1988 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 58, в. 4
1988 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 58, № 4

УДК 532.5 : 535.214

ДЕФОРМАЦИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

I. ТЕОРИЯ

Г. В. Островская

Задача о деформации свободной поверхности жидкости под действием светового давления решена для случая осесимметричного распределения излучения в пятне фокусировки. Приближенные уравнения Стокса решались с помощью преобразования Лапласа по времени и преобразования Ханкеля по радиусу. Численные расчеты выполнены для случая короткого лазерного импульса и гауссова распределения интенсивности в пятне фокусировки.

Деформация поверхности тонких слоев жидкости используется для записи голограмм и визуализации изображений в инфракрасном диапазоне [1]. Регистрируемое излучение при этом обычно поглощается в подложке, на которую нанесен слой жидкости. Модуляция рельефа поверхности жидкости происходит за счет температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения. Время стирания информации в этом случае определяется, с одной стороны, скоростью выравнивания температуры за счет теплопроводности, а с другой — гидродинамическими процессами в жидкой пленке, скорость протекания которых определяется толщиной слоя [2].

Деформация свободной поверхности жидкости, не связанная с тепловыми эффектами, используется в акустической голографии [3]. При этом поверхность деформируется акустическим давлением.

Аналогично этому в принципе возможна регистрация голограмм и оптических изображений за счет светового давления p_0, связанного с интенсивностью излучения I соотношением

$$p_0 = (2IR\cos\varphi)/c, \tag{1}$$

где R — коэффициент отражения, φ — угол падения излучения на поверхность, c — скорость света.

Наличие в знаменателе выражения (1) величины c приводит к тому, что значения p_0, необходимые для создания экспериментально обнаружимых деформаций, достигаются при столь высоких значениях интенсивности излучения, для получения которых необходима фокусировка излучения мощных лазеров на поверхность жидкости.

В настоящей работе приводятся результаты теоретических расчетов динамики формирования рельефа поверхности за счет светового давления под действием импульсного лазерного излучения при его фокусировке в пятно малого радиуса на поверхности, что соответствует в первом приближении случаю цилиндрической симметрии.

В работе [4] будут описаны результаты экспериментального исследования деформации поверхности под действием светового давления, выполненные методом голографической интерферометрии.

1. Задача о деформации свободной поверхности жидкости в случае цилиндрической симметрии

Задача о деформации поверхности вязкой несжимаемой жидкости под действием поверхностных сил сводится к решению приближенных уравнений Стокса [5]

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\frac{\Delta p}{\rho} + \frac{\mu}{\rho}\Delta \mathbf{V}, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{V}$ — скорость, p — давление, ρ — плотность жидкости, μ — ее динамическая вязкость при определенных начальных и граничных условиях.

В [6] найдена форма поверхности тонкой жидкостной пленки, деформируемой за счет градиентов плотности и поверхностного натяжения, обусловленного неоднородным нагревом жидкости. Для случая синусоидальной периодической силы, действующей на поверхность, эта задача решена в [2]. Применительно к термопластической записи информации задача о деформации поверхности решалась в работах [7-9]. При этом для решения задачи использовались двойное преобразование Фурье по координатам x и y и преобразование Лапласа по времени.

В нашем случае, предполагая, что внешнее давление на поверхность зависит только от одной координаты r, мы решаем уравнения (2) для случая цилиндрической симметрии, используя преобразование Ханкеля по координате r и преобразование Лапласа по времени. Полагая $V_\varphi=0$, $\partial V_r/\partial\varphi=0$, $\partial V_z/\partial\varphi=0$ и записав (2) в цилиндрических координатах, имеем следующие уравнения для составляющих скорости и давления:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Система (3) решается при начальных условиях $V_r|_{t=0}=0$ и $V_z|_{t=0}=0$. Условия на свободной поверхности (т. е. при $z=0$) [9] в цилиндрических координатах имеют вид

$$\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} = 0,$$

$$p - \rho g h - 2\mu\frac{\partial V_z}{\partial z} + \sigma\left(\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}\right) + p_0 = 0, \tag{4}$$

где g — ускорение силы тяжести, σ — коэффициент поверхностного натяжения, p_0 — внешнее давление, h — деформация поверхности

$$h = h_0(r) + \int_0^t V_z\Big|_{z=0} dt. \tag{5}$$

Для случая толстых слоев жидкости считаем также, что V_z и V_r стремятся к нулю при $z \to -\infty$.

Применив к (3) последовательно преобразование Ханкеля и Лапласа, получим следующую систему уравнений:

$$sU_r - \frac{\alpha}{\rho}Q - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} - \frac{\mu\alpha}{\rho}\frac{\partial U_z}{\partial z} = 0,$$

$$sU_z + \frac{1}{\rho}\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\mu\alpha}{\rho}\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\mu\alpha^2}{\rho}U_z = 0,$$

$$\alpha U_r + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

где

$$U_r(z,\ s,\ \alpha)=\int\limits_0^\infty e^{-st}\int\limits_0^\infty rJ_1(\alpha r)\,V_r drdt,$$

$$U_z(z,\ s,\ \alpha)=\int\limits_0^\infty e^{-st}\int\limits_0^\infty rJ_0(\alpha r)\,V_z drdt,$$

$$Q(z,\ s,\ \alpha)=\int\limits_0^\infty e^{-st}\int\limits_0^\infty rJ_0(\alpha r)\,pdrdt. \tag{7}$$

Граничные условия (4) при этом преобразуются к виду

$$\left.\frac{\partial U_r}{\partial z}\right|_{z=0}-\alpha U_z|_{z=0}=0,$$

$$Q|_{z=0}-\frac{1}{s}(\rho g+\sigma\alpha^2)H_0-\frac{1}{s}(\rho g+\sigma\alpha^2)U_z|_{z=0}-2\mu\left.\frac{\partial U_z}{\partial z}\right|_{z=0}+Q_0=0, \tag{8}$$

где

$$Q_0(s,\ \alpha)=\int\limits_0^\infty e^{-st}\int\limits_0^\infty rJ_0(\alpha r)\,p_0(r,\ t)\,drdt,$$

$$H_0(\alpha)=\int\limits_0^\infty rJ_0(\alpha r)\,h_0(r)\,dr.$$

Решение системы дифференциальных уравнений (6), удовлетворяющее граничным условиям (8), имеет вид

$$U_z=-C\,\frac{(A^2+1)\,e^{\alpha z}-2e^{\alpha Az}}{A^2-1},$$

$$U_r=C\,\frac{(A^2+1)\,e^{\alpha z}-2Ae^{\alpha Az}}{A^2-1},$$

$$Q=\frac{\rho s}{\alpha}\,C\,\frac{(A^2+1)\,e^{\alpha z}}{A^2-1}, \tag{9}$$

где

$$A^2=1+\frac{\rho S}{\mu\alpha^2},\qquad C=\frac{\rho}{\mu^2\alpha^3}\,\frac{(\sigma\alpha^2+\rho g)\,H_0-Q_0 s}{(A^2+1)^2-4A+\Delta(\alpha)},\qquad \Delta(\alpha)=\frac{\rho}{\mu^2\alpha^3}(\rho g+\sigma\alpha^2).$$

Зная U_z, можно найти V_z с помощью обратных преобразований Ханкеля и Лапласа, а именно:

$$V_z(z,\ r,\ t)=\int\limits_0^\infty \alpha J_0(\alpha r)\,W_z(z,\ t,\ \alpha)\,d\alpha,$$

где W_z — оригинал по Лапласу функции U_z. Тогда для деформации поверхности в соответствии с (5) имеем

$$h(r,\ t)=h_0(r)+\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty \alpha J_0(\alpha r)\,W_z|_{z=0}\,d\alpha dt, \tag{10}$$

где $W_z|_{z=0}$ — оригинал по Лапласу функции

$$U_z|_{z=0}=-\frac{\rho}{\mu^2\alpha^3}\,\frac{(\sigma\alpha^2+\rho g)\,H_0-Q_0 s}{(A^2+1)^2-4A+\Delta(\alpha)}.$$

2. Деформация поверхности жидкости под действием короткого сфокусированного лазерного импульса

Будем считать, что в начальный момент времени поверхность плоская, т. е. $h_0(r)=0$ и, следовательно, $H_0=0$. Интенсивность излучения, создающего световое давление, представим в виде произведения двух функций, одна из которых $f_1(t)$ характеризует изменение интенсивности во времени, а вторая $f_2(r)$ — ее распределение в пространстве. Тогда

$$p_0=\frac{2R\cos\varphi}{c}f_1(t)f_2(r),\qquad Q_0=\frac{2R\cos\varphi}{c}F(s)R(\alpha),$$

где

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f_1(t)\,dt,\qquad R(\alpha)=\int_0^\infty rJ_0(\alpha r)f_2(r)\,dr.$$

Выражение (10) для деформации поверхности при этом принимает вид

$$h(r,\ t)=\frac{2R\rho\cos\varphi}{c\mu^2}\int_0^t\int_0^\infty\frac{J_0(\alpha r)\,R(\alpha)}{\alpha^2}\varphi(\alpha,\ t)\,d\alpha dt,\tag{11}$$

где $\varphi(\alpha,\ t)$ — оригинал по Лапласу функции

$$\chi(\alpha,\ s)=\frac{sF(s)}{(A^2+1)^2-4A+\Delta(\alpha)}.\tag{12}$$

Рассмотрим случай деформации поверхности под действием лазерного импульса длительностью Δt, сфокусированного в пятно с характерным размером a. Распределение интенсивности в пределах пятна будем считать гауссовым. Тогда

$$f_1(t)=\begin{cases}1 \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\Delta t,\\ 0 \text{ при } \quad t>\Delta t,\end{cases}$$

$$f_2(r)=I_0e^{-(r/a)^2},$$

где интенсивность излучения в центре пятна связана с энергией лазерного импульса соотношением $I_0=E/\pi\Delta t a^2$, откуда

$$R(\alpha)=\frac{E}{2\pi\Delta t}e^{-\alpha^2a^2/4}.\tag{13}$$

Учитывая быстрый спад подынтегральной функции в (11) с ростом α, можно считать, что основной вклад в интеграл вносят значения $\varphi(\alpha,\ t)$, соответствующие малым α, для которых $\Delta(\alpha)\gg 1$. При этом полином

$$P(A)=(A^2+1)^2-4A+\Delta(\alpha),$$

стоящий в знаменателе выражения (12), имеет корни

$$A_{1,2,3,4}\approx\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{\Delta}-1}{2}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{\Delta}+1}{2}}\right]$$

и может быть приближенно представлен в виде

$$P(A)\simeq\left(A^2+1-i\sqrt{\Delta}\right)\left(A^2+1+i\sqrt{\Delta}\right).$$

Тогда $\chi(\alpha,\ s)$ можно записать в виде

$$\chi(\alpha,\ s)=\left(\frac{\mu a^2}{\rho}\right)^2\frac{sF(s)}{(s+s_1)(s+s_2)},$$

где

$$s_{1,2}=\frac{\mu a^2}{\rho}\left(2\pm i\sqrt{\Delta}\right)=\frac{2\mu a^2}{\rho}\pm i\alpha^{1/2}\sqrt{g+\frac{\sigma}{\rho}\alpha^2}.$$

Поскольку оригинал функции $s/(s+s_1)(s+s_2)$ равен $(s_1 e^{-s_1 t} - s_2 e^{-s_2 t})/(s_1 - s_2)$, а оригинал $F(s)$ есть $f_1(t)$, на основании теоремы о свертке находим $\varphi(\alpha, t)$, являющуюся оригиналом функции $\chi(\alpha, s)$

$$\varphi(\alpha, t) = \left(\frac{\mu\alpha^2}{\rho}\right)^2 \frac{1}{(s_1 - s_2)} \int\limits_0^t f_1(t-\tau)\left(s_1 e^{-s_1\tau} - s_2 e^{-s_2\tau}\right) d\tau,$$

откуда для прямоугольного лазерного импульса получим

$$\varphi|_{t<\Delta t}(\alpha, t) = \left(\frac{\mu\alpha^2}{\rho}\right)^2 \frac{1}{(s_1 - s_2)} \int\limits_0^t \left(s_1 e^{-s_1\tau} - s_2 e^{-s_2\tau}\right) d\tau \cong \frac{\mu^2\alpha^4 t}{\rho^2},$$

$$\varphi|_{t>\Delta t}(\alpha, t) = \left(\frac{\mu\alpha^2}{\rho}\right)^2 \frac{1}{(s_1 - s_2)} \int\limits_{t-\Delta t}^t \left(s_1 e^{-s_1\tau} - s_2 e^{-s_2\tau}\right) d\tau \cong \frac{\mu^2\alpha^4\Delta t}{\rho^2} \frac{s_1 e^{-s_1 t} - s_2 e^{-s_2 t}}{s_1 - s_2}. \quad (14)$$

Подставив в (11) $\varphi(\alpha, t)$ из (14) и $R(\alpha)$ из (13) и выполнив интегрирование по времени, получим

$$h|_{t<\Delta t}(r, t) = \frac{Kt^2}{2\Delta t} \int\limits_0^\infty \alpha^2 J_0(\alpha r)\, e^{-\alpha^2 a^2/4} d\alpha,$$

$$h|_{t>\Delta t}(r, t) = K\left[\int\limits_0^\infty \frac{\alpha^2 J_0(\alpha r)\, e^{-\alpha^2\left(\frac{a^2}{4} + 2\frac{\mu}{\rho}t\right)} \sin\left(\alpha^{1/2} t\sqrt{g + \frac{\sigma}{\rho}\alpha^2}\right) d\alpha}{\alpha^{1/2}\sqrt{g + \frac{\sigma}{\rho}\alpha^2}} - \frac{\Delta t}{2}\int\limits_0^\infty \alpha^2 J_0(\alpha r)\, e^{-\alpha^2 a^2/4} d\alpha\right], \quad (15)$$

где

$$K = (ER\cos\varphi)/\pi\rho c.$$

Для $t \gg \Delta t$ вторым слагаемым в квадратных скобках можно пренебречь. Тогда

$$h(r, t) \approx K\int\limits_0^\infty \frac{\alpha^{3/2} J_0(\alpha r)\, e^{-\alpha^2\left(\frac{a^2}{4} + 2\frac{\mu}{\rho}t\right)} \sin\left(\alpha^{1/2} t\sqrt{g + \frac{\sigma}{\rho}\alpha^2}\right) d\alpha}{\sqrt{g + \frac{\sigma}{\rho}\alpha^2}}. \quad (16)$$

Учитывая быстрый спад подынтегральной функции с ростом α, для сравнительно малых значений t можно положить

$$\frac{\sin\left(\alpha^{1/2} t\sqrt{g + \frac{\sigma}{\rho}\alpha^2}\right)}{\sqrt{g + \frac{\sigma}{\rho}\alpha^2}} \approx \alpha^{1/2} t.$$

Тогда из (16) можно получить аналитическое выражение для радиального профиля деформации

$$h(r, t) \cong Kt\int\limits_0^\infty \alpha^2 J_0(\alpha r)\, e^{-\alpha^2 a^2/4} d\alpha = \frac{2Kt\sqrt{\pi}}{a^3} e^{-r^2/2a^2}\left\{\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) I_0\left(\frac{r^2}{2a^2}\right) + \frac{r^2}{a^2} I_1\left(\frac{r^2}{2a^2}\right)\right\}, \quad (17)$$

где I_0, I_1 — функции Бесселя второго рода.

Результаты численного интегрирования выражения (16) для ряда моментов времени в диапазоне от 0.5 до 10 мс представлены на рис. 1. Штрихом нанесены результаты расчета $h(r, t)$ по формуле (17) для момента времени 0.5 мс.

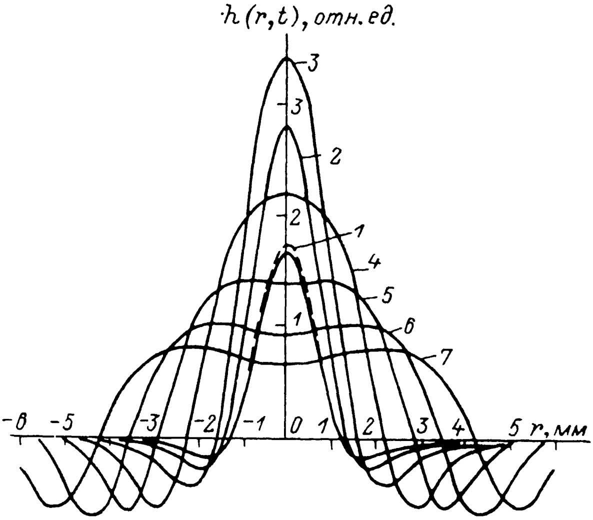

Рис. 1. Радиальный профиль деформации $h(r, t)/K$ для моментов времени $0.5 \cdot 10^{-3}$ (*1*), $1 \cdot 10^{-3}$ (*2*), $2 \cdot 10^{-3}$ (*3*), $4 \cdot 10^{-3}$ (*4*), $6 \cdot 10^{-3}$ (*5*), $8 \cdot 10^{-3}$ (*6*), 10^{-2} с (*7*).

На рис. 2 показано изменение со временем деформации в центре при разных размерах a пятна фокусировки. При расчетах предполагалось, что излучение импульсного лазера фокусируется на поверхность воды ($\sigma=73$ дин/см, $\rho=1$ г/см^3, $\mu=10^{-2}$ г/см·с). Для оценки абсолютных значений деформации положим $a=0.1$ см, $R=1$, что соответствует полному внутреннему отражению и

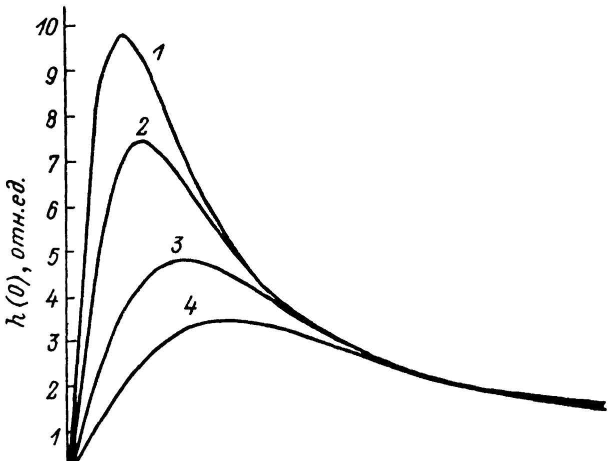

Рис. 2. Изменение со временем деформации в центре при размерах пятна фокусировки $a=0.05$ (*1*), 0.06 (*2*), 0.08 (*3*) и 0.1 см (*4*).

достигается при падении излучения на поверхность со стороны жидкости под углом $\varphi \geqslant \varphi_{пред}=\arcsin 1/n$ (n — показатель преломления, равный для воды 1.33). Положив $\varphi=\varphi_{пред}$, $c=c_{вак}/n$, $E=0.5$ Дж, найдем $K=4.6 \cdot 10^{-5}$, откуда максимальное значение деформации в центре пятна фокусировки, достигающееся, как следует из рис. 2, при $t \simeq 2$ мс, равно $h_{max}(0)=1.5 \cdot 10^{-4}$ см, что соответствует 2—3 длинам волн видимого излучения и легко может быть измерено интерферометрическим методом.

Результаты экспериментального измерения деформации поверхности жидкости под действием светового давления опубликованы в работе [4].

Автор благодарит С. Ю. Карпова и Ю. В. Погорельского за полезные дискуссии, а также М. И. Вильджюнаса и Э. Н. Колесникову за помощь в выполнении численных расчетов.

Литература

[1] *Глушков А. С., Константинов В. Б., Черных Д. Ф.* В сб.: Применение методов оптической обработки информации и голографии. Л., 1980, с. 423—435.
[2] *Budd H. F.* J. Appl. Phys., 1965, v. 36, N 5, p. 1613—1616.
[3] *Sheridon N. K.* In: Acoustical Holography. Plenum Press N. Y., 1970, v. 2, p. 275—288.
[4] *Комиссарова И. И., Островская Г. В., Шедова Е. Н.* ЖТФ, 1988, т. 58, № 4, с. 769—772.
[5] *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., 1955.
[6] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика, т. 6. Гидродинамика. М., Наука, 1986.
[7] *Гущо Ю. П., Ионкин П. А.* Журн. науч. и прикл. фотографии и кинематографии, 1967, т. 12, № 3, с. 166—172.
[8] *Гущо Ю. П.* Журн. науч. и прикл. фотографии и кинематографии, 1972, т. 17, № 1, с. 49—51.
[9] *Гущо Ю. П.* Фазовая рельефография. М.: Энергия, 1974.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР
Ленинград

Поступило в Редакцию
27 февраля 1987 г.