1988 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 58, в. 3
1988 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 58, № 3

УДК 538.561

ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ПОТОК МОЩНОСТИ В СИЛЬНОПРОВОДЯЩИХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Е. О. Каменецкий

В настоящее время опубликованы работы, в которых показывается, что в случае существенного поглощения энергии поля в среде отделение членов в уравнении баланса энергии становится невозможным. С другой стороны, хорошо известен факт увеличения прозрачности сильнопроводящих сред для электромагнитных волн при наложении сильных статических магнитных полей. Это обстоятельство обусловливает возможность макроскопического анализа энергетических соотношений для сильнопроводящих замагниченных сред. Такой анализ и выполнен впервые в данной работе.

Проведенное в статье рассмотрение энергетических соотношений позволило описать с общих позиций механизм накопления и поглощения электромагнитной энергии и определить скорость переноса энергии электромагнитных волн в сильнопроводящих замагниченных средах.

1. Для волновых процессов, обусловленных переменными электрическими и магнитными полями и распространяющихся в анизотропной диспергирующей среде, справедливо уравнение баланса энергии (теорема Пойтинга) [1, 2]

$$-\operatorname{div}[\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1] = \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t} + \mathbf{H}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}, \tag{1}$$

где $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{j}_1$ — соответственно переменные составляющие векторов электрического поля, магнитного поля и плотности тока проводимости.

Анализ энергетических соотношений в поглощающей среде важен как для понимания механизма накопления и поглощения энергии, так и для определения скорости переноса энергии электромагнитных волн. Имеется ряд работ, в которых показывается, что в случае существенного поглощения энергии поля в среде отделение членов в правой части выражения (1) становится невозможным (см., например, [3, 4]). Этот вопрос не является вполне тривиальным, что, в частности, видно из острой дискуссии по этому поводу [4-6].

2. В настоящее время хорошо известен факт увеличения прозрачности сильнопроводящих сред для электромагнитных волн при наложении сильных статических магнитных полей [7, 8]. Это обстоятельство обусловливает возможность макроскопического анализа энергетических соотношений для сильнопроводящих сред при наличии таких магнитных полей, которые заведомо обеспечивают большую прозрачность.

Особенность сильнопроводящей среды (к которой, в частности, следует отнести плазму полупроводников при относительно низких частотах) состоит в том, что в этой среде токи проводимости могут существенно превышать токи смещения. Такие токи эффективно рассасывают индуцированные полем заряды. В этом случае следует говорить не о реакции индуцированного электрического тока на переменное электрическое поле (как это принято при описании слабопроводящей плазмы [9]), а об обратной реакции переменного электрического поля на переменный ток проводимости [7, 8].

3. Для сильнопроводящих сред опишем реакцию переменного электрического поля на переменный ток проводимости в виде следующего интегрального выражения:

$$E_{1_i}(\mathbf{r},\ t) = \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int d\mathbf{r}' \rho_{ij}(\mathbf{r},\ \mathbf{r}',\ t,\ t') j_{1j}(\mathbf{r}',\ t'). \tag{2}$$

Здесь ρ_{ij} — некоторая действительная тензорная функция отклика.

Большая проводимость среды, приводящая к нейтрализации индуцированных переменных зарядов, не исключает в то же время наличия в среде связанных зарядов. Иными словами, сильнопроводящая среда может одновременно обладать и диэлектрическими свойствами. Будем в дальнейшем полагать, что рассматриваемая сильнопроводящая анизотропная среда обладает изотропными диэлектрическими свойствами, которые характеризуются диэлектрической проницаемостью ε. Магнитными свойствами среда не обладает. В этом случае для электрической и магнитной индукции имеем

$$D_{1_i}(\mathbf{r},\ t) = \varepsilon E_{1_i}(\mathbf{r},\ t) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int d\mathbf{r}' \rho_{ij}(\mathbf{r},\ \mathbf{r}',\ t,\ t') j_{1_j}(\mathbf{r}',\ t'), \tag{3}$$

$$B_{1_i}(\mathbf{r},\ t) = \mu_0 H_{1_i}(\mathbf{r},\ t). \tag{4}$$

Представим переменный электрический ток и переменное магнитное поле в виде квазимонохроматических величин

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{j}_{1_m}(\mathbf{r},\ t)\, e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}, \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{1_m}(\mathbf{r},\ t)\, e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}. \tag{5}$$

Для рассматриваемого случая однородной среды ядра интегральных соотношений (2) и (3) являются разностными функциями времени и координат, т. е. зависят от $t - t'$ и $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. С учетом этого, представив медленно меняющуюся амплитуду $j_{1_{m_j}}(\mathbf{r}',\ t')$ в виде суммы начальных компонент ряда Тейлора, получим для $E_{1_i}(\mathbf{r},\ t)$ следующее выражение:

$$E_{1_i}(\mathbf{r},\ t) = \left\{ \rho_{ij}(\mathbf{k},\ \omega) j_{1_{m_j}}(\mathbf{r},\ t) + i \frac{\partial \rho_{ij}(\mathbf{k},\ \omega)}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial j_{1_{m_j}}(\mathbf{r},\ t)}{\partial \mathbf{r}} - i \frac{\partial \rho_{ij}(\mathbf{k},\ \omega)}{\partial \omega} \frac{\partial j_{1_{m_j}}(\mathbf{r},\ t)}{\partial t} \right\} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}. \tag{6}$$

Пренебрегая производными второго порядка (в силу малости дисперсии), на основании (3) и (6) получим выражение для производной электрической индукции по времени

$$\frac{\partial D_{1_i}(\mathbf{r},\ t)}{\partial t} = \varepsilon \left\{ i\omega\rho_{ij}(\mathbf{k},\ \omega) j_{1_{m_j}}(\mathbf{r},\ t) + \frac{\partial [\omega\rho_{ij}(\mathbf{k},\ \omega)]}{\partial \omega} \frac{\partial j_{1_{m_j}}(\mathbf{r},\ t)}{\partial t} - \omega \frac{\partial \rho_{ij}(\mathbf{k},\ \omega)}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial j_{1_{m_j}}(\mathbf{r},\ t)}{\partial \mathbf{r}} \right\} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}. \tag{7}$$

Для производной магнитной индукции по времени на основании (4) и (5) имеем

$$\frac{\partial B_{1_i}(\mathbf{r},\ t)}{\partial t} = \mu_0 \left[i\omega H_{1_{m_j}}(\mathbf{r},\ t) + \frac{\partial H_{1_{m_j}}(\mathbf{r},\ t)}{\partial t} \right] e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}. \tag{8}$$

С целью упрощения дальнейшего анализа будем вести рассмотрение электрических соотношений в пренебрежение пространственной и частотной дисперсиями ($\rho_{ij} \neq \rho_{ij}(k, \omega)$). Определим средние по периоду значения произведений, стоящих в правой части выражения (1). На основании (5) и (6) имеем

$$\overline{\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{E}_1} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{j}_{1m} \cdot \mathbf{E}^*_{1m}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{ij} j^*_{1_{m_i}} j_{1_{m_j}}\right) = \frac{1}{2} \rho^h_{ij} j^*_{1_i} j_{1_j}, \tag{9}$$

где ρ^h_{ij} — эрмитова компонента тензора $\hat{\rho}$.

Среднее по периоду значение второго произведения в правой части выражения (1) с учетом (6) и (7) представим следующим образом:

$$\overline{\mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\mathbf{E}_{1m} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}^*_{1m}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[-i\omega\varepsilon \left(\rho_{ij} j_{1m_j}\right) \left(\rho_{ij} j_{1m_j}\right)^* + \right.$$
$$\left. + \varepsilon \left(\rho_{ij} j_{1m_j}\right) \left(\rho_{ij} \frac{\partial j_{1m_j}}{\partial t}\right)^* \right]. \tag{10}$$

Каждое из слагаемых в квадратных скобках правой части выражения (10) представляет в свою очередь сумму произведений членов, стоящих в круглых скобках с различным набором индексов.

Будем считать, что в отсутствие частотной дисперсии компоненты тензора $\hat{\rho}$ — чисто действительные величины. Это означает, что антиэрмитова часть тензора $\hat{\rho}$ обусловлена только антисимметричными компонентами. При таком виде компонент тензора $\hat{\rho}$ нетрудно показать, что первый член в квадратных скобках выражения (10) представляет собой сумму мнимых величин, а второй — чисто вещественных. В окончательном виде выражение (10) в декартовых координатах запишется как

$$\overline{\mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t}} = \frac{\varepsilon}{4} \frac{\partial}{\partial t} \left[(\rho^2_{xx} + \rho^2_{yx} + \rho^2_{zx}) |j_{1_x}|^2 + (\rho^2_{yy} + \rho^2_{xy} + \rho^2_{zy}) |j_{1_y}|^2 + \right.$$
$$+ (\rho^2_{zz} + \rho^2_{xz} + \rho^2_{yz}) |j_{1_z}|^2 + (\rho_{xx}\rho_{xy} + \rho_{yy}\rho_{yx} + \rho_{zx}\rho_{zy}) (j_{1x} j^*_{1_y} + j_{1_y} j^*_{1_x}) +$$
$$+ (\rho_{xx}\rho_{xz} + \rho_{zz}\rho_{zx} + \rho_{yx}\rho_{yz}) (j_{1_x} j^*_{1_z} + j_{1_z} j^*_{1_x}) + (\rho_{yy}\rho_{yz} + \rho_{zz}\rho_{zy} + \rho_{xz}\rho_{xy}) \times$$
$$\left. \times (j_{1_y} j^*_{1_z} + j_{1_z} j^*_{1_y}) \right]. \tag{11}$$

Для третьего произведения в правой части (1) имеем

$$\overline{\mathbf{H}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}} = \frac{1}{4} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} |H_1|^2. \tag{12}$$

4. Приведем в качестве примера выражение для электрической и магнитной составляющих плотности электромагнитной энергии в случае однородной полупроводниковой плазмы, замагниченной вдоль оси z. Известные в этом случае выражения для тензора проводимости $\hat{\sigma}$ [10] позволяют определить компоненты тензора $\hat{\rho} = \hat{\sigma}^{-1}$ следующим образом:

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \rho_{zz} = \frac{1}{\sigma_e}, \quad \rho_{xy} = -\rho_{yx} = -\frac{b_0}{\sigma_e}, \quad \rho_{xz} = \rho_{yz} = \rho_{zx} = \rho_{zy} = 0, \tag{13}$$

где $\sigma_e = en_0\mu_e$, $b_0 = \mu_e B_0$, μ_e — подвижность электронов, B_0 — магнитная индукция внешнего поля.

Для геликонной волны, распространяющейся вдоль магнитного поля и имеющей круговую поляризацию, на основании (11)—(13) имеем

$$W_э = \frac{\varepsilon (1 + b_0^2)}{4\sigma_e^2} (|j_{1x}|^2 + |j_{1_y}|^2) = \frac{\varepsilon k^2 (1 + b_0^2)}{4\sigma_e^2} (|H_{1x}|^2 + |H_{1_y}|^2) =$$
$$= \frac{\varepsilon k^2}{2\sigma_e^2} (1 + b_0^2) |H_1|^2, \tag{14}$$

$$W_м = \frac{\mu_0}{4} (|H_{1x}|^2 + |H_{1_y}|^2 = \frac{\mu_0}{2} |H_1|^2. \tag{15}$$

При выводе выражения (14) учитывалось, что для сильнопроводящей среды допустимо пренебрежение током смещения, и, следовательно,

$$\mathbf{j}_1 \simeq \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = -i\mathbf{k} \times \mathbf{H}_1. \tag{16}$$

5. Для определения потока мощности воспользуемся тензором комплексной диэлектрической проницаемости

$$\hat{\Xi} = \varepsilon - \frac{i}{\omega}\hat{\sigma}.$$

Если вектор $\mathbf{B}_0$ направлен вдоль оси z, то в общем виде для компонент тензора $\hat{\sigma}$ имеем [10]

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0, \quad \sigma_{xy} = -\sigma_{yx}, \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} \equiv \sigma_{\perp}, \quad \sigma_{zz} \equiv \sigma_{\parallel}.$$

В отсутствие пространственной дисперсии реальная часть потока мощности описывается вектором Пойтинга [2], который должен определяться эрмитовыми компонентами тензора $\hat{\Xi}$. Нетрудно показать, что тензор $\hat{\Xi}$ будет эрмитов, если

$$\omega\varepsilon \gg \sigma_{\perp}, \quad \omega\varepsilon \gg \sigma_{\parallel}. \qquad (17), (18)$$

Используя уравнения Максвелла и осуществив ряд алгебраических преобразований для волны, распространяющейся вдоль оси z, получим выражения составляющих вектора Пойтинга

$$S_x = S_y = 0, \qquad (19)$$

$$S_z = \frac{k}{4(\omega\varepsilon - \sigma_{xy})} H_{1+}H^*_{1+} + \frac{k}{4(\omega\varepsilon + \sigma_{xy})} H_{1-}H^*_{1-}, \qquad (20)$$

где

$$H_{1\pm} = H_{1x} \pm iH_{1y}.$$

Первое слагаемое в правой части (20) есть поток мощности, переносимый волнами с правой круговой поляризацией, а второе слагаемое — поток мощности для волн с левой поляризацией. Нетрудно убедиться, что для преобладания в выражении (20) реальной части вполне достаточно выполнения только неравенства (17).

В условиях сильнопроводящей замагниченной плазмы возможно выполнение неравенства

$$\sigma_{xy} \gg \omega\varepsilon. \qquad (21)$$

В этом случае имеем

$$S_z = -\frac{k}{4\sigma_{xy}} H_{1+}H^*_{1+} + \frac{k}{4\sigma_{xy}} H_{1-}H^*_{1-}. \qquad (22)$$

Используя неравенства (17) и (21), представим в общем виде условие, при котором в сильнопроводящей замагниченной среде возможны потоки мощности электромагнитных волн

$$\sigma_{xy} \gg \omega\varepsilon \gg \sigma_{\perp} \qquad (23)$$

Для оценки параметров среды на основе этого неравенства используем известные значения компонент тензора $\hat{\sigma}$ [10]

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_e b_0}{1 + b_0^2}, \quad \sigma_{\perp} = \frac{\sigma_e}{1 + b_0^2}$$

В условиях сильнозамагниченной плазмы ($b_0 \gg 1$) неравенство (23) запишется как

$$b_0^2 \gg \frac{\sigma_e}{\omega\varepsilon} \gg b_0. \qquad (24)$$

Для того чтобы члены в каждой части этих неравенств отличались не менее чем на порядок, необходимо иметь $b_0 \gg 100$. Это соответствует значениям $\sigma_e/\omega\varepsilon \simeq 1000$. Практическая реализация этих условий является трудновыполнимой задачей.

В сильнопроводящей среде без магнитного поля, как правило, выполняется условие $\sigma_e \gg \omega\varepsilon$. В этом случае ток смещения пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости и в среде будет распространяться с сильным затуханием «скиновая» волна. Условия распространения такой волны могут быть существенно улучшены при наложении сильного магнитного поля. Неравенство (23) при этом перепишется в виде

$$\sigma_{xy} \gg \sigma_{\perp} \gg \omega\varepsilon. \tag{25}$$

Это условие является более выполнимым, чем условие (23). Для продольно-замагниченной плазмы условие (25) запишется в виде двух неравенств

$$b_0 \gg 1, \quad \sigma_e/\omega\varepsilon b_0^2 \gg 1. \tag{26}$$

Выполнение этих неравенств на практике вполне осуществимо.

Может показаться, что выполнение неравенств (25) или (26) приведет к более сильному затуханию волны, чем при соблюдении условий (24). Ниже на примере геликонных волн будет показано, что условие (26) в полной мере соответствует распространению незатухающих волн.

6. Из анализа дисперсионного уравнения для геликонных волн следует, что в сильнопроводящих средах распространение геликонов происходит без затухания при выполнении условий [10, 11]

$$b_0 \gg 1, \quad \sigma_e/\omega\varepsilon b_0 \gg 1. \tag{27}$$

Дисперсия геликонов описывается в этом случае реальными ω и k. Очевидно, что при выполнении условий (27) заведомо соблюдаются и неравенства (26).

На основании полученных энергетических соотношений определим скорость переноса энергии геликонной волной. В силу круговой поляризации геликона выражение (22) перепишется в виде

$$S_z = \pm \frac{k(1 + b_0^2)}{\sigma_e b_0} |H_1|^2. \tag{28}$$

Используя дисперсионное уравнение для геликонов при $b_0 \gg 1$ [10, 11], на основании (14), (15) и (26) получаем

$$W_{\text{м}}/W_{\text{э}} \simeq \sigma_e/\omega\varepsilon b_0 \gg 1. \tag{29}$$

Скорость переноса энергии вдоль оси z определится следующим образом:

$$v_{\text{эн}\, z} = \frac{S_z}{W_{\text{э}} + W_{\text{м}}} \simeq \frac{S_z}{W_{\text{м}}} = \pm \frac{2kb_0}{\mu_0\sigma_e}. \tag{30}$$

Нетрудно показать, что это же выражение получается при вычислении групповой скорости $v_{\text{гр}} = dw/dk$ на основании дисперсионного уравнения для правополяризованных геликонных волн, распространяющихся в сильнопроводящих средах [10, 11].

7. Выполненные в работе исследования позволяют сделать ряд выводов.

а) Джоулевы потери в сильнопроводящих средах однозначно определяются эрмитовыми компонентами тензора $\hat{\rho}$. Для волн с различной поляризацией (линейной, круговой, эллиптической) эти потери одинаковы.

б) Гиротропия в сильнопроводящих средах существенным образом сказывается на величине электрической составляющей плотности энергии электромагнитного поля. Именно благодаря увеличению плотности энергии электромагнитного поля за счет антиэрмитовых компонент тензора $\hat{\rho}$ и становится возможным процесс распространения электромагнитных волн в сильнопроводящих средах при наличии сильных магнитных полей.

в) При анализе электромагнитных волн, распространяющихся в сильнопроводящей замагниченной среде вдоль магнитного поля, в выражениях, описывающих поток мощности, энергию электромагнитного поля, скорость переноса энергии (групповую скорость), а также в дисперсионном уравнении могут быть полностью исключены диэлектрические свойства среды (величина ε).

Это фактически говорит о возможности исключения токов смещения при анализе таких волн. Эти волны могут быть описаны уравнениями квазимагнитостатики и являются медленными волнами в безграничной плазме.

г) Несмотря на то что в сильнопроводящих замагниченных средах электрическая составляющая плотности электромагнитной энергии существенно меньше магнитной составляющей, наличие диэлектрических свойств среды является принципиальным моментом. Статическое магнитное поле увеличивает именно электрическую составляющую плотности энергии электромагнитного поля, обусловливая тем самым электромагнитный характер волн.

Литература

[1] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[2] *Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.* Классическая электродинамика. М.: Наука, 1985. 400 с.
[3] *Бараш Ю. К., Гинзбург В. Л.* УФН, 1976, т. 118, № 3, с. 523—537.
[4] *Агранович В. М., Гинзбург В. Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М.: Наука, 1979. 432 с.
[5] *Пекар С. И.* ФТТ, 1976, т. 18, № 7, с. 1884—1887.
[6] *Гинзбург В. Л.* ФТТ, 1977, т. 19, № 3, 946 с.
[7] *Канер Э. А., Скобов В. Г.* УФН, 1966, т. 89, № 3, с. 367—408.
[8] *Максфилд Б.* УФН, 1971, т. 103, № 2, с. 233—273.
[9] *Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А.* Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975. 255 с.
[10] *Пожела Ю. К.* Плазма и токовые неустойчивости в полупроводниках. М.: Наука, 1977. 377 с.
[11] *Владимиров В. В., Волков А. Ф., Мейлихов Е. З.* Плазма полупроводников. М.: Атомиздат, 1979. 256 с.

Ленинградский
электротехнический институт
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступило в Редакцию
14 октября 1986 г.
В окончательной редакции
11 февраля 1987 г.