

## УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ МЯГКОГО ПЕРЕХОДА К ХАОСУ ЧЕРЕЗ РЕЖИМ ДВУХЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ

*В. С. Анищенко, Т. Е. Летчфорд, Д. М. Сонечкин*

Приведены экспериментальные результаты исследования качественных и количественных закономерностей перехода к хаосу через двумерный тор в моделях общей циркуляции атмосферы и неавтономного генератора радиодиапазона. Выявлена глобальная структура резонансов, описываемых «деревом Фейри». Подтверждены универсальные закономерности в распределении частотных компонент спектра в критической точке и фрактальной размерности областей эргодических биений.

Одним из типичных механизмов перехода к хаосу в многомерных и распределенных системах является разрушение маломерных инвариантных торов с образованием квазиаттракторов [1, 2]. Усилиями многих авторов к настоящему времени выявлена общая качественная картина бифуркационных явлений, наблюдаемых экспериментально при разрушении квазипериодических колебаний в реальных системах различной физической природы и в соответствующих динамических моделях при численных исследованиях [3-7]. Наибольший прогресс в вопросах теории мягкого перехода к хаосу через режим двухчастотных биений достигнут путем ренорм-группового анализа динамики модельных отображений окружности в себя [8-10]. Установлено, что процесс разрушения регулярной динамики отображения характеризуется рядом универсальных количественных закономерностей, справедливых для широкого класса модельных отображений. Однако вопрос о применимости результатов указанной теории к дифференциальным системам по сути дела до сих пор остается открытым. Прямой путь теоретического описания бифуркационных явлений при разрушении двумерных торов в нелинейных дифференциальных системах в настоящее время сопряжен с принципиальными трудностями. Одним из возможных направлений в их преодолении является постановка целенаправленных натурных и численных экспериментов по исследованию закономерностей перехода к хаосу через двухчастотные режимы колебаний в реальных системах и их детальное сопоставление с выводами теории модельных отображений окружности. Такие работы уже есть, но их, к сожалению, пока еще мало [11-13].

В настоящей статье исследуются качественные и количественные закономерности перехода от двухчастотных колебаний к хаосу, проявляющиеся в распределении областей резонансов с различными числами вращения Пуанкаре и в характере спектров мощности колебаний вблизи критической точки. С целью иллюстрации общности изучаемых явлений исследуются две совершенно различные по физической природе и степени сложности системы, общим для которых является лишь наличие режима устойчивых двухчастотных биений (квазипериодического аттрактора). Первая система представляет собой 14-мерную динамическую модель общей циркуляции атмосферы [14] и исследовалась численно, вторая (наиболее простая система с квазипериодическим аттрактором, реализующая типичные переходы к хаосу [15, 16]) — неавтономный радиотехнический генератор с инерционной нелинейностью (ГИН). ГИН допускает адекватное математическое описание и исследован как численно, так и экспериментально.

Основной целью работы было выявление общих закономерностей мягкого перехода к хаосу через двумерный тор и их сопоставление с данными теории одномерных отображений окружности.

## 1. Исследование закономерностей перехода от двухчастотных биений к хаосу в модели общей циркуляции атмосферы

Простейшая математическая модель общей циркуляции атмосферы представляет собой систему из 14 дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_i = \sum_j \sum_k K_{i,j,k} x_j x_k + \sum_j L_{i,j} x_j + F_i, \quad (1)$$

$$i, j, k = 1 \div 14.$$

В [14] указаны конкретные значения коэффициентов  $K_{i,j,k}$ ,  $L_{i,j}$  и проведено качественное исследование системы (1) при независимой от времени силе  $F_i$  с единственной ненулевой компонентой  $F_1$ .  $F_1$  имитирует контраст температуры экватор—плюс, возникающий из-за неравномерного нагрева Земли Солнцем и

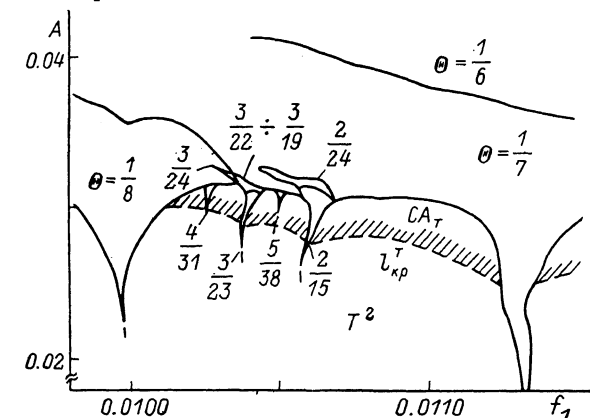


Рис. 1. Диаграмма режимов системы (1) на плоскости управляющих параметров.

служащий источником энергии атмосферных движений. Здесь выбрано  $F_1=0.14$ , когда (1) имеет аттрактором предельный цикл. Физически ему соответствуют установившиеся периодические колебания зонального потока и амплитуд двух имеющихся в модели (1) волн, которые обегают Землю с запада на восток примерно за 50 дней, что определяет основную собственную частоту системы  $f_0$ . Для учета сезонных изменений притока тепла от Солнца надо положить  $F_1=0.14+A \cos f_1 t$ , где  $f_1$  — частота годового хода, примерно в 7 раз более низкая, чем собственная частота  $f_0$ . Аттрактором системы (1) с периодическим форсированием ( $A > 0$ ) оказывается двумерный тор  $T^2$ . Численно исследована глобальная структура бифуркаций инвариантных торов на плоскости управляющих параметров ( $f_1, A$ ). Бифуркационная диаграмма представлена на рис. 1. При некоторых значениях параметров число вращения  $\Theta$  оказывается рациональной дробью и, как видно из бифуркационной диаграммы, в пространстве параметров появляются резонансные «клювы» Арнольда. Их основания опираются на ось абсцисс  $A=0$ . При малых амплитудах  $A \ll 1$  ширина клювов сравнительно слабых резонансов  $\Theta=1:7$ ,  $\Theta=1:8$  и др. (рис. 1) очень мала. Поэтому в численных экспериментах их удалось проследить только начиная с  $A \geq 0.018$ .

Клювы  $\Theta=1:7$ ;  $1:8$  относятся к резонансной серии  $1:n$ ,  $n=1, 2, \dots$ , служащей первым ярусом дерева Фейри [17]. По правилу сложения Фейри они порождаются двумя рациональными числами  $0:1$  и  $1:1$ .  $1:2=0:1+1:1$ ,  $1:3=1:2+0:1$ ,  $\dots$   $1:(n+1)=1:n+0:1$ . Второй ярус дерева Фейри составляют резонансы вида  $2:(2n+1)=1:(n+1)+1:n$ . На рис. 1 указан один резонанс второго яруса  $2:15=1:8+1:7$ . Произвольная ветвь дерева Фейри формируется «сложением» двух рациональных дробей  $a:b$  и  $c:d$  по правилу  $(a+c):(b+d)=a:b+c:d$ . Дробь  $(a+c):(b+d)$  является единственным рациональным числом с минимальным знаменателем на отрезке  $|a:b, c:d|$ . Если при этом выполнено условие унимодулярности  $|ad-bc|=1$ , то она лежит в середине этого отрезка и называется медиантой. Медианта  $(a+c):(b+d)$  унимодулярна с каждой из порождающих дробей  $a:b$  и  $c:d$ , что обеспечивает построение последующих медиантных ветвей дерева Фейри:  $(2a+c):(2b+d)=$

$= (a+c) : (b+d) + a : b, (a+2c) : (b+2d) = (a+c) : (b+d) + c : d$  и т. д. Из числа при счете были прослежены резонансы 3 : 23, 4 : 31, 5 : 38 (рис. 1).

Клювы, соответствующие резонансам второго, третьего и последующих ярусов дерева Фейри, становятся все более узкими. Различить их удастся только там, где они наиболее широки, т. е. вблизи критической линии  $l_{xp}^T$  (показана на рис. 1 штрихом), на которой число вращения  $\Theta$  перестает быть однозначным, а тор разрушается с образованием квазиаттрактора  $CA^T$ .

Анализ модельного отображения окружности предсказывает универсальность поведения резонансных областей на критической линии в окрестности иррационального числа вращения  $\Theta$ . Она состоит в том, что для ширины клювов справедливо соотношение

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n-1} - Q_n}{Q_n - Q_{n+1}}, \quad (2)$$

где  $Q_n$  — ширина клюва, соответствующего аппроксимации рассматриваемого иррационального числа  $\Theta$   $n$ -ым членом последовательности рациональных чисел,

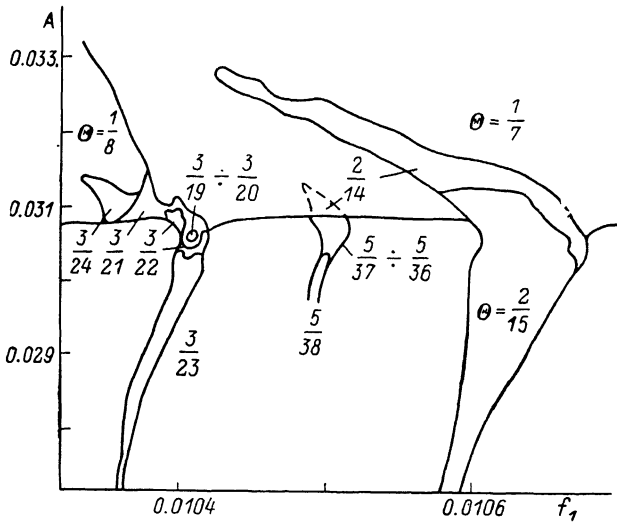


Рис. 2. Фрагмент диаграммы (рис. 1) в увеличенном масштабе.

сходящейся к  $\Theta$  при  $n \rightarrow \infty$ . Число  $\delta$  является универсальной константой (для различных конкретных видов отображения окружности) и зависит только от числа вращения  $\Theta$ . Так, для золотого сечения оно равно  $\delta_g = 2.833 \dots$ , для серебряного сечения  $\delta_s = 6.799 \dots$ .

Для резонансных клювов (рис. 1, 2) 2 : 15, 3 : 23 и 5 : 38 расчет дал  $\delta = 6.25 \pm \pm 0.5$ . Эти резонансы служат аппроксимациями серебряного сечения отрезка, построенного на основаниях клювов 1 : 7 и 1 : 8. Поэтому найденная величина может сопоставляться с  $\delta_s$ . Результат сопоставления вполне удовлетворителен.

Согласно результатам, полученным для модельного отображения [9], множество пробелов между резонансными клювами, на критической линии  $l_{xp}^T$  дополняющее множество последних до нормированной лебеговой меры 1, является канторовым. Оно имеет меру 0 и фрактальную размерность  $D$ , являющуюся универсальной константой. В окрестности золотого сечения  $D = D_g = 0.867 \dots$ . Для вычисления  $D$  предложена формула

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i [R_i(n)]^{D^{(*)}} = 1, \quad (3)$$

где  $R_i(n) = S_i(n) (\bar{S}(n))^{-1}$ ,  $\bar{S}(n)$  — длина пробела между резонансами  $a : b$  и  $c : d$  на  $n$ -м ярусе дерева Фейри,  $i=1, 2$  — длины пробелов между каждым из этих резонансов и их медиантой  $(a+c) : (b+d)$ .

Расчет пробелов для резонансов 1 : 7, 1 : 8, 2 : 15 системы (1) дал оценку  $D=0.95$ , для резонансов 1 : 8, 2 : 15, 3 : 23 —  $D=0.94$ , для резонансов 2 : 15, 3 : 23, 5 : 38 —  $D=0.92$ . Точность этих оценок  $\pm 0.05$ . Совпадение с теоретическим значением можно признать неплохим, поскольку рассмотрены только первые ярусы дерева Фейри, причем аппроксимирующие значения  $\Theta$ , не являющиеся золотым сечением.

Независимость фрактальной размерности множества иррациональных значений числа вращения вблизи критической линии от конкретного выбора дерева Фейри означает глобальную универсальность этого свойства. Доказательство этого проведено в [9] методом ренорм-группы и опирается на следующую простую идею. Для чисел Фейри некоторого яруса  $a : b, c : d$  всегда можно выбрать перенормировку пробела между соответствующими им клювами так, чтобы  $a : b \rightarrow 0 : 1, c : d \rightarrow 1 : 1, (a+c) : (b+d) \rightarrow 1 : 2, (a+2c) : (b+2d) \rightarrow 2 : 3$  и т. д., что переводит рассматриваемое дерево Фейри в аппроксимирующее (начиная с некоторого яруса) золотое сечение. После этого на него обоснованно можно переносить выводы о локальной универсальности фрактальной размерности, полученные для окрестности золотого сечения.

Динамика в области выше критической линии разрушения тора изучена недостаточно даже для модельного отображения окружности. Для нее характерно сосуществование в фазовом пространстве системы счетного множества устойчивых и седловых предельных циклов, а также непритягивающих хаотических траекторий, обеспечивающих явление метастабильного хаоса. Вдали от резонансов, соответствующих первым ярусам дерева Фейри, там, где существуют устойчивые циклы только очень большого периода и с очень узкими бассейнами притяжения, динамика системы является практически хаотической (это область так называемого квазиаттрактора  $CA^T$ ). Устойчивые резонансные циклы могут претерпевать различные последовательности бифуркаций: фейгенбаумовский каскад удвоенный или рождение вторичных биений, что в свою очередь чрезвычайно усложняет структуру закритической области [15]. Численный анализ описанных явлений встречает большие трудности. Однако исследование сечений фазовых траекторий системы (1) позволило установить наличие бифуркаций рождения торов из резонансных циклов большого периода. Исследовались также хаотические решения системы (1). К сожалению, существующие методы оценки размерности аттракторов через ляпуновские показатели или через корреляционный интеграл для 14-мерной неавтономной системы (1) не позволяют получить результат с точностью, достаточной для проверки количественной закономерности в поведении размерности тор-аттрактора, предсказанной в [18].

## 2. Исследование перехода тор $\rightarrow$ хаос в неавтономном генераторе с инерционной нелинейностью

Динамика неавтономного ГИН при вариации параметров была рассмотрена в [15, 16] и описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz + \mathcal{E}_0 \sin p\tau, & \dot{y} &= -x, & \dot{z} &= -gz + gI(x)x^2, \\ & & & & p &= 2\pi f_1, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $m, g$  — управляющие параметры ГИН ( $m$  — параметр возбуждения,  $g$  — параметр инерционности);  $I(x)$  — функция Хевисайда;  $\mathcal{E}_0, f_1$  — безразмерные амплитуда и частота внешнего воздействия.

В физическом эксперименте значение параметра  $m$  фиксировалось таким, чтобы ему соответствовал однократный предельный цикл автономного ГИН с основной частотой  $f_0$ . При введении внешнего воздействия  $\mathcal{E}_0 \sin 2\pi f_1$  в системе возникают двухчастотные колебания. Соотношением частот  $f_0$  и  $f_1$  можно управлять, меняя частоту воздействия  $f_1$ .

На рис. 3 представлен фрагмент снятой экспериментально бифуркационной диаграммы режимов неавтономного генератора на плоскости параметров  $f_1 - \mathcal{E}_0$ . В эксперименте удалось наблюдать резонансные клювы с числами вращения  $\Theta = 3 : 4, 2 : 3, 1 : 2, 2 : 5, 1 : 3, 1 : 4$ , где  $\Theta$  определялось по формуле

$$\Theta = \Delta_0 / f_1, \quad \Delta_0 = f_0 - f_1, \quad f_0 > f_1. \quad (5)$$

Зоны более слабых резонансов с помощью использованной в эксперименте аппаратуры практически не наблюдались. В областях некоторых резонансов регистрировались бифуркации рождения вторичных биений при потере устойчивости резонансным циклом на линии нейтральности  $l'_0$  [15, 16]. Направления движения  $P_1$  и  $P_2$  на плоскости параметров (рис. 3) соответствуют фиксированным числам вращения, равным золотому  $\Theta_g$  и серебряному  $\Theta_s$  сечениям.

Грубая оценка константы  $D$  (3), полученная измерением длины пробелов между резонансами  $1:2, 3:4, 2:3$  (в окрестности  $\Theta = \Theta_g$ ), дала близкий к предсказанному теорией результат:  $D \approx 0.78$ . . . . Для пробелов между резонансами  $1:2, 1:3, 2:5$  (в окрестности  $\Theta = \Theta_s$ ) получилось  $D \approx 0.86$ . . . . Полное соответствие теории объясняется здесь скорее случайным совпадением, так как выбранные резонансы низкого порядка ( $n$  мало) и точность измерения границ резонансных областей невелика. Кроме того, криволинейная граница  $l'_{кр}$  аппроксимировалась ломаной. Однако ясно, что близость полученных экспериментально оценок  $D$  к теоретическому значению не случайна.

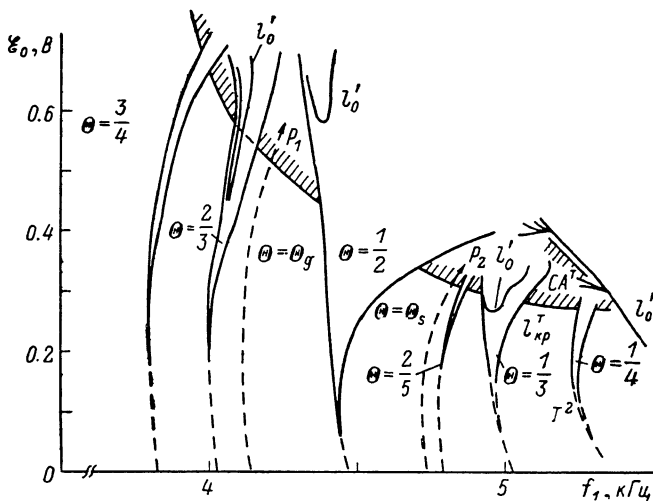


Рис. 3. Диаграмма режимов системы (4) на плоскости управляющих параметров  $f_1 - \epsilon_0$ ,  $g=0.3$ .

В [10] методом ренорм-группы было показано, что спектр мощности отображения окружности в критической точке обладает рядом универсальных свойств. Характер спектра определяется значением числа вращения  $\Theta$ . Если  $\Theta$  можно представить в виде периодической цепной дроби, то спектр обладает свойством масштабной инвариантности. Наиболее простым разложением в периодическую цепную дробь характеризуется золотое сечение  $\Theta = \Theta_g = 0.5 (\sqrt{5}-1) = \langle 1, 1, 1, 1 \dots \rangle$ . В этом случае приведенные частоты спектральных линий  $\nu = f/f_1$  в интервале  $[0; 1]$  удовлетворяют соотношению

$$\nu = |n_2 \Theta_g - n_1|, \quad n_2 > n_1, \quad (6)$$

где  $n_2, n_1$  — последовательные члены одного из рядов Фибоначчи. Так, для главной спектральной серии, содержащей линии наибольшей амплитуды,  $n_2, n_1$  — последовательные числа основного ряда Фибоначчи с основанием (1, 1). Далее спектральные серии, расположенные в порядке убывания амплитуд спектральных линий, соответствуют рядам Фибоначчи с основаниями: 2 серия — (2, 2), 3 — (1, 3), 4 — (3, 3), 5 — (1, 4), 6 — (2, 5) и т. д. Спектральная мощность для линий каждой серии  $S_i^j$  пропорциональна квадрату частоты

$$S_i^j = C_i \nu^2(j), \quad (7)$$

где  $i$  — номер серии,  $j$  — номер линии данной серии. Для линий каждой серии отношение  $S_i^j/\nu^2(j)$  при больших  $j$  постоянно (практически для отображения окружности оно становится постоянным уже при  $j \geq 3$ ).

Представлялось интересным исследовать количественные соотношения в спектре мощности колебаний при разрушении двухчастотных биений в реальной потоковой динамической системе. В этих целях ГИН с внешним гармоническим воздействием представлялся наиболее удобной моделью.

Экспериментально измерялись частоты спектральных линий в интервале  $[0, f_1]$  вблизи точки разрушения тора (вблизи линии  $L_{кр}^T$ ) при различных значениях параметра  $g$ . Результаты измерений приведены на рис. 4, а, б вместе с фото-

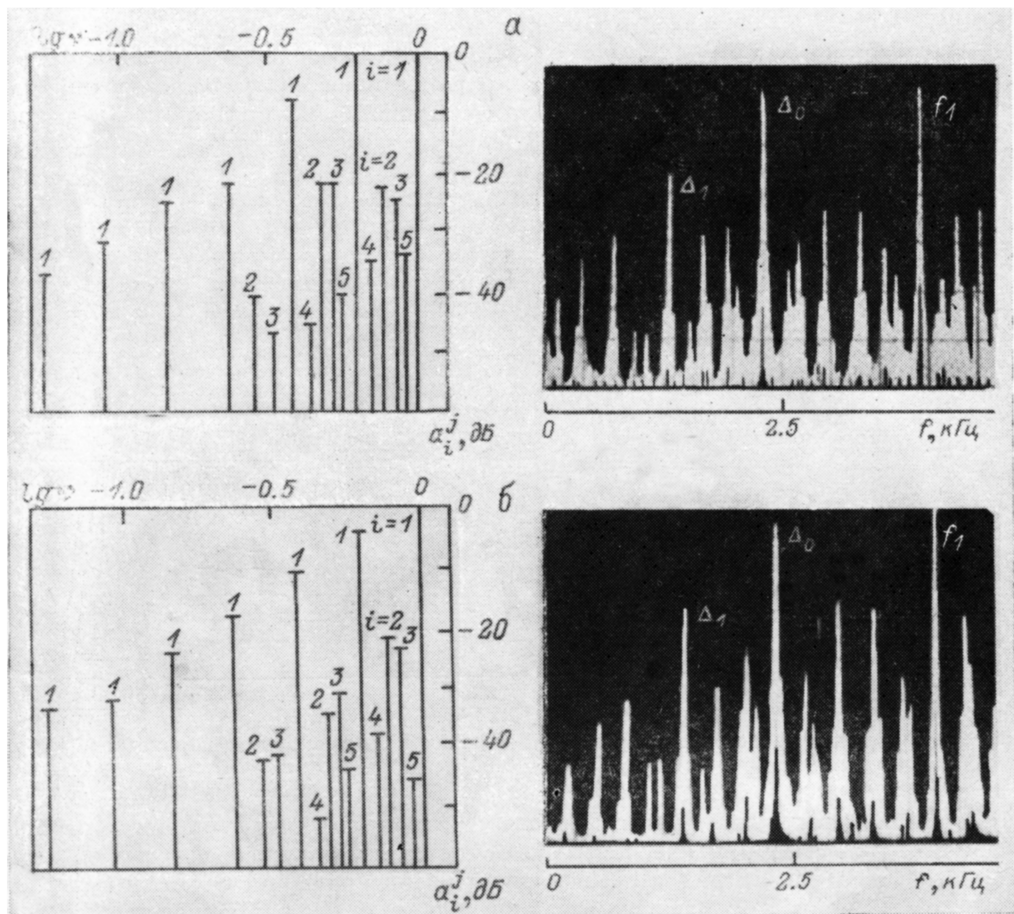


Рис. 4. Спектральные серии и фотографии соответствующих спектров с экрана спектра-анализатора для  $g=0.1$  (а) и  $0.4$  (б) (физический эксперимент).

тографиями соответствующих спектров на экране анализатора. Расположение спектральных линий по оси частот полностью соответствует теории. Что касается амплитуд спектральных линий  $a_i^j = 10 \lg (S_i^j / S_1^1 v^2)$ , то предсказанной закономерности не наблюдается. Отношение мощности к квадрату частоты для линий одной серии не остается постоянным, а убывает с уменьшением частоты. Характер поведения спектральных линий качественно не меняется при изменении  $g$ .

Чтобы сравнить результаты численного эксперимента с данными исследования математической модели (4), были проделаны расчеты спектра мощности вблизи перехода к тор-аттрактору  $CA^T$  при числе вращения, равном золотому сечению. Параметр инерционности выбирался равным 0.3. Параметр возбуждения  $m=0.7$ , что соответствует однократному предельному циклу в автономном генераторе. Амплитуда внешнего воздействия увеличивалась до значения, близкого к критическому. Расчет проводился при  $\varepsilon_0=0.24$ ,  $p=2\pi f_1=0.62192$  ( $f_1$  — нормированная частота).

На рис. 5 приведены результаты численного эксперимента;  $a$  — спектр потока  $S_f^E$ ,  $b$  — спектр отображения  $S_f^M$  в сечении потока плоскостью  $x=0$ ,  $c$  — инвариантная замкнутая кривая в сечении тора в момент разрушения. Как видно из рис. 5,  $a$ , спектр потока не дает достаточной информации для анализа спектральных линий. Возникла необходимость перейти к рассмотрению спектра отображения (рис. 5,  $b$ ).

В силу ограниченности памяти ЭВМ оказалось невозможным построить спектр отображения в диапазоне, включающем частоту внешнего воздействия  $f_1$ . Поэтому пришлось ограничиться интервалом  $[0; \Delta_0]$  и взять в качестве базиса

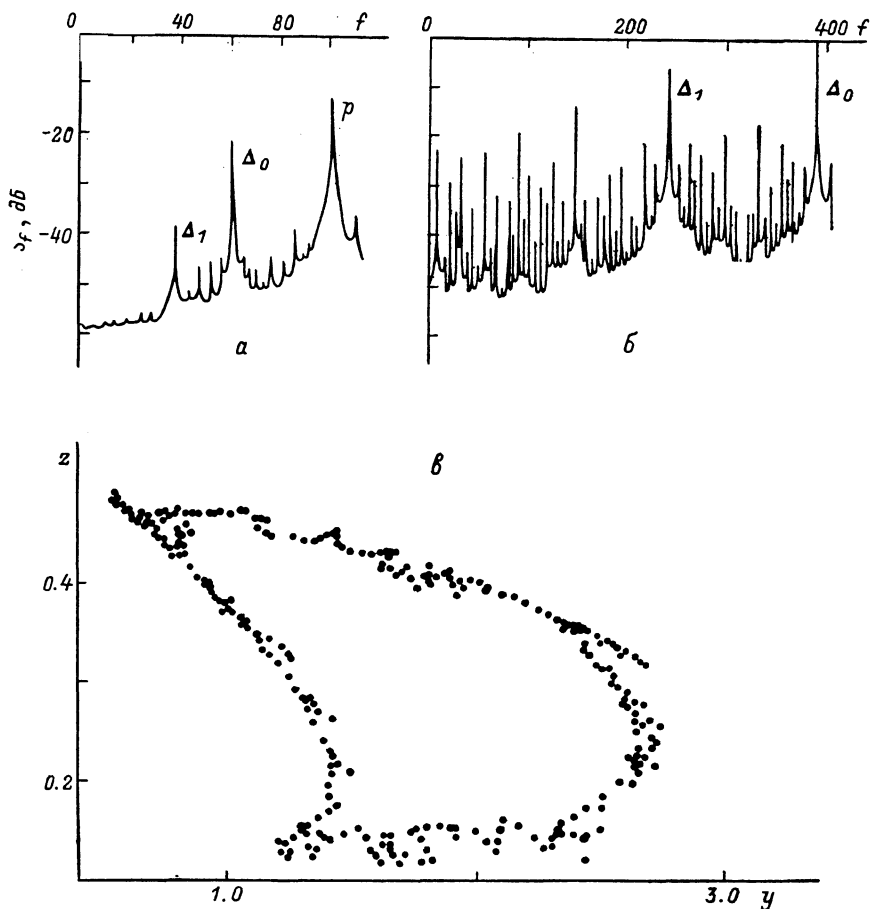


Рис. 5. Результаты численного исследования системы (4) вблизи критической точки ( $g=0.3$ ,  $m=0.7$ ,  $\varepsilon_0=0.24$ ,  $p=0.62192$ ).

$a$  — спектр мощности потока,  $b$  — спектр мощности отображения  $y_{n+1}=M(y_n)$  в секущей плоскости  $x=0$ ,  $c$  — вид сечения.

вых частот  $\Delta_0$  и  $\Delta_1=f_1-\Delta_0$ , отношение которых также равно золотому сечению (так как это частоты соседних линий основной спектральной серии). С целью более детального сравнения результатов численного и физического экспериментов последний был повторен при  $g=0.3$  и в соответствующем диапазоне частот  $[0, \Delta_0]$ . В таблице приведены полученные результаты и оценка погрешности измерений частоты  $\pm\delta_1$  и амплитуды  $\pm\delta_2$  спектральных линий. В целях исключения систематической ошибки, связанной с неточным заданием числа вращения  $\Theta_x$ , учтены те спектральные линии, приведенные частоты которых отличаются от теоретических значений не более чем на оцененную погрешность измерений.

Более наглядно результаты представлены на рис. 6. Характер экспериментально полученного спектра (рис. 6,  $a$ ) тот же, что и на рис. 4. Амплитуды спектральных линий  $a_j^E$  уменьшаются при движении в область низких частот. Это явление не может быть объяснено погрешностью измерений в силу монотонного

$f, \text{кГц}$	$\nu = \frac{f}{\Delta_0}$	$\pm \delta_1$	$ n_2 \theta_g - n_1 $	$i$	$\lg \nu$	$\pm \delta (\lg \nu)$	$a_{ij}^{\pm}$ , дБ	$\pm \delta_2$ , дБ
<b>Физический эксперимент</b>								
0.240	0.092	0.002	$\theta_g^5 = (5\theta_g - 3) \approx 0.090$	1	-1.040	0.010	-31	3
0.380	0.146	0.002	$\theta_g^4 =  3\theta_g - 2  \approx 0.146$	1	-0.840	0.007	-19	3
0.610	0.234	0.002	$\theta_g^3 = (2\theta_g - 1) \approx 0.236$	1	-0.631	0.004	-13	3
0.765	0.294	0.002	$ 6\theta_g - 4  \approx 0.292$	2	-0.532	0.004	-40	3
0.850	0.326	0.003	$(7\theta_g - 4) \approx 0.326$	3	-0.487	0.003	-40	3
0.990	0.380	0.003	$\theta_g^2 =  \theta_g - 1  \approx 0.382$	1	-0.420	0.003	-6	3
1.230	0.472	0.003	$(4\theta_g - 2) \approx 0.472$	2	-0.326	0.003	-41	3
1.375	0.528	0.003	$  4\theta_g - 3  \approx 0.528$	3	-0.277	0.002	-42	3
1.610	0.618	0.003	$\theta_g \approx 0.618$	1	-0.209	0.002	-2	3
1.995	0.766	0.003	$ 2\theta_g - 2  \approx 0.764$	2	-0.116	0.002	-26	3
2.220	0.852	0.004	$(3\theta_g - 1) \approx 1.854$	3	-0.070	0.002	-32	3
2.605	1.000	0.004	$\theta_g^0 \approx 1$	1	0.000	0.002	0	3
<b>Численный счет</b>								
23	0.059	0.003	$\theta_g^6 =  8\theta_g - 5  \approx 0.056$	1	-1.230	0.020	-4	5
35	0.090	0.003	$\theta_g^5 = (5\theta_g - 3) \approx 0.090$	1	-1.040	0.010	-2	5
57	0.146	0.003	$\theta_g^4 =  3\theta_g - 2  \approx 0.146$	1	-0.840	0.010	-5	5
69	0.177	0.003	$(10\theta_g - 6) \approx 0.180$	2	-0.750	0.007	-16	5
80	0.205	0.003	$ 11\theta_g - 7  \approx 0.202$	3	-0.690	0.007	-18	5
92	0.235	0.003	$\theta_g^3 = (2\theta_g - 1) \approx 0.236$	1	-0.630	0.006	-6	5
115	0.294	0.003	$ 6\theta_g - 4  \approx 0.292$	2	-0.530	0.005	-12	5
127	0.325	0.003	$(7\theta_g - 4) \approx 0.326$	3	-0.490	0.005	-13	5
150	0.384	0.004	$\theta_g^2 =  \theta_g - 1  \approx 0.382$	1	-0.416	0.004	-4	5
172	0.440	0.004	$ 9\theta_g - 6  \approx 0.438$	4	-0.357	0.004	-24	5
184	0.471	0.004	$(4\theta_g - 2) \approx 0.472$	2	-0.327	0.003	-20	5
207	0.529	0.004	$ 4\theta_g - 3  \approx 0.528$	3	-0.277	0.003	-29	5
219	0.560	0.004	$(9\theta_g - 5) \approx 0.562$	5	-0.252	0.003	-15	5
242	0.619	0.004	$\theta_g \approx 0.618$	1	-0.208	0.003	-1	5
276	0.706	0.004	$(6\theta_g - 3) \approx 0.708$	4	-0.151	0.003	-21	5
299	0.765	0.005	$(2\theta_g - 2) \approx 0.764$	2	-0.116	0.003	-16	5
334	0.854	0.005	$(3\theta_g - 1) \approx 0.854$	3	-0.068	0.002	-14	5
357	0.913	0.005	$  5\theta_g - 4  \approx 0.910$	5	-0.040	0.002	-21	5
391	1.000	0.005	$\theta_g^0 \approx 1$	1	0.000	0.002	0	5

характера изменения амплитуд. Кроме того, перепад амплитуд спектральных линий значительно превышает погрешность измерений. Характер спектра, полученного численно (рис. 6, б), иной. Амплитуды  $a_{ij}^{\pm}$  не убывают с уменьшением частоты. Они колеблются около некоторого постоянного уровня, причем разброс их значений невелик и сравним с погрешностью измерений (5 дБ). Последнее более соответствует выводам теории, чем результаты физических экспериментов. Амплитуды 2 и 3 серий в физическом эксперименте ниже амплитуд линий основной серии в среднем на 30 дБ, в то время как в численном на 15 дБ.

Расхождение результатов физического и численного экспериментов можно объяснить тем, что первые относятся к спектру потока, а вторые к спектру отображения. Переход от потоковой системы к отображению связан с нелинейным преобразованием спектра, индивидуальным для каждой конкретной динамической системы. Кроме того, как показывают численные исследования [19], даже для одномерных отображений соотношение амплитуд спектральных линий зависит от формы отображаемой кривой. Инвариантная замкнутая кривая в сечении конкретной динамической системы имеет свой особый характер искажений на пути к разрушению. Чтобы преобразовать эту кривую в окружность, требуется в свою очередь некоторая нелинейная (а в критической точке и негладкая) замена координат. Соответственно амплитуды спектральных линий также претерпевают нелинейное преобразование. Инвариантная кривая в сечении



рассматриваемой динамической системы (4) в момент разрушения весьма далека от окружности (рис. 5, *в*). Поэтому можно предполагать, что отличие спектра на рис. 6, *б* от спектра отображения окружности объясняется не только погрешностью вычисления амплитуд спектральных линий, сколько искажением формы инвариантной кривой в сечении.

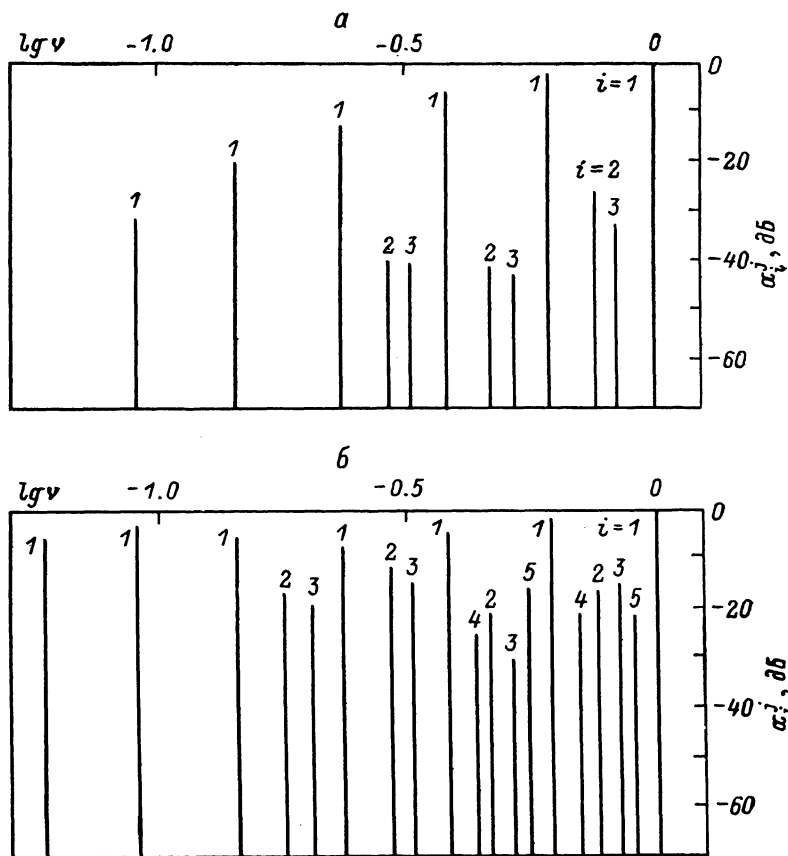


Рис. 6. Спектральные серии при  $g=0.3$ . Сравнение результатов эксперимента (а) и численного счета (б).

Таким образом, чтобы перейти от спектра конкретной динамической системы в момент разрушения тора при  $\Theta=\Theta_c$  к универсальному спектру отображения окружности в себя, необходимо проделать некоторое нелинейное преобразование амплитуд спектральных составляющих для каждой конкретной системы. Что касается частотных соотношений при  $\Theta=\Theta_c$ , то они хорошо наблюдаются на любых моделях, так как полностью определяются значением числа вращения.

### Заключение

Представленные результаты экспериментов свидетельствуют о том, что ряд универсальных свойств одномерных отображений окружности сохраняется и для дифференциальных систем. Наиболее четкое соответствие имеет место в отношении спектрального состава колебаний в критической точке для числа вращения  $\Theta=\Theta_c$ . Данные теории и эксперимента совпадают в рамках относительно высокой точности спектральных измерений. Хорошее совпадение с теорией можно констатировать и в отношении фрактальной размерности канторова множества иррациональных значений числа вращения вблизи критической линии потери гладкости тором  $L_{\text{кр}}^x$  ( $D=0.867 \pm 0.08$ , где  $0.867 \dots$  — результат теории).

Глобальная структура расположения областей резонансов на плоскости управляющих параметров, как следует из приведенных результатов, также соответствует теоретически описанной и определяется правилам Фейри. Универсальной, по-видимому, является геометрическая структура резонансных областей вблизи критической линии  $I_{гр}^T$ , определяемая соотношением (2). Нужно отметить, что приведенные итоговые результаты являются важными и далеко не очевидными. Дело в том, что между отображением в сечении Пуанкаре и потоком взаимосвязь принципиально неважнооднозначна. Именно в силу последнего обстоятельства масштабная инвариантность амплитудных соотношений в спектре квазипериодических колебаний не подтверждается для дифференциальных систем, хотя для одномерных отображений окружности она безусловно имеет место.

#### Литература

- [1] *Афраймович В. С., Шильников Л. П.* Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1983, с. 3—26.
- [2] *Aronson D. O., Chory M. A., Hall G. R., McGehee R. P.* Comm. Math. Phys., 1982, v. 83, N 3, p. 303—354.
- [3] *Gollub J. P.; Benson S. V. J.* Fluid. Mech., 1980, v. 100, Pt 3, p. 449—470.
- [4] *Львов В. С., Предтеченский А. А.* Нелинейные волны. Горький, 1980, с. 57—77.
- [5] *Franceschini V.* Physica, 1983, v. 3D, N 3, p. 285—304.
- [6] *Kaneko K.* Progr. Theor. Phys., 1983, v. 69, N 5, p. 1427—1442.
- [7] *Анищенко В. С.* ЖТФ, 1986, т. 56, № 2, с. 225—237.
- [8] *Feigenbaum M. J., Kadanoff Z. P., Shenker S. J.* Physica, 1982, v. 50, N 2, p. 370—386.
- [9] *Cvitanovic P., Jensen M. H., Kadanoff Z. P., Pracaccia I.* Phys. Rev. Lett., 1985, v. 55, N 4, p. 343—346.
- [10] *Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E.* Physica, 1983, v. 80, N 3, p. 303—342.
- [11] *Stovans J., Heslot F., Libchaber A.* Phys. Rev. Lett., 1985, v. 55, N 6, p. 596—599.
- [12] *Дмитриев А. С., Панас А. И.* ЖТФ, 1986, т. 56, № 9, с. 1864—1867.
- [13] *Alstrom P., Levinsen M. T.* Phys. Rev., 1985, v. 32B, N 3, p. 1503—1511.
- [14] *Сонечкин Д. М.* Стохастичность в моделях общей циркуляции атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1984. 280 с.
- [15] *Анищенко В. С.* Стохастические колебания в радиофизических системах. Саратов, 1986, ч. 2: 198с.
- [16] *Анищенко В. С., Летчфорд Т. Е., Сафонова М. А.* Изв. вузов. Радиофизика, 1985, т. 28, № 9, с. 1112—1125.
- [17] *Allen T.* Physica, 1983, v. 6D, N 3, p. 305—320.
- [18] *Jensen M. H., Pracaccia I.* Phys. Rev., 1985, v. 32A, N 2, p. 1225—1228.
- [19] *Antoranz J. C., Mori H.* Physica, 1985, v. 16D, N 2, p. 184—202.

Саратовский государственный  
университет им. Н. Г. Чернышевского

Поступило в Редакцию  
9 марта 1987 г.