

УДК 537.312.62

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ТЕПЛОТВОДА НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ НОРМАЛЬНОЙ ЗОНЫ В КОМПОЗИТНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ

А. Вл. Гуревич, Р. Г. Минц, А. А. Пухов

Рассмотрено распространение нормальной зоны в композитных сверхпроводниках, покрытых слоем тепловой изоляции. Показано, что при достаточно больших толщинах покрытия мощность теплоотвода в охладитель становится неоднозначной функцией температуры сверхпроводника. Предложена регулярная процедура расчета распределения температуры в нормальной зоне, скорости ее распространения и устойчивости. Показано, что покрытие приводит к уменьшению скорости распространения нормальной зоны.

Распространение нормальной зоны в сверхпроводящих композитах с током I обычно описывается одним уравнением теплопроводности

$$v_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \kappa_s \frac{\partial T_s}{\partial x} + Q(T_s, I) - W(T_s), \quad (1)$$

где удельные мощности джоулева тепловыделения $Q(T_s, I)$ и теплоотвода в охладитель $W(T_s)$, теплоемкость $v_s(T_s)$ и теплопроводность $\kappa_s(T_s)$ являются однозначными функциями температуры сверхпроводника T_s [1, 2]. Существуют, однако, ситуации, когда W или Q зависят от T неоднозначно и обычная схема вычисления скорости распространения нормальной зоны $v(I)$ [1-4] неприменима. Нахождению $v(I)$ в этом случае и посвящена настоящая статья.

Неоднозначность $W(T)$ или $Q(T)$ может возникать, в частности, при переходе от режима свободной конвекции к пузырьковому кипению охладителя [5], при учете неоднородности распределения температуры в композитах с достаточно большими поперечными размерами [2] и т. д. В настоящей работе рассмотрена неоднозначность $W(T_s)$, возникающая в проводниках, покрытых слоем тепловой изоляции, при наличии кризиса кипения охладителя. В этом случае условие баланса тепла для однородного распределения $T(x)$ имеет вид

$$(T_s - T_i) g_i = q(T_i, T_0), \quad (2)$$

где T_i, T_0 — температуры внешней поверхности изоляции и охладителя; $g_i \approx \kappa_i/d_i$; d_i, κ_i — толщина и теплопроводность изоляции; $q(T_i, T_0)$ — плотность потока тепла в охладитель.

Графическое решение уравнения (2) показано на рис. 1. Видно, что при достаточно большой толщине $d_i > d_c$ оно может иметь три корня $T_i(T_s)$ из-за характерной для кризиса кипения N-образной зависимости $q(T_i)$. Это означает, что удельная мощность теплоотвода $W(T_s) \sim [T_s - T_i(T_s)] g_i$ становится S-образной функцией T_s , имеющей в интервале $T_- < T_s < T_+$ две устойчивые и одну неустойчивую ветви (рис. 2). Критическая толщина d_c определяется из условия $g_i + \min \partial q / \partial T_i = 0$, откуда

$$d_c = \kappa_i \left[\max \left| \frac{\partial q}{\partial T_i} \right| \right]^{-1}. \quad (3)$$

Производная в (3) берется на неустойчивом переходном участке кривой $q(T_i)$, где $\partial q/\partial T_i < 0$. Полагая $T_0 = 4.2$ К, $\partial q/\partial T_i \approx 1$ Вт/см·К, находим, что для органического покрытия с $\kappa_i \approx 10^{-3}$ Вт/см·К толщина $d_c \sim 10$ мкм.

Таким образом, при $d_i > d_c$ функция $W(T_s)$ становится неоднозначной и необходимо указать правило отбора ветвей $W(T_s)$ при расчете $v(I)$ с помощью уравнения (1). В настоящей работе показано, что оно состоит в следующем: при $T_0 < T_s < T^*$ следует выбрать ветвь $W(T_s)$, отвечающую пузырьковому кипению, а при $T_s > T^*$ пленочному (жирные кривые на рис. 2). Температура перехода T^* лежит в интервале $T_- < T^* < T_+$ и определяется соотношением, приведенным ниже.

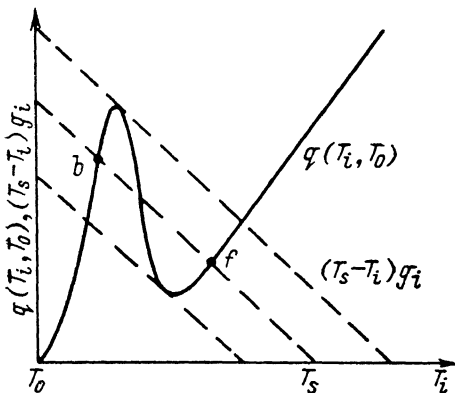


Рис. 1. Графическое решение уравнения (2).

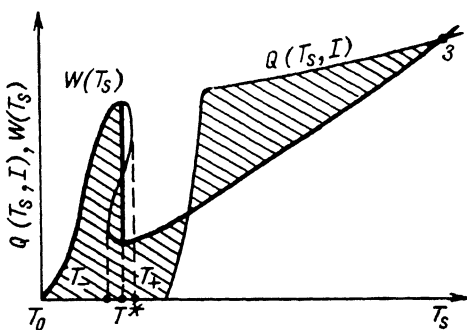


Рис. 2. Зависимости $Q(T_s, I)$ и $W(T_s)$ от T_s .

1. Стационарная волна переключения

Рассмотрим границу раздела нормальной и сверхпроводящей фаз ($N-S$ границу), движущуюся с постоянной скоростью v вдоль композита. Полагая толщины проводника и покрытия достаточно малыми, запишем одномерные уравнения для $T_s(\xi)$ и $T_i(\xi)$

$$\frac{d}{d\xi} \kappa_s \frac{dT_s}{d\xi} + v_s v \frac{dT_s}{d\xi} + Q(T_s, I) - (T_s - T_i)g = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d}{d\xi} \tilde{\kappa}_i \frac{dT_i}{d\xi} + \tilde{v}_i v \frac{dT_i}{d\xi} + (T_s - T_i)g - W(T_i, T_0) = 0, \quad (5)$$

где $\xi = x - vt$, индексы «s» и «i» относятся к сверхпроводнику и покрытию, $\tilde{\kappa}_i = d_i \kappa_i P/A$, $\tilde{v}_i = d_i v_i P/A$,

$$W(T_i, T_0) \equiv q(T_i, T_0) \frac{P}{A} = h(T_i)(T_i - T_0) \frac{P}{A}, \quad (6)$$

$$Q(T_s, I) = \rho j^2 \begin{cases} 0, & T_s < T_r(j), \\ 1 - j_c(T_s)/j, & T_r < T_s < T_c, \\ 1, & T_s > T_c, \end{cases} \quad (7)$$

$h(T_i)$ — коэффициент теплоотвода, $g = g_i P/A$, A и P — площадь и периметр поперечного сечения образца, ρ — его удельное сопротивление в нормальном состоянии, $j = I/A$ и $j_c(T) = I_c(T)/A$ — плотности транспортного и критического токов, T_c — критическая температура, $T_r(j)$ — температура перехода в резистивное состояние ($j = j_c(T_r)$).

Из (4), (5) следует, что характерные пространственные масштабы изменения температуры (L_s , L_i) и тепловые скорости (v_s , v_i) в сверхпроводнике и покрытии можно записать в виде

$$L_s = \left(\frac{\kappa_s A}{P h_f} \right)^{1/2}, \quad v_s = \frac{1}{v_s} \left(\frac{\kappa_s h_f P}{A} \right)^{1/2}, \quad (8)$$

$$L_i = d_i, \quad v_i = \kappa_i / \nu_i d_i, \quad (9)$$

где h_f — коэффициент теплоотвода в режиме пленочного кипения.

Для сверхпроводящих композитов характерна ситуация, когда $d_i \ll A/P \ll L_s$ [2]. Соотношение же между v_i и v_s зависит от d_i : $v_i \gg v_s$ при $d_i \ll d_k$ и $v_i \ll v_s$ при $d_i \gg d_k$. С помощью (8), (9) имеем

$$d_k \approx \frac{\kappa_i \nu_s}{\nu_i} \left(\frac{A}{Ph_f \kappa_s} \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Эта величина может быть много меньше поперечных размеров сверхпроводника $\sim A/P$, так как $\kappa_i \ll \kappa_s$.

Неравенство $L_i \ll L_s$ означает, что температура покрытия локально «подстраивается» под температуру композита, изменяясь вместе с ней на длинах $\sim L_s$. Это обычно служит основанием для пренебрежения производными в уравнении (5), что превращает его в локальное соотношение (2) [6]. Выразив тогда T_i через T_s , получим уравнение (1). Эта процедура является корректной, если полученная таким образом функция $W(T_i(T_s))$ однозначно зависит от T_s . В противном случае ($d_i > d_c$) необходимо учесть диффузию тепла в покрытии и рассмотреть полную систему уравнений (4), (5), не содержащую неоднозначных функций.

Рассмотрим теперь распределение температуры в $N-S$ границе. Граничные условия к уравнениям (4), (5) имеют в этом случае вид

$$\left. \frac{dT_i}{d\xi} \right|_{\pm\infty} = \left. \frac{dT_s}{d\xi} \right|_{\pm\infty} = 0, \quad (11)$$

$$T_i(-\infty) = T_s(-\infty) = T_0, \quad T_i(+\infty) = T_{3i},$$

$$T_s(+\infty) = T_{3s}, \quad (12), (13)$$

Рис. 3. Локальная связь (2)
 $T_s = T_s(T_i)$.

где T_{3i} и T_{3s} — температуры покрытия и композита в случае, когда он целиком находится в нормальном состоянии. Величины T_{3i} и T_{3s} являются однородными решениями (4), (5), им отвечает точка 3 на рис. 2.

Для построения решений $T_s(\xi)$ и $T_i(\xi)$, описывающих $N-S$ границу, воспользуемся тем, что в областях, где температура композита и покрытия изменяются на масштабах $\sim L_s$, они с точностью $\sim (L_i/L_s)^2 \ll 1$ связаны соотношением (2). Пусть ξ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, тогда $T_s(\xi)$ и $T_i(\xi)$ будут изменяться от T_0 до T_{3s} и T_{3i} . Это отвечает движению изображающей точки по нуль-изоклине $T_s(T_i)$ на рис. 3 из точки 0 в точку 3. Для N -образной кривой $T_s(T_i)$ существует несколько вариантов прохождения изображающей точки такого пути. В частности, она может проходить всю кривую $T_s(T_i)$, в том числе и ее падающий участок, соответствующий переходному режиму кипения охладителя. Другая возможность состоит в том, что изображающая точка движется сначала по левой ветви $T_s(T_i)$ (пузырьковое кипение) от точки 0 до точки b , затем при $T_s = T^*$ совершает горизонтальный переход на правую ветвь $T_s(T_i)$ (пленочное кипение) и движется по ней из точки f в точку 3. Этим двум возможностям отвечают качественно различные распределения температур в $N-S$ границах (рис. 4). Отметим, что в обоих случаях на профилях $T_i(\xi)$ возникают узкие области шириной $\sim L_i$, где производные $dT_i/d\xi$ и $d^2T_i/d\xi^2$ становятся аномально большими и учет диффузии тепла в покрытии становится существенным, несмотря на малость κ_i . Распределения же $T_s(\xi)$ таких областей не содержат и изменяются гладко на масштабах $\sim L_s$.

Помимо двух возможностей, рассмотренных выше, могут быть и более сложные, когда изображающая точка, прежде чем попасть в точку 3, совершает несколько горизонтальных переходов между правой и левой ветвями $T_s(T_i)$. Можно, однако, показать, что соответствующие распределения температуры не являются стационарными. Для этого получим уравнение, определяющее температуру перехода T^* между ветвями функции $T_s(T_i)$. Так как

$L_i \ll L_s$, то диффузией тепла в покрытиях можно пренебречь всюду, кроме узкой области на фронте $N-S$ границы, где происходит переход от режима пузырькового кипения к пленочному и величина T_i скачкообразно изменяется от T_b до T_f при неизменной температуре $T_s = T^*$ (рис. 3; 4, а). В результате в этой области можно записать (5) в виде

$$\frac{d}{d\xi} \tilde{x}_i \frac{dT_i}{d\xi} + \tilde{v}_i \nu \frac{dT_i}{d\xi} + (T^* - T_i)g - W(T_i, T_0) = 0. \quad (14)$$

Умножим (14) на $\tilde{x}_i dT_i/d\xi$ и проинтегрируем его по окрестности точки $\xi=0$ шириной $\sim L_i$. Тогда с точностью $(L_i/L_s)^2 \ll 1$ первым слагаемым в (14) можно пренебречь, откуда

$$\nu \int_{T_b}^{T_f} \left| \frac{dT_i}{d\xi} \right| \tilde{v}_i \tilde{x}_i dT_i + \int_{T_b}^{T_f} [(T^* - T_i)g - W(T_i, T_0)] \tilde{x}_i dT_i = 0. \quad (15)$$

Это соотношение и определяет температуру перехода T^* . Распределение $T_i(\xi, T^*)$, вошедшее в (15), удовлетворяет уравнению (14) с граничными ус-

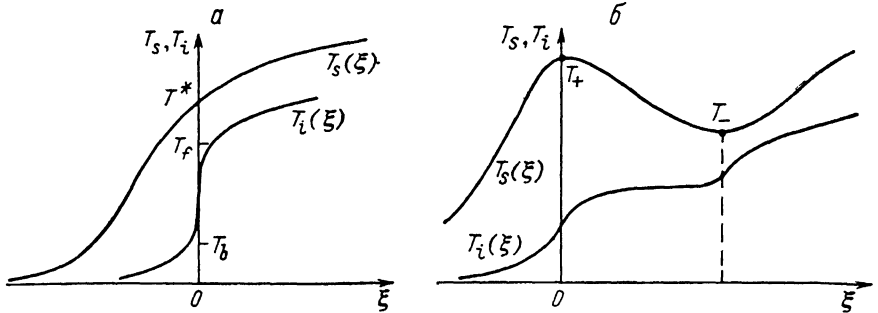


Рис. 4. Распространение температур $T_s(\xi)$ и $T_i(\xi)$ в устойчивой (а) и неустойчивой (б) $N-S$ границах.

ловиями $T_i(\infty) = T_f$, $T_i(-\infty) = T_b$, $dT_i/d\xi|_{\pm\infty} = 0$. Величины $T_b(T^*)$ и $T_f(T^*)$ находятся из соотношения $T_s(T_i) = T^*$ (рис. 3). Особенно простой вид (15) принимает при $\nu=0$

$$\int_{T_b}^{T_f} [(T^* - T)g - W(T)] \tilde{x}_i dT = 0. \quad (16)$$

Если пренебречь зависимостью \tilde{x}_i от T , то условие (16) сводится к равенству двух заштрихованных на рис. 3 площадей. Таким образом, температура T^* (ν) определяется однозначно, т. е. стационарных $N-S$ границ, характеризующихся несколькими переходами изображающей точки между ветвями $T_s(T_i)$ при различных T_i , не существует. Следовательно, изображенные на рис. 4 распределения $T_i(\xi)$ и $T_s(\xi)$ исчерпывают возможные типы стационарных $N-S$ границ. Зависимости $T_i(\xi)$ и $T_s(\xi)$ в этих $N-S$ границах (с нулевой по $(L_i/L_s) \ll 1$ точностью) могут быть найдены при решении лишь одного из уравнений (4), (5). Так, распределение $T_i(\xi)$ в $N-S$ границе на (рис. 4, б) находится с помощью уравнения (4), куда подставлена однозначная зависимость $T_s(T_i)$ из (2). Для $N-S$ границы (рис. 4, а) $T_s(\xi)$ определяется уравнением (4), где S-образная функция $T_i(T_s)$ находится из локального соотношения (2). При этом в интервале $T_0 < T_s < T^*$ следует выбрать ветвь $T_i^-(T_s)$, отвечающую пузырьковому режиму кипения, а для $T_s > T^*$ ветвь $T_i^+(T_s)$, отвечающую пленочному кипению. Тогда мощность теплоотвода из сверхпроводника $\bar{W}(T_s)$ имеет вид (рис. 2)

$$\bar{W}(T_s) = g \begin{cases} [T_s - T_i^-(T_s)], & T_s < T^*(\nu), \\ [T_s - T_i^+(T_s)], & T_s > T^*(\nu). \end{cases} \quad (17)$$

Рассмотрим устойчивость $N-S$ границы по отношению к малым возмущениям

$$\delta T_s(\xi, t) = \delta T_s(\xi) \exp(\lambda t), \quad \delta T_i(\xi, t) = \delta T_i(\xi) \exp(\lambda t).$$

Пусть для простоты $\nu=0$, а x_s и x_i не зависят от температуры. Тогда уравнение для $\delta T_s(\xi)$ и $\delta T_i(\xi)$ имеют вид

$$x_s \delta T_s'' - \left(\nu_s \lambda + g - \frac{\partial Q}{\partial T_s} \right) \delta T_s + g \delta T_i = 0, \quad (18)$$

$$\bar{x}_i \delta T_i'' - \left(\bar{\nu}_i \lambda + g + \frac{\partial W}{\partial T_i} \right) \delta T_i + g \delta T_s = 0, \quad (19)$$

$$\delta T_i(\pm \infty) = \delta T_s(\pm \infty) = 0, \quad (20)$$

где штрих означает дифференцирование по ξ ; $\delta T_s(\xi)$, $\delta T_i(\xi)$, λ — собственные функции и собственные значения, подлежащие определению. Зависимости $\partial Q/\partial T_s$ и $\partial W/\partial T_i$ от ξ определяются стационарными распределениями $T_s(\xi)$ и $T_i(\xi)$, которые неустойчивы, если присутствуют возмущения с $\text{Re } \lambda > 0$.

Одно из решений системы (18), (19) имеет вид

$$\delta T_i = C T_i'(\xi), \quad \delta T_s = C T_s'(\xi), \quad \lambda = 0, \quad C = \text{const.}$$

Это связано с трансляционной инвариантностью (4), (5) в однородной среде [3]. Воспользовавшись этим, перепишем уравнения (18), (19), введя новые переменные

$$\delta T_s(\xi) = \psi(\xi) T_s'(\xi), \quad \delta T_i(\xi) = \Phi(\xi) T_i'(\xi).$$

В результате

$$x_s \frac{d}{d\xi} (T_s'^2 \psi') - \nu_s \lambda \psi T_s'^2 + g(\Phi - \psi) T_s' T_i' = 0, \quad (21)$$

$$\bar{x}_i \frac{d}{d\xi} (T_i'^2 \Phi') - \bar{\nu}_i \lambda \Phi T_i'^2 + g(\psi - \Phi) T_s' T_i' = 0. \quad (22)$$

Сложим теперь уравнения (21), (22), умножив предварительно (21) на ψ , а (22) на Φ , и проинтегрируем их по ξ . В итоге получаем

$$\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (\nu_s T_s'^2 \psi^2 + \bar{\nu}_i T_i'^2 \Phi^2) d\xi = - \int_{-\infty}^{+\infty} [x_s T_s'^2 \psi'^2 + \bar{x}_i T_i'^2 \Phi'^2 + g(\psi - \Phi)^2 T_s' T_i'] d\xi. \quad (23)$$

Отсюда следует, что $N-S$ граница устойчива ($\lambda \leq 0$), если распределение температур в ней удовлетворяет условию $T_s'(\xi) T_i'(\xi) \geq 0$. Таким образом, изображенная на рис. 4, а $N-S$ граница устойчива.

Для $N-S$ границы (рис. 4, б) произведение $T_s'(\xi) T_i'(\xi)$ знакопеременно. Для анализа ее устойчивости заметим, что уравнения (21), (22) могут быть получены варьированием функционала

$$\mathcal{F} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_s T_s'^2 \psi'^2 + \bar{x}_i T_i'^2 \Phi'^2 + g(\psi - \Phi)^2 T_s' T_i'] d\xi \quad (24)$$

относительно функций $\psi(\xi)$ и $\Phi(\xi)$ при выполнении условий

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_s'^2 \psi^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} T_i'^2 \Phi^2 d\xi = 1.$$

Инкремент λ играет тогда роль лагранжиана множителя в задаче об условном экстремуме \mathcal{F} , а наиболее «опасному» возмущению с максимальным λ отвечают функции $\psi(\xi)$ и $\Phi(\xi)$, реализующие абсолютный минимум \mathcal{F} . С помощью такого

вариационного принципа нетрудно убедиться, что $N-S$ граница (рис. 4, б) неустойчива. Для этого выберем пробные функции в виде

$$\psi = 0, \quad \Phi = \Phi_0 \exp [-(\xi - \xi_0)^2/l^2],$$

где ξ_0 — координата какой-либо точки, находящейся на падающем ($T'_s < 0$) участке профиля $T_s(\xi)$, имеющего ширину $\sim L_s$ (рис. 4, б). Если характерный размер возмущения $l \ll L_s$, то функции $T'_i(\xi)$ и $T'_s(\xi)$ в (24) можно заменить на $T'_i(\xi_0)$ и $T'_s(\xi_0)$, что дает

$$\mathcal{F} = \sqrt{\pi} \Phi_0^2 \left[\frac{2\bar{x}_i}{l} T'_{i1}(\xi_0) + g l T'_i(\xi_0) T'_s(\xi_0) \right]. \quad (25)$$

Это выражение становится отрицательным, если $T'_i(\xi_0) T'_s(\xi_0) < 0$ и

$$l > l_c = \left(\frac{2T'_i(\xi_0) \bar{x}_i}{|T'_s(\xi_0) | g} \right)^{1/2} \sim \sqrt{\frac{d_i A}{P}} \ll L_s. \quad (26)$$

Таким образом, при $l_c < l \ll L_s$, величина $\mathcal{F} < 0$, что означает наличие возмущений с $\lambda > 0$, т. е. распределения, имеющие падающий участок, где $T'_s T'_i < 0$, неустойчивы. Эта неустойчивость имеет простой физический смысл. Она связана с наличием на поверхности образца области шириной порядка L_s , где охладитель находится в неустойчивом режиме кипения ($\partial q / \partial T_i < 0$). Для $N-S$ границы (рис. 4, а) ширина участка, где $\partial q / \partial T_i < 0$, порядка $d_i \ll L_s$ и неустойчивость подавляется диффузией тепла вдоль образца. В дальнейшем мы будем рассматривать только устойчивую $N-S$ границу (рис. 4, а).

3. Скорость распространения $N-S$ границы

Статическая $N-S$ граница существует лишь при токе, равном минимальному току распространения нормальной зоны $I = I_p$ [1]. Для определения I_p умножим (4) с $v=0$ на $x_s T'_s$ и проинтегрируем его по ξ от $-\infty$ до $+\infty$. Так как при $T_0 < T_s < T^*$ в (4) следует подставить ветвь $T'_i(T_s)$, отвечающую пузырьковому кипению, а при $T_s > T^*$ ветвь $T'_i(T_s)$, отвечающую пленочному кипению, то

$$\int_{T_0}^{T_{3s}} [\tilde{W}(T, I_p) - Q(T, I_p)] x_s(T) dT = 0, \quad (27)$$

где $\tilde{W}(T, I_p)$ определяется формулой (17). При $x_s = \text{const}$ (16) и (27) обобщают известное «правило равных площадей» [1] на случай неоднозначной зависимости $W(T_s)$. Эти уравнения, вообще говоря, не сводятся к одному уравнению типа (27), куда вместо \tilde{W} подставлена неоднозначная зависимость $W(T_s)$ или $Q(T_s)$, что сделано, например, в [7].

Скорость движения $N-S$ границы в общем случае можно найти лишь численно. Ситуация, однако, существенно упрощается при $|I - I_p| \ll I_p$, где $v(I) \ll v_s$, что позволяет получить для $v(I)$ замкнутое выражение. Для этого умножим (4) на $x_s T'_s$ и проинтегрируем по ξ от $-\infty$ до $+\infty$

$$v \int_{T_0}^{T_{3s}} v_s x_s |T'_s| dT + \int_{T_0}^{T_{3s}} (Q - \tilde{W}) x_s dT = 0. \quad (28)$$

Интересуясь областью токов $\delta I \equiv |I - I_p| \ll I_p$, разложим (28) по малому параметру $\delta I / I_p \ll 1$, полагая $v \ll v_s$, $T^* = T_0^* + \delta T^*$, $\delta T^* \ll T_0^*$, где T_0^* удовлетворяет уравнению (16). В результате

$$v \int_{T_0}^{T_{3s}} v_s x_s |T'_s| dT + \delta I \int_{T_0}^{T_{3s}} x_s \frac{\partial Q}{\partial I} dT + g x_s(T_0^*) (T_b - T_f) \delta T^* = 0. \quad (29)$$

Величину δT^* найдем, разлагая соотношение (15) в ряд по $\delta T^*/T_0^* \ll 1$, что с линейной по v/v_s точностью приводит к

$$\delta T^* = \frac{v}{(T_b - T_f)g} \int_{T_b}^{T_f} \tilde{v}_i |T'_i| dT. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29), получаем

$$v \left[\int_{T_0}^{T_{ss}} v_s x_s |T'_s| dT + x_s (T_0^*) \int_{T_b}^{T_f} \tilde{v}_i |T'_i| dT \right] = -\delta I \int_{T_0}^{T_{ss}} x_s \frac{\partial Q}{\partial I} dT.$$

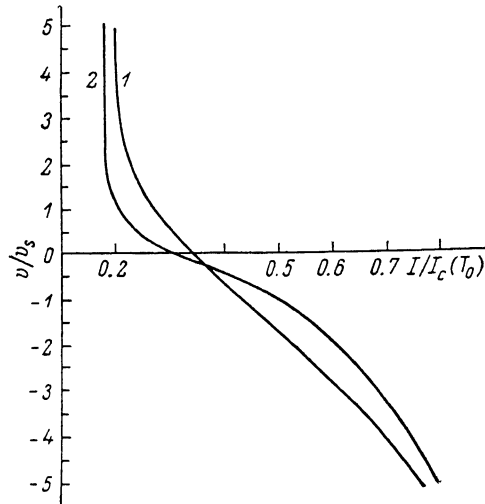


Рис. 5. Зависимость $v=v(I)$ при $d_i=0$ (1) и $5 \cdot 10^{-3}$ см (2).

$\alpha=25$, $h_f=0.25$ Вт/см²·К, $h=40$, $\Delta T/(T_c - T_0)=0.25$, $x_s=1$ Вт/см·К, $x_i=10^{-3}$ Вт/см·К, $A/P_c=10^{-2}$ см.

Производные T'_s и T'_i в (30) можно записать в явном виде. Умножим для этого (4) и (5) с $v=0$ на $x_s T'_s$ и $\tilde{x}_i T'_i$ и проинтегрируем по ξ , откуда

$$\frac{1}{2} (x_s T'_s)^2 = S(T_s) = \int_{T_0}^{T_s} (\tilde{W} - Q) x_s dT, \quad (31)$$

$$\frac{1}{2} (\tilde{x}_i T'_i)^2 = U(T_i) = \int_{T_b}^{T_i} [W(T) - (T^* - T)g] \tilde{x}_i dT. \quad (32)$$

С помощью (31), (32) выражение для $v(I)$ при $|I - I_p| \ll I_p$ преобразуется к виду

$$v = - \frac{(I - I_p) \int_{T_0}^{T_{ss}} x_s \frac{\partial Q}{\partial I} dT}{\sqrt{2} \left\{ \int_{T_0}^{T_{ss}} v_s \sqrt{S} dT + \frac{x_s(T_0^*)}{\tilde{x}_i} \int_{T_b}^{T_f} \tilde{v}_i \sqrt{U} dT \right\}}. \quad (33)$$

При $d_i < d_c$ имеем $T_b = T_f$ (рис. 3) и формула (33) переходит в аналогичную для случая композита без покрытия [1]. Отметим, что в таком виде выражение (33) применимо не только к сверхпроводникам, но и к любой бистабильной системе, описываемой двумя уравнениями типа (4), (5) с резко различающимися пространственными масштабами, например к нормальному металлу с током [4]. Из (33) следует, что покрытие с $d_i \gg d_c$ уменьшает скорость распространения нормальной зоны, так как в знаменателе (33) появилось второе слагаемое,

возникшее из-за зависимости T^* от v . Оно может оказаться существенным, поскольку $x_s \gg x_i$.

Рассмотрим в качестве примера модель, где выражения для I_p и $v(I)$ могут быть получены в явном виде. Пусть поток тепла в охладитель — кусочно-линейная, а тепловыделение — ступенчатая функции T

$$q(T) = \begin{cases} h_b(T - T_0), & T - T_0 < \Delta T, \\ h_f(T - T_0), & T - T_0 > \Delta T, \end{cases} \quad (34)$$

$$Q(T) = \rho j^2 \begin{cases} 0, & T < T_r = [1 - I/I_c(T_0)] T_c, \\ 1, & T > T_r. \end{cases} \quad (35)$$

Тогда из (16) и (27) находим уравнение для $i_p = I_p/I_c(T_0)$

$$(1 + \beta)(\alpha i_p^2) - 2\alpha i_p^2(1 - i_p) - \frac{pI}{(1 + \beta)} = 0, \quad (36)$$

где безразмерные параметры α , β и p суть

$$\alpha = \rho j_0^2 A / P (T_c - T_0) h_f, \quad (37)$$

$$\beta = d_i h_f / x_i, \quad k = h_b / h_f, \quad (38)$$

$$p = \frac{\Delta T^2}{(T_c - T_0)^2} (k - 1)(1 + \beta). \quad (39)$$

Параметр α для сверхпроводящего композита обычно удовлетворяет условию $\alpha \gg 1$ [2, 7]. В этом случае из (36) находим, что

$$i_p = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + p}}{(1 + \beta)\alpha} \right)^{1/2}. \quad (40)$$

Формула (33) в данной модели приобретает вид ($i_p \ll 1$, $|i - i_p| \ll i_p$)

$$v = - \frac{4(1 + p + \sqrt{1 + p})}{\left(\frac{M}{v_s} + \frac{N}{v_i} \right)} \frac{I - I_p}{I_p}, \quad (41)$$

где v_s и v_i определены согласно (8), (9), а

$$M = \sqrt{1 + \beta} \left(2\sqrt{1 + p} + p \ln \frac{(1 + \sqrt{1 + p})\sqrt{k - 1}}{(\sqrt{(1 + \beta)k} + \sqrt{1 + \beta k})\sqrt{p}} \right), \quad (42)$$

$$N = p \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \beta}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \beta k}} \right). \quad (43)$$

При $\beta = p = 0$ (модель, не учитывающая наличия кризиса кипения и тепловой изоляции) формулы (40)–(43) переходят в известные выражения $i_p = (2/\alpha)^{1/2}$, $v = -2v_s \delta I / I_p$ [2]. Из (40), (41) следует, что величины I_p и $(\partial v / \partial I)_{I_p}$ уменьшаются с ростом толщины покрытия.

Случай больших токов ($|I - I_p| \gg I_p$) не может быть рассмотрен аналитически. В данной модели он сводится к решению системы двух трансцендентных уравнений $F(T^*, v, I) = 0$ и $\Phi(T^*, v, I) = 0$ для T^* и v , где F и Φ — некоторые функции, которые мы здесь не приводим из-за их громоздкости. Результаты численного решения этих уравнений представлены на рис. 5.

4. Обсуждение результатов

Таким образом, распространение нормальной зоны в композитах, покрытых слоем тепловой изоляции с $d_i > d_c$, обладает рядом особенностей. Они обусловлены неоднозначной зависимостью мощности теплоотода от T_s в условиях кризиса кипения и приводят к качественному изменению распределения температуры вдоль покрытия, проявляющемуся в возникновении резкого скачка

температуры на фронте $N-S$ границы, разделяющей области пузырькового и пленочного кипения охладителя. В настоящей работе показано, что корректное описание такой ситуации не может быть дано в рамках одного уравнения (1) и требует учета диффузии тепла в покрытии, т. е. решения системы (4), (5). При этом ток I_p определяется «двойным правилом площадей», сводящимся к уравнениям (16), (27), выражающим равенство заштрихованных площадей на рис. 2 и 3.

Рассмотрим влияние покрытия на скорость распространения нормальной зоны. В области токов $|I - I_p| \ll I_p$ величина $v(I)$ определяется наименьшей из скоростей v_s и v_i (см. (41)). Их отношение зависит от толщины d_i : при $d_i \ll d_k$ имеем $v_i \gg v_s$ и $v(I) \sim (I - I_p) v_s / I_p$, а при $d_i \gg d_k$, наоборот, $v_i \ll v_s$ и $v(I) \sim (I - I_p) v_i / I_p$. Таким образом, увеличение толщины покрытия приводит к существенному уменьшению $v(I)$. Так, например, для характерных значений параметров $\chi_i \approx 10^{-3}$ Вт/см·К, $\chi_s \approx 1$ Вт/см·К, $h_f \approx 0.025$ Вт/см²·К, $v_s \approx v_i$, $A/P = 10^{-2}$ см, $\Delta T = 0.8$ К, $T_c - T_0 = 4$ К, $h_f/h_b = 0.02$ толщина d_k порядка 10 мкм, $p \approx 1.5$, а $\beta \sim 10^{-2}$.

Уменьшение наклона $\partial v / \partial I$ вблизи $I = I_p$ при увеличении d_i приводит к возникновению «провала» на кривой $v(I)$ для токов

$$|I - I_p| \ll v_i \left(\frac{\partial v}{\partial I} \right)_{I_p}^{-1} \sim I_p, \quad d_i \gg d_k \quad (44)$$

(рис. 5). Такое поведение $v(I)$ можно объяснить из качественных соображений. Структура $N-S$ границы, как видно из рис. 4, а, такова, что ее можно рассматривать как две взаимодействующие волны переключения, распространяющиеся совместно. Одна из них распространяется в композите. Она описывается уравнением (1) с модифицированной мощностью теплоотода $\tilde{W}(T_s)$ и имеет характерную ширину фронта порядка L_s . Другая волна распространяется по поверхности покрытия и переводит охладитель из режима пузырькового кипения в пленочный. Она описывается уравнением (14), имеет ширину фронта порядка L_i и проявляется как резкий скачок (на масштабах $\sim L_s$) распределения $T_i(\xi)$. Роль управляющих параметров, определяющих скорость волны в композите, играет величина тока I , а в покрытии — температура T^* . С помощью такой аналогии нетрудно получить условие равновесия $N-S$ границы. Действительно, как для волны в композите, так и для волны в покрытии должны выполняться правила «равных площадей» для источников в уравнениях (4), (5). В результате и возникает система уравнений (16), (27) для I_p и T_0^* . При $I \neq I_p$ обе волны движутся с общей скоростью $v(I)$. Очевидно, что она определяется меньшей из двух тепловых скоростей v_s и v_i . Это и приводит к заметному снижению наклона $(\partial v / \partial I)_{I_p}$ при $d_i \gg d_k$, когда $v_i \ll v_s$.

Описанная выше картина имеет место лишь для токов $I \simeq I_p$. По мере дальнейшего роста тока $v(I)$ возрастает по модулю ($v < 0$). Это, как видно из (30), приводит к увеличению $T^*(v)$. При $v \sim v_i$ температура T^* приближается к своему максимально возможному значению T_+ — границе области неоднозначности $W(T_s)$ (рис. 2). Дальнейшее увеличение I уже не ведет к изменению T^* . В результате при $I - I_p \gg I_p$ мощность теплоотода $\tilde{W}(T)$ перестает зависеть от v , так как $T^* = T_+ = \text{const}$. Распределение температуры $T_s(\xi)$ описывается тогда уравнением (1) с $W = \tilde{W}(T_s, T_+)$, а скорость $N-S$ границы $v(I)$ оказывается порядка v_s . Таким образом, на кривой $v(I)$ для композитного сверхпроводника, покрытого тепловой изоляцией, при $d_i \gg d_k$ имеются два участка с резко различающимися наклонами: при $|I - I_p| \ll I_p$ он определяется тепловой скоростью в покрытии v_i , а при $|I - I_p| \gg I_p$ тепловой скоростью в сверхпроводнике v_s . В промежуточной области $I - I_p \sim I_p$ происходит плавный переход между двумя предельными случаями (рис. 5). Отметим, что для $I - I_p \gg I_p$ ширина фронта волны в покрытии возрастает как vL_i/v_i . Это не позволяет считать температуру $T_s(\xi)$ константой, равной T^* . Для расчета $T_i(\xi)$ необходимо тогда рассматривать полную систему уравнений (4), (5).

Отметим в заключение, что существенное (при $d_i \cong d_k$) уменьшение наклона $(\partial v / \partial I)_{I_p}$ может быть одним из механизмов, позволяющих объяснить заметное расхождение между результатами численных расчетов $v(I)$ в рамках уравнения (1) с экспериментом (в [7, 8] такое расхождение объяснялось, например, эффектами нестационарности при теплопередаче из сверхпроводника в охладитель). Другим следствием малости $(\partial v / \partial I)_{I_p}$ является расширение интервала токов, где $N-S$ граница может быть локализована на неоднородностях [4].

Литература

- [1] Maddock B. J., James G. B., Norris W. T. Cryogenics, 1969, v. 9, N 8, p. 261—273.
- [2] Альтов В. А., Зенкевич В. Б., Кремлев М. Г., Сычев В. В. Стабилизация сверхпроводящих магнитных систем. М.: Энергоиздат, 1984, с. 171—200.
- [3] Волков А. Ф., Коган Ш. М. УФН, 1968, т. 96, № 4, с. 633—672.
- [4] Гуревич А. В., Минц Р. Г. УФН, 1984, т. 142, № 1, с. 61—93.
- [5] Zhukov S. A., Barelko V. V., Merzhanov A. G. Int. J. Heat Mass Transf., 1981, v. 24, N 1, p. 47—55.
- [6] Dresner L. Adv. Cryog. Eng. Mater., 1979, v. 26, N 3, p. 647—653.
- [7] Уилсон М. Сверхпроводящие магниты. М.: Мир, 1985, с. 1—40.
- [8] Dresner L. Cryogenics, 1976, v. 16, N 11, p. 675—681.

Институт высоких температур
АН СССР
Москва

Поступило в Редакцию
20 октября 1986 г.