

УДК 535.31; 621.7; 53.0825

## ТЕОРИЯ ПЛАНАРНЫХ ЭЛЕКТРОДНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ОПТИКИ

А. Б. Сотский, В. И. Сивуха

В аналитической форме найдено решение квазистатической электродинамической задачи для планарных систем произвольного числа параллельных, в общем случае неодинаковых электродов, расположенных на границе раздела двух произвольно ориентированных проводящих монокристаллов. С учетом краевых эффектов выполнен расчет электродной системы брегговского электрооптического модулятора.

Планарные электродные системы широко используются в электрооптических устройствах интегральной оптики [1, 2]. Расчет и оптимизация таких устройств требуют нахождения характеристик электродных систем и прежде всего пространственного распределения управляющих электрических полей. При этом желательно учесть анизотропию и проводимость электрооптических кристаллов.

В данной работе получено аналитическое решение квазистатической электродинамической задачи для планарных систем произвольного числа параллельных управляющих электродов, расположенных на границе раздела двух произвольно ориентированных проводящих монокристаллов. До настоящего времени аналогичные решения были найдены для симметричных систем двух и трех электродов, а также для бесконечных периодических систем электродов. Они получены для непроводящих окружающих электроды сред с диагональным в системе координат электродов тензором диэлектрической проницаемости [3-5].

### 1. Постановка краевой задачи

Рассматривается планарная система  $n$  бесконечно тонких параллельных электродов, расположенная на границе раздела ( $y=0$ ) двух сред. Система предполагается неограниченной в  $z$ -направлении,  $x$ -координаты левой и правой границ  $j$ -го электрода равны  $a_j$  и  $b_j$ . Возбуждаемое электродами электрическое поле  $E$  предполагается квазистатическим, т. е.  $E = -\nabla\varphi$ . Ищется распределение поля, соответствующее заданным (изменяющимся во времени) значениям потенциала  $\varphi$  на электродах. Рассматривается двумерная задача, т. е.  $\nabla_z \varphi = 0$ .

Для монохроматических компонент  $\exp(i\omega t)$  задача сводится к решению следующей системы уравнений, связывающей токи, заряды и напряженность поля [6, 7]:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + i\omega\rho = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \sigma(\omega)\mathbf{E}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon(\omega)$ ,  $\sigma(\omega)$  — тензоры диэлектрической проницаемости и проводимости, которые предполагаются симметричными [8]. Система (1) эквивалентна уравнениям

$$\sum_{k,l} x_{kl}^{(m)} \nabla_k \nabla_l \varphi_m = 0 \quad (2)$$

$(x^{(m)} = \sigma^{(m)}(\omega) + i\omega \varepsilon^{(m)}(\omega))$ , индексы « $k$ » и « $l$ » принимают значения  $x$  и  $y$ ,  $m-1$  и  $2$ , величины с  $m=1$  и  $m=2$  относятся к областям  $y > 0$  и  $y < 0$ , решаемым с граничными условиями

$$\varphi_1|_{y=0} = \varphi_2|_{y=0}, \quad \sum_l x_{yl}^{(1)} \nabla_l \varphi_1|_{y=0} = \sum_l x_{yl}^{(2)} \nabla_l \varphi_2|_{y=0}. \quad (3)$$

В (3) первое из граничных условий выполняется при всех  $x$ , а второе при  $x \notin (a_j, b_j)$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решение задачи (2), (3) может быть записано в виде<sup>1</sup>

$$\varphi_m = \varphi_0(x_m, y_m), \quad (4)$$

$$x_m = x - G_m y, \quad y_m = H_m y, \quad (5)$$

$$G_m = \frac{x_{xy}^{(m)}}{x_{yy}^{(m)}}, \quad H_m = (-1)^{m+1} \sqrt{\frac{x_{xx}^{(m)} x_{yy}^{(m)} - [x_{xy}^{(m)}]^2}{[x_{yy}^{(m)}]^2}}.$$

Здесь и далее выбираются ветви квадратных корней  $\text{Re} \sqrt{\dots} \geq 0$ . Функция двух комплексных переменных  $\varphi_0(x, \bar{y})$  ( $x = x' + ix''$ ,  $\bar{y} = y' + iy''$ ) представляет собой аналитическое продолжение функции двух действительных переменных  $\varphi_0(x', y')$ , заданной при  $y' \geq 0$ , удовлетворяющей уравнению Лапласа, граничному условию  $\nabla_{y'} \varphi_0|_{y'=0} = 0$  при  $x' \notin (a_j, b_j)$  и совпадающей при  $y'=0$  и  $x'=x$  с распределением искомого потенциала  $\varphi_0(x, y=0)$ . Таким образом, расчет электродной системы сводится к нахождению функции  $\varphi_0(x', y')$ , являющейся при  $x'=x$  и  $y'=y$  решением электростатической задачи для данной электродной системы в вакууме. Последнее следует из (4), (5), если положить  $x^{(m)} = \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума.

## 2. Решение электростатической задачи для электродной системы в вакууме

Функция  $\varphi_0(x', y')$  может быть найдена аналитически методом конформных отображений. Рассмотрение при этом сводится к определению комплексного потенциала  $\psi(z)$  ( $z = x' + iy'$ ), аналитического в верхней полуплоскости, действительная часть которого совпадает с  $\varphi_0(x', y')$  и постоянна при  $x' \in (a_j, b_j)$ ,  $y'=0$ , а мнимая часть постоянна при  $x' \notin (a_j, b_j)$ ,  $y'=0$ . Если не конкретизировать значения потенциалов на электродах, то из теории интеграла Шварца — Кристоффеля [9] следует, что установленным требованиям удовлетворяет каждая из функций вида

$$\psi_k(z) = C \int_0^z \frac{N_k(t)}{D(t)} dt + C_1 \quad (k=0, 1, \dots, n-1),$$

$$N_k(t) = \prod_{i=1}^k (t - d_i) \quad (k \neq 0), \quad N_0(t) \equiv 1,$$

$$D(t) = \prod_{j=1}^n (\sqrt{t - a_j} \sqrt{t - b_j}),$$

где  $C, C_1, d_i$  — произвольные постоянные. Эти постоянные удобно выбрать так, чтобы  $\psi_k(z)$  имели вид

$$\psi_k(z) = \frac{1}{\eta_k} \int_{-\infty + i0}^z F_k(t) dt \quad (k=0, 1, \dots, n-2), \quad \psi_{n-1}(z) = \int_0^z F_{n-1}(t) dt, \quad (6)$$

$$\eta_k = \int_{b_1}^{a_2} F_k(t) dt, \quad F_k(t) = \frac{t^k}{D(t)}. \quad (7), (8)$$

<sup>1</sup> К выражениям (4), (5) можно прийти, воспользовавшись Фурье-преобразованиями потенциала.

Функциям (6) соответствуют электростатические потенциалы  $f_k(x', y') = \text{Re } \psi_k(z)$ , обладающие при различных  $k$  различными физическими свойствами. Для выяснения этих свойств рассмотрим рассмотрен асимптотическое поведение потенциалов при  $R = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \rightarrow \infty$ . С использованием правила Лопиталья находим  $f_{n-1} \rightarrow \ln R$ ,  $f_k \rightarrow \cos[(k+1-n)\alpha][(k+1-n)R^{n-k-1}\eta_k]^{-1}$  ( $k=0, 1, \dots, n-2$ ), где  $\alpha$  — угол полярной системы координат. С другой стороны, раскладывая логарифмический потенциал в дальней зоне, получаем следующее разложение потенциала  $\varphi$  планарной электродной системы в вакууме по мультипольным моментам

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[ \left( \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{z}(x') dx' \right) \ln R - \sum_{p=1}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} (x')^p \tilde{z}(x') dx' \right) \frac{\cos(p\alpha)}{pR^p} \right], \quad (9)$$

где  $\tilde{z}(x')$  — плотность заряда на поверхности  $y'=0$ . отождествив  $\varphi$  и  $f_k$ , мы видим, что потенциал  $f$  не должен содержать низших мультипольных моментов с  $p < n - k - 1$ , при этом для  $k < n - 1$  суммарный заряд электродной системы должен быть равным нулю и  $-2\pi\epsilon_0$  для  $k=n-1$ . Это подтверждается вычислением интегралов, входящих в (9). Для их расчета нужно воспользоваться выражением

$$\tilde{z}(x') = 2\epsilon_0 (\eta_k)^{-1} \text{Im } F_k(z) |_{y'=0},$$

получаемыми после дифференцирования (6), и равенствами

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_k(t) t^p dt = 0 \quad (0 \leq p \leq n-k-1), \quad \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} F_k(t) t^{n-k-1} dt = -\pi,$$

легко доказываемыми с помощью контурного интегрирования.

Любая линейная комбинация функций  $f_k(x', y')$  представляет собой некоторое решение рассматриваемой электростатической задачи. Можно показать (см. Приложение), что система решений  $f_k(x', y')$  является полной, т. е. любое решение  $\varphi_0(x', y')$  может быть представлено в виде

$$\varphi_0(x', y') = \sum_{k=0}^{n-1} A_k f_k(x', y'), \quad (10)$$

где постоянные  $A_k$  определяются из систем алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k \varphi_j^{(k)} = \Phi_j, \quad \sum_{k=0}^{n-2} A_k u_j^{(k)} = U_j, \quad (11)$$

соответствующих ненулевому ( $A_{n-1} \neq 0$ ) и нулевому ( $A_{n-1} = 0$ ) суммарному заряду электродов. В (11)  $\Phi_j$  и  $\varphi_j^{(k)}$  равны потенциалам  $j$ -го электрода для решений  $\psi_0(x', y')$  и  $f_k(x', y')$ ,  $u_j^{(k)}$  и  $U_j$  — разностям потенциалов между электродами

$$u_j^{(k)} = \varphi_{j+1}^{(k)} - \varphi_j^{(k)}, \quad U_j = \Phi_{j+1} - \Phi_j.$$

Величины  $\varphi_j^{(k)}$  и  $u_j^{(k)}$  рассчитываются на основании (6). Например,

$$u_j^{(k)} = \frac{1}{\eta_k} \int_{b_j}^{a_{j+1}} F_k(t) dt$$

(нормировка функций  $\psi_k(z)$  выбрана так, что  $u_1^{(k)} = 1$ ). Обоснование систем (11) дано в Приложении. Там же рассмотрены возможности упрощения (11) в случае симметричных электродных систем.

### 3. Поля в области кристаллов

Вернемся к исходной задаче. Дифференцируя выражение (4) с учетом (6), (10), находим для компонент поля в кристаллах

$$E_x^{(m)} = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_k}{\eta_k} R_k(x_m, y_m),$$

$$E_y^{(m)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_k}{\eta_k} [G_m R_k(x_m, y_m) + H_m I_k(x_m, y_m)], \quad (12)$$

где  $x_m$  и  $y_m$  определяются выражениями (5),  $\eta_k$  при  $k \neq n-1$  — (7),  $\eta_{n-1} = 1$ . Входящие в (12) функции двух комплексных переменных  $R_k(x, y)$ ,  $I_k(x, y)$  являются аналитическим продолжением функций двух действительных переменных  $R_k(x', y') = \operatorname{Re} F_k(z)$ ,  $I_k(x', y') = \operatorname{Im} F_k(z)$  и выражаются через элементарные функции

$$R_k(x, y) = B_k \cos(S_k), \quad I_k(x, y) = B_k \sin(S_k), \quad (13)$$

$$B_k = \frac{\bar{y}^{k-n_r k}}{\prod_{j=1}^n (\sqrt{r_{j1}} \sqrt{r_{j2}})},$$

$$S_k = k \operatorname{Arc} \cos\left(\frac{\bar{x}}{\bar{y}r}\right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[ \operatorname{Arc} \cos\left(\frac{\bar{x} - a_j}{\bar{y}r_{j1}}\right) + \operatorname{Arc} \cos\left(\frac{\bar{x} - b_j}{\bar{y}r_{j2}}\right) \right],$$

$$r = \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right)^2}, \quad r_{j1, 2} = \sqrt{1 + \left[\frac{\bar{x} - a_j, b_j}{\bar{y}}\right]^2},$$

где берется ветвь  $0 \leq \operatorname{Re} [\operatorname{Arc} \cos(\dots)] \leq \pi$ . Компоненты полей (12) комплексны. Нахождение реальной напряженности сводится либо к отделению действительной части данных компонент для монохроматических полей, либо к взятию интеграла Фурье по спектру частот.

В заключение рассмотрим вопрос о возможности аналитического продолжения функций  $f_k(x', y')$ ,  $R_k(x', y')$  и  $I_k(x', y')$ . Область аналитичности данных функций совпадает с областью аналитичности функций  $\operatorname{Arc} \cos(\dots)$ ,  $\sqrt{\dots}$ , входящих в (13). Анализ расположения разрывов этих функций показывает, что они аналитичны при  $y' \geq 0$ ,  $|x''| \leq y'$ ,  $|x'|$ ,  $|y''| < \infty$ . Переменные (5) попадают в данную область при выполнении неравенства

$$(\operatorname{Im} G_m)^2 \leq (\operatorname{Re} H_m)^2. \quad (14)$$

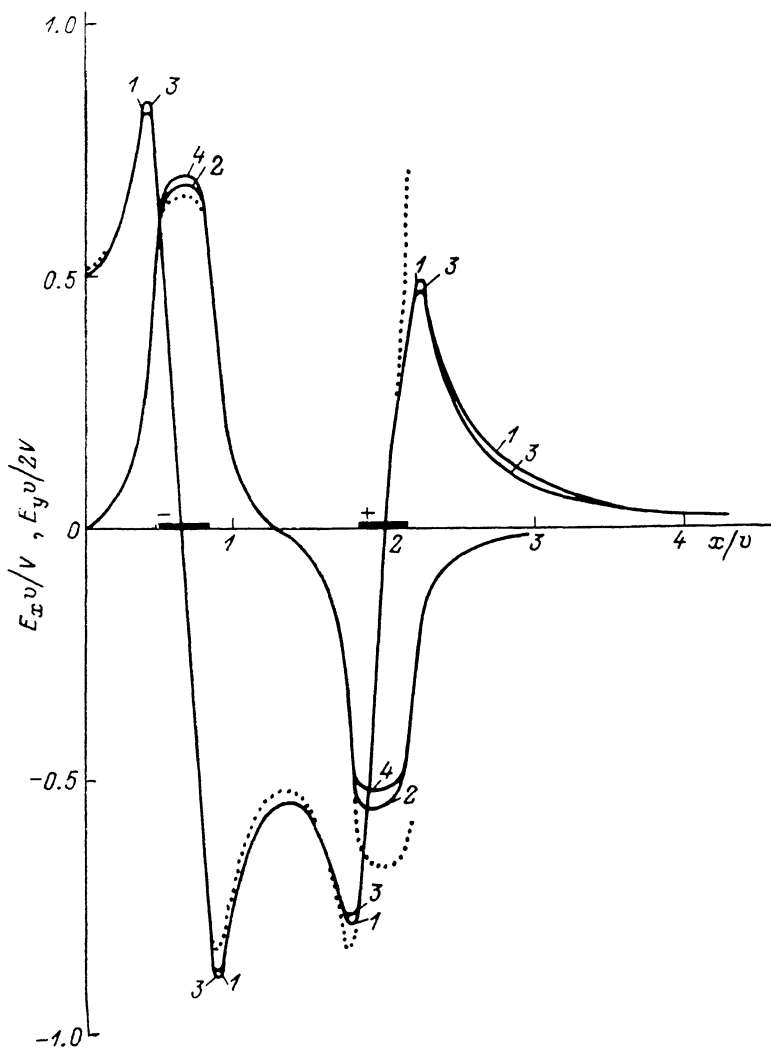
Можно показать, что при нарушении (14) вне границы  $y=0$  существуют линии, на которых составляющие полей (12) терпят разрыв, что противоречит физическому смыслу. Таким образом, необходимым и достаточным условием применимости полученных решений является выполнение неравенства (14). Оно справедливо как для диагональных в системе координат электродов тензоров  $\varepsilon(\omega)$  и  $\sigma(\omega)$ , так и в случае произвольно ориентированных слабоанизотропных сред. Кроме того, с помощью инвариантного метода [10] можно строго показать, что оно выполняется для произвольно ориентированных одноосных кристаллов с положительно определенными тензорами  $\varepsilon(\omega)$  и  $\sigma(\omega)$ .

#### 4. Численный пример

В качестве иллюстрации приведем пример расчета электродной системы брэгговского электрооптического модулятора. Здесь представляет интерес оценка границ применимости обычно используемого приближения бесконечной периодической системы электродов.

Рассматривается симметричная система, состоящая из четного числа электродов, нанесенных на поверхность z-среза кристалла  $\operatorname{LiNbO}_3$ . Кристалл расположен в области  $y < 0$  и граничит с воздухом. Предполагается, что компоненты тензоров диэлектрической проницаемости и проводимости ниобата лития следующие:  $\varepsilon_{xx}^{(2)} = 43\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_{yy}^{(2)} = 28\varepsilon_0$ ,  $\sigma_{xx}^{(2)} = \sigma_{yy}^{(2)} = 0$  (последние равенства оправданы

при  $\omega/2\pi > 100$  Гц [11]), а также, что расстояние между соседними электродами  $v$  и период системы  $w$  связаны соотношением  $w/v=4/3$  [12]. Рассматривается случай антисимметричного включения (см. Приложение) с нулевым суммарным зарядом и с равными  $\pm V$  разностями потенциалов между электродами.



На рисунке представлены результаты расчета распределения напряженности поля вдоль линии  $y=-v/12$ , приблизительно соответствующей центру одномодового оптического волновода при  $v=12$  мкм [12]. Они получены на основании (12) после решения первой из систем (П. 9). Изображена правая часть симметричной картины поля в окрестности двух крайних электродов; отрезки оси  $ox$ , соответствующие электродам, для наглядности зачернены. На рисунке объединены результаты, полученные при  $n=4$  (кривые 1, 2 для  $E_x$  и  $E_y$  компонент),  $n=8, 12, 16, 20$  (кривые 3, 4) и  $n=\infty$  (пунктир). Случай  $n=\infty$  рассчитан на основании результатов работы [4]. Графики, соответствующие  $n=8, 12, 16, 20$ , в принятом масштабе совпадают. Это означает, что при достаточно большом числе электродов взаимное влияние краев электродной системы пренебрежимо мало и краевое поведение полей при любом  $n$  может быть рассчитано в результате решения задачи для некоторого минимального  $n$  (в рассмотренном примере для  $n=8$ ). При удалении от края к центру электродной системы точное решение для распределения поля стремится к решению для периодической системы. Из рисунка следует, что данные распределения совпадают с погрешностью менее 1.5% при удалении на полтора периода.

В приложениях большую роль играет нахождение распределенной емкости электродов  $C$ . Ее величина в расчете на пару электродов, полученная нами в результате интегрирования плотности заряда, следующая:

$n$	4	8	12	16	20	$\infty$
$\frac{2C}{(\epsilon_0 + \sqrt{\epsilon_{xz}^{(2)}\epsilon_{yy}^{(2)}})n}$	0.618	0.648	0.658	0.664	0.667	0.680

Видно, что она достаточно медленно сходится к значению, найденному в периодическом приближении [4]. Такое поведение объясняется тем, что максимальная погрешность приближения [4] для компоненты  $E_{y'}^{(k)}$ , связанной с плотностью заряда, наблюдается на электродах (см. рисунок).

## Приложение

Здесь мы докажем полноту набора решений  $f_k(x', y')$  для электродной системы в вакууме. Известно [13], что при заданных значениях потенциалов проводников в вакууме электростатическая задача имеет единственное решение. Таким образом, вопрос о полноте системы решений  $f_k(x', y')$  сводится к вопросу о полноте системы векторов  $\varphi^{(k)}$ ,  $j$ -я компонента которых  $\varphi_j^{(k)}$  равна потенциалу  $j$ -го электрода для решения  $f_k(x', y')$ .

Рассмотрим вначале векторы  $\varphi^{(k)}$ , соответствующие нулевому заряду системы. Докажем, что они линейно независимы. Допустим противное. Пусть

$$\sum_{k=0}^{n-2} A_k \varphi^{(k)} = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов  $A_k$  не равен нулю. В этом случае

$$\sum_{k=0}^{n-2} A_k f_k(x', y') \equiv 0,$$

как решение электростатической задачи с нулевыми значениями потенциала на проводниках и на бесконечности. Продифференцировав последнее равенство по  $x'$ ,  $y'$  и воспользовавшись условиями Коши—Римана, получаем

$$\sum_{k=0}^{n-2} A_k F_k'(z) \equiv 0.$$

Но функции (8) линейно независимы и последнее равенство невозможно, что и требовалось доказать.

Каждому из рассматриваемых векторов потенциалов  $\varphi^{(k)}$  размерности  $n$  может быть сопоставлен вектор напряжений  $u^{(k)}$  размерности  $n-1$ ;  $u_j^{(k)} = -\varphi_{j+1}^{(k)} - \varphi_j^{(k)}$ . Векторы  $u^{(k)}$  также линейно независимы. Действительно, равенство

$$\sum_{k=0}^{n-2} A_k u^{(k)} = 0$$

соответствует такой суперпозиции функций  $f_k(x', y')$ , при которой потенциал всех проводников одинаков и равен некоторому значению  $\xi$ . В этом случае энергия системы

$$E = \frac{1}{2} \xi \sum_{j=1}^n Q_j,$$

где  $Q_j$  — заряд  $j$ -го электрода, равна нулю, так как

$$\sum_{j=1}^n Q_j = 0.$$

Если  $\xi \neq 0$ , то нулевая энергия соответствует ненулевой напряженности поля, что невозможно. Случай же  $\xi = 0$  соответствует равенству

$$\sum_{k=0}^{n-2} A_k \varphi^{(k)} = 0,$$

которое невозможно по доказанному выше. Количество линейно независимых векторов  $u^{(k)}$  равно их размерности. Следовательно, на пространстве векторов напряжений они образуют полный набор.

Рассмотрим теперь разность

$$\Delta = \Phi - \sum_{k=0}^{n-2} A_k \varphi^{(k)},$$

где  $\Phi$  — произвольный вектор потенциалов, соответствующий нулевому заряду системы. Пользуясь определением вектора напряжений, получаем для  $p$ -й компоненты вектора  $\Delta$

$$\Delta_p = \Phi_p - \sum_{l=p}^{n-1} U_l - \sum_{k=0}^{n-2} A_k \left( \varphi_n^{(k)} - \sum_{l=p}^{n-1} u_l^{(k)} \right), \quad (\text{II. 1})$$

где  $U$  — вектор напряжений, соответствующий вектору  $\Phi$ . Пользуясь полнотой системы векторов  $u^{(k)}$ , выберем постоянные так, чтобы удовлетворялась система

$$\sum_{k=0}^{n-2} A_k u^{(k)} = U. \quad (\text{II. 2})$$

Далее учтем, что потенциалы и заряды электродов связаны через матрицу емкости  $C_{ij}$  [8]

$$Q_j = \sum_{i=1}^n C_{ji} \varphi_i. \quad (\text{II. 3})$$

Из условия

$$\sum_{j=1}^n Q_j = 0$$

и соотношения (II. 3) находим

$$\Phi_n, \varphi_n^{(k)} = \left( \sum_{j,l=1}^n C_{jl} \sum_{m=1}^{n-1} U_m, u_m^{(k)} \right) \left( \sum_{j,l=1}^n C_{jl} \right)^{-1}, \quad (\text{II. 4})$$

где знаменатель строго положителен [8]. Учитывая (II. 1), (II. 2), (II. 4), получаем  $\Delta = 0$ . Следовательно, рассмотренный набор векторов  $\psi^{(k)}$  образует базис на подпространстве векторов потенциалов, соответствующих нулевому суммарному заряду электродов. Этого базиса достаточно для решения большинства встречающихся на практике задач. Амплитуды векторов  $\varphi^{(k)}$  и соответственно функций  $f_k(x', y')$  находятся при этом из системы (II. 2).

Присоединим теперь к рассмотренному набору векторов вектор  $\varphi^{(n-1)}$ , соответствующий заряду системы  $-2\pi\epsilon_0$ . Докажем, что векторы полученного набора линейно независимы. Пусть

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k \varphi^{(k)} = 0.$$

Учитывая (II. 3), получаем

$$\sum_{i,l=1}^n C_{il} \sum_{k=0}^{n-1} A_k \varphi_l^{(k)} = -2\pi\epsilon_0 A_{n-1} = 0, \quad A_{n-1} = 0.$$

В результате

$$\sum_{k=1}^{n-2} A_k \varphi^{(k)} = 0,$$

что невозможно по доказанному выше. Количество векторов  $\varphi^{(k)}$  ( $k=0, 1, \dots, n-1$ ) теперь совпадает с их размерностью. Следовательно, они составляют пол-

ный набор и любое решение  $\varphi_0(x', y')$  может быть найдено в форме (10), где  $A_k$  определяется из системы алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k \varphi^{(k)} = \Phi \quad (\text{П. 5})$$

при заданных потенциалах проводников  $\Phi_j$ .

В общем случае (П. 5) является системой  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными. Однако в практически важном случае электродных систем, имеющих плоскость симметрии  $x'=0$ , размерность системы может быть вдвое уменьшена. Для обоснования этого факта определим транспонированный вектор  $\tilde{\varphi}^{(k)}$ , получающийся из вектора  $\varphi^{(k)}$  после симметричной перестановки его компонент:  $\tilde{\varphi}_j^{(k)} = \varphi_{n+1-j}^{(k)}$ . Из анализа функций (8) нетрудно получить

$$\tilde{\varphi}^{(k)} = (-1)^{n+k+1} \varphi^{(k)}. \quad (\text{П. 6})$$

Рассмотрим случай четного числа электродов  $n$ ; результаты для нечетного  $n$  аналогичны. Разложим  $\Phi$  на симметричную и антисимметричную части

$$\Phi = \Phi_s + \Phi_a = \frac{1}{2}(\Phi + \tilde{\Phi}) + \frac{1}{2}(\Phi - \tilde{\Phi})$$

и выполним транспонирование в системе (П. 5). Имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k \tilde{\varphi}^{(k)} = \Phi_s - \Phi_a. \quad (\text{П. 7})$$

Складывая и вычитая (П. 5) и (П. 7), с учетом (П. 6) получаем

$$\sum_{l=0}^{\frac{n}{2}-1} A_{2l+1} \varphi^{(2l+1)} = \Phi_s, \quad \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}-1} A_{2l} \varphi^{(2l)} = \Phi_a. \quad (\text{П. 8})$$

В каждой из систем (П. 8) имеется  $n$  уравнений, однако вследствие (П. 6) последние  $n/2$  уравнений совпадают с первыми, которых достаточно для определения  $n/2$  неизвестных  $A_{2l+1}$  или  $A_{2l}$ . Для симметричного ( $\Phi_a=0$ ) или антисимметричного ( $\Phi_s=0$ ) включений электродов коэффициенты  $A_{2l}$  или  $A_{2l+1}$  равны нулю, что следует из линейной независимости векторов  $\varphi^{(k)}$ . Следовательно, при расчете таких включений размерность системы (П. 6) уменьшается вдвое. В случае нулевого суммарного заряда электродов аналогичные результаты получаются для системы (П. 2). С учетом вытекающих из (П. 6) соотношений

$$\tilde{u}^{2l} = u^{(2l)}, \quad \tilde{u}^{(2l+1)} = -u^{(2l+1)},$$

имеем

$$\sum_{l=0}^{n/2-1} A_{2l} u^{(2l)} = U_s, \quad \sum_{l=0}^{n/2-1} A_{2l+1} u^{(2l+1)} = U_a. \quad (\text{П. 9})$$

### Литература

- [1] Хансперджер Р. Интегральная оптика. М.: Мир, 1985.
- [2] Alferness R. C. IEEE J. Quant. Electron., 1981, v. 17, N 6, p. 946—959.
- [3] Vandenbulcke P., Lagasse P. E. Wave Electron., 1976, v. 1, N 4, p. 296—308.
- [4] Wei J. S. IEEE J. Quant. Electron., 1977, v. 13, N 4, p. 151—158.
- [5] Сотский А. Б. Препринт № 271 ИФ АН БССР. Минск, 1982.
- [6] Гусак Н. А., Гриб А. Ф. ЖТФ, 1984, т. 54, № 2, с. 415—417.
- [7] Van Den Berg P. M., Chijsen W. J., Venema A. IEEE Trans., 1985, v. MTT-33, N 2, p. 121—129.
- [8] Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1957.
- [9] Свейников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1967, с. 173—181.
- [10] Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Минск, 1958.
- [11] Белин А. М., Свидзинский К. К. Квант. электр., 1981, т. 8, № 2, с. 433—435.
- [12] Ахмеджанов И. М., Божевольный С. И., Золотов Е. М. и др. Квант. электр., 1981, т. 8, № 10, с. 2160—2168.
- [13] Вольман В. И., Пименов Ю. В. Техническая электродинамика. М.: Связь, 1971, с. 99.

Институт физики  
Могилевское отделение АН БССР

Поступило в Редакцию  
16 января 1987 г.