

УДК 535.42

ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИФРАГИРОВАННЫХ ВОЛН ПОСЛЕ ПРОХОЖДЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКОГО И ГИРОТРОПНОГО КРИСТАЛЛА

В. В. Брыксин, Л. И. Коровин, М. П. Петров,
А. В. Хоменко

Рассматривается кубический кристалл, оптическая неоднородность в котором обусловлена модуляцией внутреннего электрического поля за счет эффекта Поккельса. Исследуется влияние гиротропии на поляризацию распространяющихся в среде световых мод, а также на поляризацию света, дифрагирующего в кристалле. Анализ проведен на основе системы связанных дифференциальных уравнений первого порядка для амплитуд и фаз двух световых мод. Предполагается, что среда неоднородна как по ходу луча, так и в плоскости, перпендикулярной этому направлению. Установлена связь между симметрией модуляции среды и состоянием поляризации дифрагированного света. Так, если среда модулирована в одном направлении и фурье-разложение внутреннего поля содержит только нечетные гармоники, то все дифрагированные волны поляризованы линейно, хотя в кристалле распространяется эллиптически поляризованная волна. Показано, что учет гиротропии приводит к зависимости углов поляризации от их номера. На примере тонкого образца в условиях малой модуляции приведены явные выражения для амплитуд и углов поляризации гармоник. Теория объясняет имеющиеся экспериментальные данные.

Создание пространственно-временных модуляторов света (ПВМС) привело к необходимости детального исследования распространения света в оптически неоднородных средах. Оптическая неоднородность обусловлена обычно координатной зависимостью внутреннего электрического поля в образце $E(\mathbf{r})$, которое появляется в результате освещения кристалла модулированным светом и эффекта фоторефракции [1]. В [2] развита теория распространения света в негиротропной среде, неоднородность которой обусловлена линейным электрооптическим эффектом. Показано, что в таких средах направления главных осей эллипса сечения оптической индикатрисы зависят от координаты по ходу луча. В этом случае световые моды не являются независимыми, их амплитуды и фазы связаны системой дифференциальных уравнений. В [3] результаты работы [2] обобщены на кристаллы, обладающие оптической активностью. Вращение осей эллипса поляризации имеет место, например, в холестерических жидких кристаллах и исследовалось в эллипсометрии [4, 5].

В настоящей работе изучаются физические следствия, вытекающие из этой системы уравнений для связанных световых мод. В частности, известно, что при прохождении через однородный одноосный кристалл линейно-поляризованная волна преобразуется в эллиптическую. Однако на эксперименте [6] обнаружено, что при прохождении света через образец $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$, модулированный в одном направлении за счет внутреннего электрооптического эффекта, пулевой и первый дифракционные порядки на выходе поляризованы линейно, а направления их векторов поляризации отличаются друг от друга. Ниже показано, что при одномерной модуляции электрооптической константы в плоскости пластины и при произвольной ее зависимости от координаты по ходу луча все дифракционные порядки оказываются линейно-поляризованными как в негиротропных, так и оптически активных кристаллах, причем направления векторов поляризации

резко различаются для четных и нечетных гармоник. В негиротропных средах поляризации всех четных и всех нечетных порядков одинаковы, а учет гиротропии частично или полностью снимает это вырождение по поляризациям в зависимости от характера изменения электрооптического тензора в направлении по толщине образца.

1. Общие формулы для световых мод

В работе [4] был развит формализм дифференциальной матрицы Джонса, приводящий к системе дифференциальных уравнений для связанных мод и позволяющий описывать распространение света в неоднородных средах. Этот формализм широко используется, например, в эллипсометрии [5], а также в оптике слоистых структур [7]. На основании формализма Джонса в [3] показано, что поле световой волны в гиротропных кристаллах кубической сингонии, в которых неоднородность обусловлена модуляцией малых поправок к диэлектрическому тензору за счет линейного электрооптического эффекта, определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} dA_x/dz &= -(ix/2)(A_x \cos 2\psi + A_y \sin 2\psi) + gA_y, \\ dA_y/dz &= -(ix/2)(A_x \sin 2\psi - A_y \cos 2\psi) - gA_x. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ψ — угол между осью x базовой системы координат xy и направлением главной оси эллипса сечения оптической индикатрисы (рис. 1). Свет падает нормально к поверхности вдоль положительного направления оси z . В проекциях A_x и A_y электрического поля волны опущен общий фазовый множитель (см. [2, 3]). В (1) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x &= (\omega n_0^3/2c)v, \\ g &= (\omega n_0^3/2c)G, \quad v = n_{01}^{-2} - n_{02}^{-2} \sim r, \end{aligned} \quad (1a)$$

где ω — частота света, c — его скорость, n_0 — показатель преломления, G — компонента псевдотензора гирации, n_{01} и n_{02} — показатели преломления световых мод с учетом линейного электрооптического эффекта, r — компонента электрооптического тензора.

Угол ψ зависит от ориентации внутреннего поля в плоскости xy относительно кристаллографических осей, а также от ориентации самих осей относительно плоскости пластины. Коэффициент пропорциональности между v и r в (1a) определяется внутренним полем и ориентацией осей относительно поверхности образца. В общем случае входящие в (1) параметры x , ψ и g являются произвольными функциями координат. Из уравнения (1) следует условие отсутствия поглощения

$$|A_x|^2 + |A_y|^2 = \text{const}(z).$$

Если в системе (1) коэффициенты зависят от z , то их невозможно расцепить на два несвязанных уравнения для амплитуд \bar{A}_k с помощью линейного преобразования $A_j = a_{jk} \bar{A}_k$ ($j=x, y; k=1, 2$). Дело в том, что если матрица a_{jk} зависит от z , то не будет выполнен закон сохранения каждой амплитуды $|\bar{A}_k| = \text{const}(z)$. Отсюда следует, что в неоднородной среде, вообще говоря, нельзя ввести понятие собственной несвязанной световой моды. Однако такое расцепление можно осуществить в двух частных случаях, к рассмотрению которых мы перейдем.

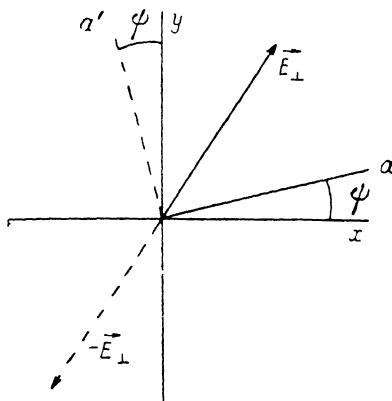


Рис. 1. Направления вектора поля E_{\perp} и главной оси эллипса индикатрисы a в базовой системе координат. a' — направление главной оси после ин-
версии поля.

2. Негиротропные среды

Рассмотрим среды с $g=0$ и углом ψ , не зависящим от z , т. е. когда направления главных осей не меняются по ходу луча. Подчеркнем, что эти направления могут меняться в плоскости xy , так что собственные моды в разных точках поверхности кристалла, вообще говоря, разные. Расщепление уравнений (1) достигается поворотом системы координат на угол ψ , собственные моды линейно поляризованы под углами ψ и $\psi - \pi/2$. Решение системы (1) имеет вид ($z=d$)

$$\begin{aligned} A_x &= A_{x_0} \cos Q - i(A_{x_0} \cos 2\psi + A_{y_0} \sin 2\psi) \sin Q, \\ A_y &= A_{y_0} \cos Q - i(A_{x_0} \sin 2\psi - A_{y_0} \cos 2\psi) \sin Q, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$Q = (1/2) \int_0^d \kappa(x, y, z) dz, \quad (3)$$

A_{x_0} , A_{y_0} — проекции амплитуды падающей волны в плоскости $z=0$; d — толщина пластины. При малой толщине ($Q \ll 1$) это решение переходит в найденное в [2] (формула (16)) выражение для поля прошедшей волны.

Остановимся теперь на случае одномерной модуляции внутреннего поля, когда его проекция на плоскость xy \mathbf{E}_\perp меняется по синусоидальному закону

$$\mathbf{E}_\perp(x, y, z) = \mathbf{e}(z) \sin(\mathbf{k}\mathbf{r}_\perp), \quad (4)$$

где \mathbf{k} — волновой вектор пространственной модуляции, \mathbf{r}_\perp — радиус-вектор в плоскости xy . Такая ситуация, например, реализуется в ПВМС ПРИЗ в линейном режиме записи [8]. Поскольку $\kappa \sim |\mathbf{E}_\perp|$ [1, 2], то $\kappa \sim |\sin(\mathbf{k}\mathbf{r}_\perp)|$. Вектор \mathbf{E}_\perp направлен вдоль \mathbf{k} . В тех точках, где \mathbf{E}_\perp меняет направление на противоположное, угол ψ скачком изменяется на $\pi/2$ (меняются местами главные оси эллипса), что эквивалентно замене $\kappa \rightarrow -\kappa$ (см. (1) и рис. 1). В дальнейшем удобно считать, что угол ψ при одномерной модуляции не зависит от x и y , и вместо $\kappa \sim |\sin(\mathbf{k}\mathbf{r}_\perp)|$ записать [2]

$$\kappa = 2\mu(z) \sin(\mathbf{k}\mathbf{r}_\perp). \quad (5)$$

Коэффициент $\mu(z)$ зависит от ориентации нормали к поверхности относительно кристаллографических осей [1, 2]. Подставляя (5) в (3), видим, что

$$Q = a \sin(\mathbf{k}, \mathbf{r}_\perp), \quad a = \int_0^d \mu(z) dz \quad (6)$$

и амплитуды света на выходе являются периодическими функциями координат x и y вдоль направления \mathbf{k} . Пусть падающий свет поляризован линейно под углом α в базовой системе координат

$$A_{x_0} = A_{i_n} \cos \alpha, \quad A_{y_0} = A_{i_n} \sin \alpha. \quad (7)$$

Разложим теперь амплитуды на выходе (2) в ряды Фурье по переменной $(\mathbf{k}\mathbf{r}_\perp) = \mathbf{k}\mathbf{r}_\perp = t$

$$\mathcal{F}(t) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \mathcal{F}^{(p)} \exp(ipt), \quad \mathcal{F}^{(p)} = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}(t) \exp(-ipt) dt. \quad (8)$$

В результате несложных вычислений получим, что Фурье-компоненты, описывающие амплитуды дифракционных порядков, равны

$$\begin{aligned} A_x^{(2n)} &= A_{i_n} \cos \alpha J_{2n}(a), \quad A_x^{(2n+1)} = -A_{i_n} \cos(2\psi - \alpha) J_{2n+1}(a), \\ A_y^{(2n)} &= A_{i_n} \sin \alpha J_{2n}(a), \quad A_y^{(2n+1)} = -A_{i_n} \sin(2\psi - \alpha) J_{2n+1}(a), \end{aligned} \quad (9)$$

где $J_n(a)$ — функция Бесселя, n — целые числа.

Несмотря на то что свет на выходе (2) поляризован эллиптически, из (9) видно, что все порядки дифракции поляризованы линейно, а угол поляризации четных гармоник $\gamma_{2n} = \alpha$ совпадает с поляризацией падающего света. Нечетные гармоники тоже вырождены по состоянию поляризации и для них $\gamma_{2n+1} = 2\psi - \alpha$. Это свойство вырождения по состоянию поляризации тесно связано с отсутствием гиротропии. Как увидим ниже, при $g \neq 0$ вырождение снимается.

В заключение этого раздела приведем формулы для амплитуды, если на выходе стоит линейный анализатор под углом β

$$A_{\text{out}}^{(n)} = A_x^{(n)} \cos \beta + A_y^{(n)} \sin \beta. \quad (10)$$

Тогда из (9) имеем

$$A_{\text{out}}^{(2n)} = A_{\text{in}} \cos(\beta - \alpha) J_{2n}(a), \quad A_{\text{out}}^{(2n+1)} = -A_{\text{in}} \cos(\alpha + \beta - 2\psi) J_{2n+1}(a). \quad (11)$$

Для скрещенных анализатора и поляризатора ($\beta - \alpha = \pi/2$) все четные гармоники одновременно погашены. Отметим, что амплитуда на выходе (11) для нечетных гармоник совпадает с приведенной в [1] в частном случае $\psi = 0$.

3. Однородная по ходу луча гиротропная среда

Рассмотрим случай, когда величины x , ψ и g в (1) не зависят от координаты z , но являются функциями x и y . Собственные моды в этом случае эллиптически поляризованы. Решение (1) имеет вид

$$\begin{aligned} A_x &= A_{x0} \left(\cos qd - \frac{ix}{2} \cos 2\psi \frac{\sin qd}{q} \right) + A_{y0} \left(g - \frac{ix}{2} \sin 2\psi \right) \frac{\sin qd}{q}, \\ A_y &= A_{y0} \left(\cos qd + \frac{ix}{2} \cos 2\psi \frac{\sin qd}{q} \right) - A_{x0} \left(g + \frac{ix}{2} \sin 2\psi \right) \frac{\sin qd}{q}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$q = \sqrt{g^2 + x^2/4} = \sqrt{g^2 + \mu^2 \sin^2 t}.$$

Это решение переходит в полученное в [9] выражение для однородной среды, если в (12) положить $A_{x0} = 0$, $\psi = 3\pi/4$, а в [9] перейти от одноосного к кубическому кристаллу. Нетрудно убедиться в том, что при линейной поляризации падающего света (7) свет на выходе поляризован эллиптически. Подобно тому, как сделано в разделе 2, разложим амплитуды поля на выходе (12) по Фурье-гармоникам. В результате для линейно-поляризованного света на входе получим

$$\begin{aligned} A_x^{(2n)} &= A_{\text{in}} \sqrt{u_{2n}^2 + v_{2n}^2} \cos(\alpha - \xi_{2n}), \quad A_v^{(2n+1)} = -A_{\text{in}} w_{2n+1} \cos(2\psi - \alpha), \\ A_y^{(2n)} &= A_{\text{in}} \sqrt{u_{2n}^2 + v_{2n}^2} \sin(\alpha - \xi_{2n}), \quad A_y^{(2n+1)} = -A_{\text{in}} w_{2n+1} \sin(2\psi - \alpha), \\ &\quad \text{tg } \xi_{2n} = v_{2n}/u_{2n}. \end{aligned} \quad (13)$$

Функции u_n , v_n и w_n выражаются через интегралы

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dt \cos nt \cos qd, \quad v_n = \frac{g}{\pi} \int_0^\pi dt \cos nt \frac{\sin qd}{q}, \\ w_{2n+1} &= -\frac{i\mu}{\pi} \int_0^\pi dt \sin nt \sin nt \frac{\sin qt}{q}. \end{aligned} \quad (14)$$

Величина μ определена в (15) и здесь от z не зависит. Из (13) видно, что и в этом случае все дифракционные порядки поляризованы линейно. При этом нечетные гармоники остаются вырожденными по состоянию поляризации с углом поляризации $\gamma_{2n+1} = 2\psi - \alpha$, так же как и в отсутствие гиротропии. Что касается поляризации четных гармоник, то для них вырождение гиротропией снимается и $\gamma_{2n} = \alpha - \xi_{2n}$. Вырождение по состоянию поляризации нечетных гармоник происходит только за счет неоднородности среды по ходу луча (т. е. зависимости

$\mu(z)$ в сочетании с гиротропией. Укажем здесь на работу [10], в которой рассматривалась поляризация света при одномерной модуляции оптических свойств магнитных материалов.

Отметим, что решение уравнений (1) в форме (12) можно рассматривать и как приближенное для общего случая, когда x и g зависят от z (а угол ψ по-прежнему от z не зависит), в смысле приближения ВКБ в теории дифференциальных уравнений, если заменить

$$qd \rightarrow \int_0^d q(z) dz.$$

Так как q нигде не обращается в нуль, то это решение не требует сшивки в точках поворота и точно переходит в рассмотренные выше модели при $g=0$ или $g=\text{const}(z)$.

4. Точное решение уравнений для связанных мод

Обратимся теперь к анализу общих решений уравнений (1), что позволит сделать вывод о том, какие из полученных выше свойств прошедшего света являются общими, а какие результатом предположений о конкретных свойствах модуляции среды, сделанных в двух проанализированных выше точно решаемых моделях. Построим формальные решения системы (1) в виде итерационных рядов. Для этого перейдем к круговым поляризациям

$$A_{\pm} = (A_x \pm iA_y)/\sqrt{2}, \quad (15)$$

а затем введем новые функции

$$B_{\pm} = A_{\pm} \exp\left(\pm i \int_0^z g dz'\right). \quad (16)$$

Система (1) для функций B_{\pm} принимает вид

$$dB_{+}/dt = i\gamma B_{-}, \quad dB_{-} = i\gamma^* B_{+}, \quad \gamma = -(\kappa/2) \exp\left[2i\left(\psi + \int_0^z g dz'\right)\right]. \quad (17)$$

Решение уравнений (17) можно получить в виде рядов по степеням γ . Запишем их как для циркулярных компонент A_{\pm} , так и для линейных A_x и A_y

$$\begin{aligned} A_{+} &= A_{+0}f + A_{-0}h, \quad A_{-} = A_{-0}f^* - A_{+0}h^*, \\ A_x &= A_{x0}(\text{Re } f + i \text{Im } h) - A_{y0}(\text{Im } f + i \text{Re } h), \\ A_y &= A_{x0}(\text{Im } f - i \text{Re } h) + A_{y0}(\text{Re } f - i \text{Im } h). \end{aligned} \quad (18)$$

Функции f и h представляются рядами

$$\begin{aligned} f &= \exp\left(-i \int_0^z g dz'\right) \left\{ 1 - \int_0^z \gamma(z_1) dz_1 \int_0^{z_1} \gamma^*(z_2) dz_2 + \dots \right\}, \\ h &= i \exp\left(-i \int_0^z g dz'\right) \int_0^z \gamma(z_1) dz_1 \left\{ 1 - \int_0^{z_1} \gamma^*(z_2) dz_2 \int_0^{z_2} \gamma(z_3) dz_3 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Если падающий свет поляризован линейно (см. (7)), то, согласно (18),

$$\begin{aligned} A_x &= A_{in} \{f_0 \cos(\varphi + \alpha) + ih_0 \sin(\gamma - \alpha)\}, \\ A_y &= A_{in} \{f_0 \sin(\varphi + \alpha) - ih_0 \cos(\gamma - \alpha)\}, \end{aligned} \quad (20)$$

где функции f и h записаны через модуль и фазу

$$f = f_0 \exp(i\varphi), \quad h = h_0 \exp(i\gamma), \quad f_0^2 + h_0^2 = 1. \quad (21)$$

Решение в форме (20) показывает, что линейно-поляризованный свет при прохождении образца преобразуется в эллиптический. В отличие от однородных сред параметры эллиптической поляризации зависят от координат x, y . Модуляция фазы прошедшей волны приводит к эффектам дифракции за кристаллом (дифракцией внутри образца мы пренебрегаем, считая образец тонким). Из (20) видно, что прошедший свет можно разложить на линейно-поляризованные составляющие, если подобрать фильтры, разделяющие вклады от f и h в амплитуду на выходе. Действительно, если в (20) сохранить члены, пропорциональные только f_0 (или только h_0), то получим линейно-поляризованную волну. Путь для подбора таких фильтров указывают свойства симметрии f и h . Согласно (19), f содержит только четные, а h только нечетные степени x .

Пусть мы имеем дело со средой, промодулированной в плоскости xy в одном направлении внутренним полем так, что x описывается формулой (5). В этом случае f содержит только четные, а h нечетные гармоники Фурье-разложения. Вследствие этого все дифракционные порядки оказываются поляризованными линейно, причем фаза четных гармоник отличается от фазы нечетных на $\pi/2$. Угол поляризации каждой гармоники зависит, вообще говоря, от ее номера. Эта зависимость определяется конкретным видом функции $\mu(z)$, а также наличием или отсутствием гиротропии. Поляризация гармоник при $g=0$ рассмотрена в разделе 2. Заметим, что вывод о линейной поляризации дифракционных порядков сохраняется и для более сложных решеток, чем синусоидальная (5). Для этого достаточно, чтобы Фурье-разложение решетки содержало только нечетные компоненты

$$x(x, y, z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(z) \sin [(2n+1)(kr_{\perp})].$$

Если же такое разложение содержит и четные гармоники, то дифракционные порядки окажутся поляризованными эллиптически. Другим важным свойством является независимость угла поляризации четных гармоник от ориентации записанной решетки относительно кристаллографических осей. Действительно, если угол ψ не зависит от z , то, согласно (19) и выражению для γ (17), угол ϕ из f выпадает. Что касается h , то в нее ψ входит в виде множителя $\exp(2i\psi)$, т. е. угол поляризации всех нечетных гармоник можно записать в виде $\psi + \xi_{2n+1}$, где ξ_{2n+1} не зависит от ψ . Эти свойства зависимости поляризации гармоник от ориентации решетки видны и на моделях § 2 и 3.

5. Прохождение света сквозь тонкие образцы

Более конкретные выводы о свойствах прошедшего сквозь пространственно-неоднородную пластинку света можно получить, если считать образец достаточно тонким, так что фаза волны на выходе была промодулированной слабо. Это имеет место, если $a \ll 1$, $gd \ll 1$.

Разложим функции f и h в ряды Фурье и представим Фурье-компоненты в виде

$$f^{(2n)} = R^{(2n)} \exp[i(\varphi^{(2n)} - gd)], \quad h^{(2n+1)} = R^{(2n+1)} \exp[i(\varphi^{(2n+1)} + 2\psi - gd - \pi/2)]. \quad (22)$$

Тогда из (18) получим выражение для амплитуд дифракционных порядков поля волны $A_x^{(n)}$, $A_y^{(n)}$ при линейно-поляризованном падающем свете

$$\begin{aligned} A_x^{(2n)} &= A_{\text{in}} R^{(2n)} \cos(\varphi^{(2n)} + \alpha - gd), & A_y^{(2n)} &= A_{\text{in}} R^{(2n)} \sin(\varphi^{(2n)} + \alpha - gd), \\ A_x^{(2n+1)} &= -i A_{\text{in}} R^{(2n+1)} \cos(\varphi^{(2n+1)} + 2\psi - \alpha - gd), \\ A_y^{(2n+1)} &= -i A_{\text{in}} R^{(2n+1)} \sin(\varphi^{(2n+1)} + 2\psi - \alpha - gd). \end{aligned} \quad (23)$$

Коэффициенты $f^{(2n)}$ и $h^{(2n)}$, согласно (19), представляют собой ряды по степеням параметра a . Ряд для $f^{(2n)}$ начинается с члена a^{2n} , для $h^{(2n+1)}$ — с a^{2n+1} . Так как, по предположению, $a \ll 1$, то в каждом ряде следует оставить наибольший член (первый). В результате получим

$$f^{(2n)} = 2^{-2n} \exp(-igd) \int_0^d Dz_1 \int_0^{z_1} Dz_2 \dots \int_0^{z_{2n-1}} Dz_{2n} \exp\left(2ig \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i-1} z_i\right),$$

$$h^{(2n+1)} = -2^{-(2n+1)} \exp[i(2\psi - gd)] \int_0^d Dz_1 \int_0^{z_1} Dz_2 \dots \int_0^{z_{2n}} Dz_{2n+1} \times$$

$$\times \exp\left(2ig \sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i-1} z_i\right). \quad (24)$$

Здесь для сокращения записи введено обозначение $Dz = \mu(z) dz$.

Используя теперь условие $gd \ll 1$, разложим (24) в ряды по степеням g с точностью до g^2

$$f^{(2n)} = \frac{a^{2n}}{2^{2n} (2n)!} \left\{ 1 - g^2 \left(\frac{d^2}{2} - 2d\bar{z}_{2n} + 2\bar{z}_{2n}^2 \right) - ig(d - 2\bar{z}_{2n}) \right\},$$

$$h^{(2n+1)} = \frac{a^{2n+1} \exp[i(2\psi + \tau)]}{2^{2n+1} (2n+1)!} \left\{ 1 - g^2 \left(\frac{d^2}{2} - 2d\bar{z}_{2n+1} + 2\bar{z}_{2n+1}^2 \right) - ig(d - 2\bar{z}_{2n+1}) \right\}, \quad (25)$$

где введены обозначения

$$\bar{z}_n^k = \frac{n!}{a^n} \int_0^d Dz_1 \int_0^{z_1} Dz_2 \dots \int_0^{z_{n-1}} Dz_n \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} z_i \right)^k \quad (k=1, 2). \quad (26)$$

При $n=1$ \bar{z}_1 и \bar{z}_1^2 переходят во введенные в [3] величины

$$\bar{z}_1 = a^{-1} \int_0^d z \mu(z) dz \equiv \bar{z}, \quad \bar{z}_1^2 = a^{-1} \int_0^d z^2 \mu(z) dz \equiv \bar{z}^2 + \bar{z}^2,$$

где \bar{z} имеет смысл положения центра тяжести распределения $\mu(z)$, а \bar{z}^2 — толщины активного слоя, где создается неоднородное электрическое поле. При получении (26) использовано тождество

$$\int_0^d Dz_1 \int_0^{z_1} Dz_2 \dots \int_0^{z_{n-1}} Dz_n = a^n / n! \quad (27)$$

Сравнивая (25) с (22), видим, что амплитуды и фазы гармоник с точностью до g^2 равны

$$R^{(n)} = [a^n / 2^n n!] \{ 1 - 2g^2 (\bar{z}_n^2 - \bar{z}_n^2) \}, \quad \varphi^{(n)} = 2g\bar{z}_n. \quad (28)$$

Как показано в Приложении, величины \bar{z}_n и \bar{z}_n^2 , определенные в (26) n -кратными интегралами, представляются в более компактном виде

$$\bar{z}_n = na^{-n} \int_0^d dz \cdot z \mu(z) [b(z) - c(z)]^{n-1}, \quad b(z) = \int_0^z \mu(z') dz',$$

$$\bar{z}_n^2 = na^{-n} \int_0^d dz \cdot z \mu(z) \int_0^z dz_1 [2b(z_1) - b(z) + c(z)]^{n-1}, \quad c(z) = \int_x^d \mu(z') dz'. \quad (29)$$

Как видно из (28), при наличии гиротропии снимается вырождение гармоник по состоянию поляризации. Для выяснения конкретного характера зависимости углов поляризации $\gamma_{2n} = \alpha + \varphi^{(2n)} - gd$ и $\gamma_{2n+1} = 2\psi - \alpha + \varphi^{(2n+1)} - gd$ гармоник и их амплитуды $R^{(n)}$ от номера рассмотрим простую модель активного слоя кристалла, в котором осуществляется пространственная модуляция света. В этой модели предполагается, что $\mu(z)$ отлична от нуля только в слое

толщиной δ , расположенном параллельно поверхности кристалла (т. е. в плоскости xy), и внутри этого слоя не меняется ($\mu(z) = \mu_0$; рис. 2). В этой модели после несложных вычислений из (29) получим

$$\bar{z}_{2n} = n\delta/(2n + 1), \quad \bar{z}_{2n}^2 - \bar{z}_{2n}^2 = n\delta^2/[2(2n + 1)^2]. \quad (30)$$

$$\bar{z}_{2n+1} = \Delta, \quad \bar{z}_{2n+1}^2 - \bar{z}_{2n+1}^2 = \delta^2/[4(2n + 3)]. \quad (31)$$

В соответствии с (23) и (28) углы поляризации гармоник γ_n равны

$$\gamma_{2n} = \alpha - g\delta - 2g\delta n/(2n + 1), \quad \gamma_{2n+1} = 2\psi - \alpha + 2g\Delta. \quad (32)$$

Таким образом, наличие гиротропии снимает вырождение по углам поляризации для четных гармоник. Углы поляризации изменяются от $\alpha - g\delta$ ($n=0$) до $\alpha - g(d - \delta)$ ($n \rightarrow \infty$) и зависят лишь от толщины активного слоя (рис. 3).

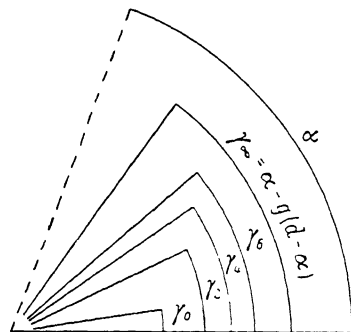
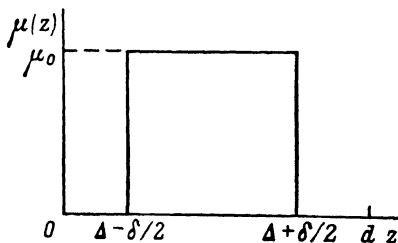


Рис. 2. Зависимость $\mu(z)$ в модели активного слоя.

Δ — координата центра тяжести слоя, δ — толщина слоя.

Рис. 3. Схематическая зависимость угла поляризации γ_{2n} от номера дифракционного порядка в модели активного слоя.

Что касается гармоник нечетных, то в модели активного слоя их вырождение по углам поляризации не снимается, а сам угол зависит от положения активного слоя Δ . Этот угол изменяется в зависимости от направления падения света на кристалл (слева направо или наоборот), если $\mu(z)$ несимметрична относительно центра пластины. Этот эффект наблюдался на первой гармонике в $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ [1]. Однако при более сложной зависимости $\mu(z)$, чем в принятой модели активного слоя на рис. 1, вырождение для нечетных гармоник снимается.

Амплитуды гармоник в модели активного слоя зависят только от толщины слоя

$$R^{(2n)} = (\mu_0\delta/2)^{2n} [(2n)!]^{-1} [1 - n g^2 \delta^2 / (2n + 1)^2],$$

$$R^{(2n+1)} = (\mu_0\delta/2)^{2n+1} [(2n + 1)!]^{-1} [1 - g^2 \delta^2 / 2(2n + 3)]. \quad (33)$$

Амплитуды быстро убывают с ростом n по параметру $\mu_0\delta < a \ll 1$. Если в (32) и (33) считать $\delta = d$, $\Delta = d/2$, то можно перейти к случаю однородной в направлении z среды для $a \ll 1$, $gd \ll 1$.

Приложение

Заменим в выражении (26) $(-1)^{i-1}$ на $1 - [1 - (-1)^{i-1}]$. Тогда \bar{z}_i приводится к виду

$$\bar{z}_i = l\bar{z}_1 - 2a^{-1}l! I_1, \quad (\text{II. 1})$$

где

$$I_1 = \int_0^d Dz_1 \int_0^{z_1} Dz_2 \dots \int_0^{z_{l-1}} Dz_l (z_2 + z_4 + \dots + z_l), \quad (\text{II. 2})$$

($l' = l$ для четных l и $l' = l - 1$ для нечетных). При выводе (П. 2) использовалось тождество

$$\int_a^b dz_1 \int_a^{z_1} dz_2 \dots \int_a^{z_{n-1}} dz_n f(z_1, z_2 \dots z_n) = \frac{1}{n!} \int_a^b dz_1 \int_a^b dz_2 \dots \int_a^b dz_n f(z_1, z_2 \dots z_n), \quad (\text{П. 3})$$

где $f(z_1 \dots z_n)$ симметрична относительно перестановки любой пары переменных. При $f = 1$, $a = 0$, $b = d$ оно переходит в (27). Рассмотрим четные $l = 2n$. Заменой пределов интегрирования в (П. 2) I_{2n} приводится к виду

$$I_{2n} = \sum_{m=1}^n \int_0^d z'_m D z'_m \left\{ \int_{z'_m}^d D z'_m \int_{z'_m}^d D z'_{m-1} \dots \int_{z'_1}^d D z'_1 \right\} \left\{ \int_0^{z'_m} D z_{m+1} \int_0^{z_{m+1}} D z'_{m+1} \dots \int_0^{z'_{n-1}} D z'_n \int_0^{z'_n} D z'_n \right\}.$$

Последовательности интегралов в фигурных скобках с помощью тождества (27) собираются в степень однократных интегралов

$$I_{2n} = \sum_{m=1}^n \frac{1}{[2(n-m)]! (2m-1)!} \int_0^d D z \cdot z [c(z)]^{2m-1} [b(z)]^{2(n-m)}, \quad (\text{П. 4})$$

где $b(z)$ и $c(z)$ определены в (29). Суммы в выражении (П. 4) равны

$$\sum_{m=1}^n \frac{c^{2m-1} b^{2(n-m)}}{[2(n-m)]! (2m-1)!} = \frac{(c+b)^{2n-1} + (c-b)^{2n-1}}{2(2n-1)!}. \quad (\text{П. 5})$$

Учитывая соотношение $c(z) + b(z) = a$, получим формулу (29) для \bar{z}_{2n} . Аналогично формулу (29) можно доказать для \bar{z}_{2n+1} .

Для вывода формулы (29) для \bar{z}_l^2 возведем входящую в (29) сумму в квадрат. Сумма квадратов z_i^2 сводится к $l z_1^2$. Используя (П. 3) с $f = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_l^2$, из (26) получим

$$\begin{aligned} \bar{z}_l^2 = & \bar{l z}_1^2 + 2l! a^{-l} \int_0^d D z_1 \dots \int_0^{z_{l-1}} D z_l \{ z_1 (-z_2 + z_3 - z_4 + \dots) + \\ & + z_2 (-z_3 + z_4 - z_5 + \dots) + \dots - z_{l-1} z_l \}. \end{aligned} \quad (\text{П. 6})$$

Введем функцию $\bar{z}_m(z)$, которая отличается от определенной в (26) \bar{z}_m заменой аргумента d на z . Выражая \bar{z}_l^2 в (П. 6) через $\bar{z}_m(z)$ и меняя пределы интегрирования так же, как в (П. 3), получим, что

$$\begin{aligned} \bar{z}_l^2 = & \bar{l z}_1^2 - 2l a^{-1} \int_0^d D z_1 \cdot z_1 \bar{z}_{l-1}(z_1) - 2l(l-1) a^{-2} \int_0^d D z_2 \cdot z_2 \bar{z}_{l-2}(z_2) \int_{z_2}^d D z_1 - \\ & - 2l(l-1)(l-2) a^{-3} \int_0^d D z_3 \cdot z_3 \bar{z}_{l-3}(z_3) \int_{z_3}^d D z_1 \int_{z_2}^d D z_2 - \dots = \\ & = \bar{l z}_1^2 - 2 \sum_{m=1}^{l-1} \int_0^d D z \cdot z \frac{l! \bar{z}_{l-m}(z) [c(z)]^{m-1}}{a^m (l-m)! (m-1)!}. \end{aligned} \quad (\text{П. 7})$$

Используя явное выражение для $\bar{z}_m(z)$ и выполняя суммирование по m , приходим к формуле (29) для \bar{z}_n^2 .

Литература

- [1] Петров М. П., Степанов С. И., Хоменко А. В. Фоточувствительные электрооптические среды в голографии и оптической обработке информации. Л.: Наука, 1983.
- [2] Брыксин В. В., Коровин Л. И. ЖТФ, 1985, т. 55, № 12, с. 2289—2296.

- [13] Брыксин В. В., Коровин Л. И., Петров М. П., Хоменко А. В. ЖТФ, 1987, т. 57, № 10, с. 1918—1924.
- [14] Jones R. C. J. Opt. Soc. Am., 1956, v. 46, N 2, p. 126—131.
- [15] Ассам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет. М.: Мир, 1981.
- [16] Apostolidis H., Mallick S., Rouede D., Opt. Comm., 1985, v. 56, N 2, p. 73—78.
- [17] Etachi C. Proc. IEEE, 1976, v. 64, N 12, p. 1666—1698.
- [18] Брыксин В. В., Коровин Л. И., Петров М. П. ЖТФ, 1984, т. 54, № 8, с. 1504—1511.
- [19] Yariv A., Lotspeich Y. F. J. Opt. Soc. Am., 1982, v. 72, N 2, p. 273—277.
- [10] Соломко А. А., Мытитюк В. И. Опт. и спектр., 1974, т. 36, № 5, с. 996—1000.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР
Ленинград

Поступило в Редакцию
23 марта 1987 г.