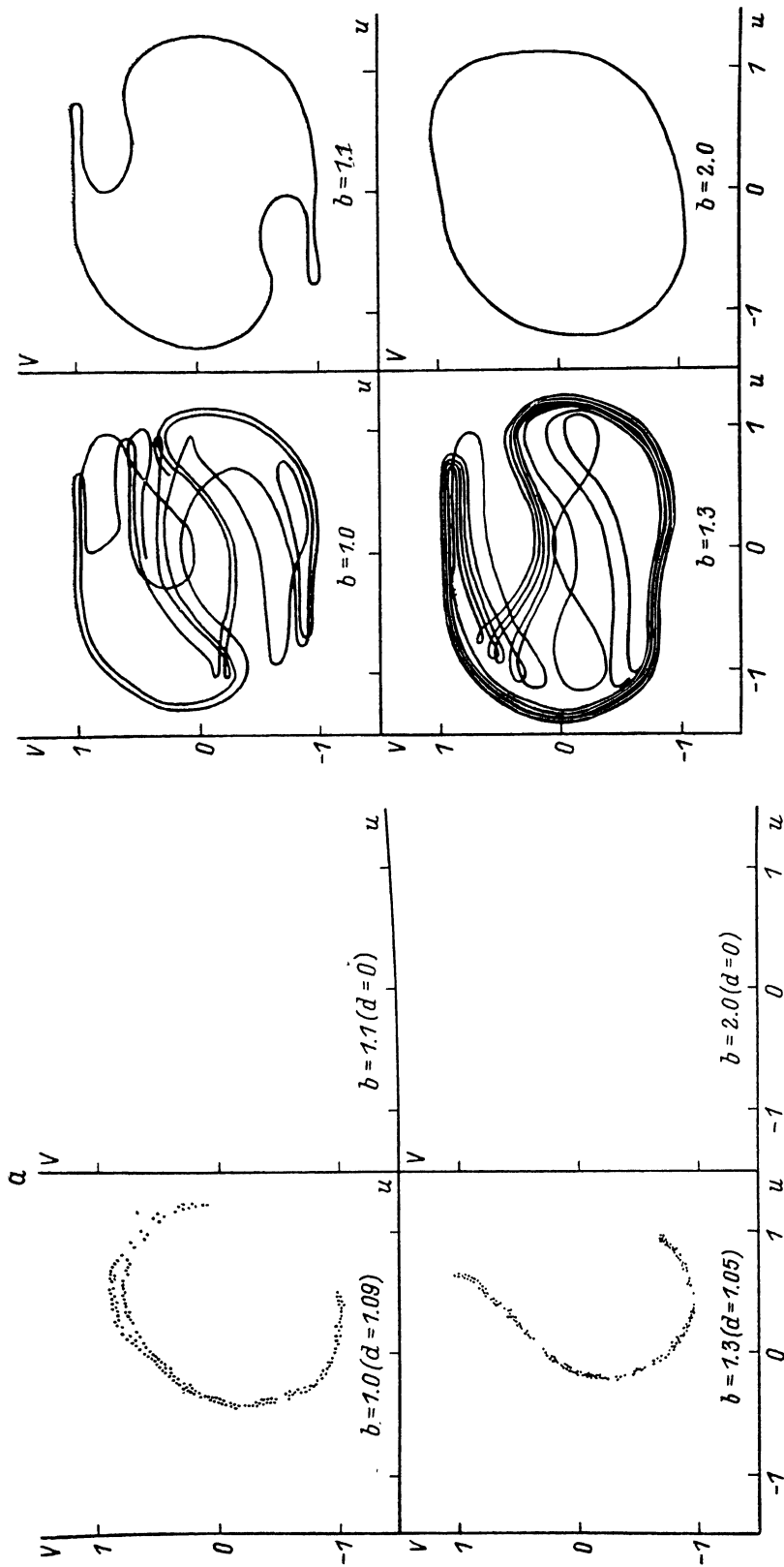


Рис. 6. Отображения Пуанкаре (а) и фазовые траектории (б) для различных значений амплитуды внешнего воздействия при реализации механизма стохастичности, обусловленного разрушением неподвижной точки типа седло—фокус.

Основные результаты данной работы заключаются в следующем.

1. Показано, что в квазилинейных диссипативных колебательных системах, моделирующих большое число реальных физических процессов, наблюдается стохастизация колебаний при воздействии на них внешнего сигнала с двумя независимыми частотами.

2. Выяснено, что в таких системах можно реализовать механизмы стохастизации, обусловленные взаимодействием резонансов и разрушением неподвижной точки типа седло—фокус.

3. Показано, что исходя из анализа амплитудно-частотной характеристики, описывающей поведение динамической системы при одночастотном воздействии, можно получить достаточно полные аналитические условия возбуждения стохастических колебаний при двухчастотном воздействии.

Литература

- [1] Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 272 с.
- [2] Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
- [3] Крюков Б. И., Середович Г. И. ДАН СССР, 1981, т. 258, № 2, с. 311—314.
- [4] Дмитриев А. С., Кислов В. Я. РИЭ, 1982, т. 27, № 12, с. 2454—2456.
- [5] Дмитриев А. С., Кислов В. Я., Спиро А. Г. РИЭ, 1983, т. 28, № 12, с. 2430—2439.
- [6] Балакирев В. А., Буц В. А., Мачехин Ю. П., Толстолужский А. П. Письма в ЖТФ, 1983, т. 9, № 23, с. 1427—1431.
- [7] Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М., 1980. 359 с.
- [8] Белогорцев А. Б., Ваврик Д. М., Калугин Б. А. ЖТФ, 1987, т. 57, № 3, с. 559—561.
- [9] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
- [10] Заславский Г. М., Рачко Х.-Р. Я. ЖЭТФ, 1979, т. 76, № 6, с. 2052—2064.
- [11] Чуриков Б. В. Нелинейный резонанс. Новосибирск, 1977. 82 с.
- [12] Vlasova O. F., Zaslavsky G. M. Phys. Lett., 1983, v. A99, N 9, p. 405—410.
- [13] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
- [14] Афраймович В. С., Рабинович М. И., Угодников А. Д. Изв. вузов. Радиофизика, 1984, т. 27, № 10, с. 1346—1349.
- [15] Анищенко В. С. ЖТФ, 1986, т. 56, № 2, с. 225—237.

Харьковский государственный
университет им. А. М. Горького

Поступило в Редакцию
12 июня 1986 г.
В окончательной редакции
30 декабря 1986 г.