

УДК 533.537.3

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ УБИТРОНОВ С ЭЛЕКТРОННЫМИ ПУЧКАМИ, СФОРМИРОВАННЫМИ В АДИАБАТИЧЕСКИ НАРАСТАЮЩЕМ ПОЛЕ ОНДУЛЯТОРА И ОДНОРОДНОМ ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Н. С. Гинзбург, Н. Ю. Песков

Для релятивистских убитронов с комбинированным — винтовым ондуляторным и однородным продольным — магнитным полем получены усредненные уравнения, описывающие движение частиц в режимах ондуляторного и комбинационного синхронизма электронов с электромагнитным полем. Показано, что если невозмущенное движение электронов в ондуляторном поле происходит по стационарной винтовой траектории, то при взаимодействии с волной в режиме ондуляторного синхронизма электроны остаются на равновесной траектории, параметры которой плавно эволюционируют в соответствии с изменением энергии электронов. В то же время излучение на комбинационных синхронизмах сопровождается раскачкой осциллирующий электронов около равновесной траектории. Для таких синхронизмов прослежена аналогия с МЦР, работающими в области аномального и нормального эффекта Доплера.

В настоящее время значительное внимание уделяется теоретическому и экспериментальному исследованию релятивистских убитронов с комбинированным — винтовым ондуляторным и однородным продольным — магнитным полем [1-10]. Электронно-оптическая система таких устройств содержит участок с адиабатически нарастающим ондуляторным полем, на котором осуществляется раскачка баунс-осциллирующий электронов [3, 4]. Взаимодействие электронов с электромагнитным полем включается в области, где амплитуда ондуляторного поля принимает постоянное значение и электроны движутся по стационарным винтовым траекториям с постоянной продольной скоростью или совершают малые колебания около таких траекторий. При этом возможны три типа резонансов электронов с электромагнитным полем [10]

$$\omega - hv_{\parallel} = \omega_b, \quad \omega - hv_{\parallel} = \omega_b + \Omega, \quad \omega - hv_{\parallel} = \omega_b - \Omega, \quad (1)-(3)$$

где ω , $h(\omega)$ — частота и продольное волновое число синхронной электромагнитной волны; v_{\parallel} — поступательная скорость электронов; $\omega_b = 2\pi v_{\parallel}/d$ — баунс-частота; d — период ондулятора; Ω — частота малых колебаний электронов около стационарной траектории (см. ниже формулу (13)).

Данная работа посвящена нелинейной теории генераторов с резонансными электродинамическими системами, помещенными в области постоянной амплитуды ондуляторного поля. Предполагается, что на длине пространства взаимодействия l число медленных осцилляций электронов с частотой Ω велико

$$N = \frac{\Omega l}{2\pi v_{\parallel}} \gg 1. \quad (4)$$

В таких условиях резонансы (1)–(3) разрешены (отсутствует перекрытие полос реабсорбции) и возможно получение генерации на каждом резонансе в отдельности. С другой стороны, выполнение соотношения (4) позволяет произвести усреднение уравнений движения по периоду $2\pi/\Omega$ и получить укороченные

уравнения, описывающие взаимодействие электронов с волной в условиях синхронизмов (1)–(3), использование которых существенно упрощает нелинейный анализ.

1. Уравнения движения электронов

Предположим, что электроны движутся вблизи оси винтового ондулятора, где переменная составляющая магнитного поля имеет круговую поляризацию

$$\mathbf{H}_u = H_u(x_0 \cos h_u z + y_0 \sin h_u z). \quad (5)$$

Поле электромагнитной волны также будем считать циркулярно-поляризованным и заданным вектор-потенциалом

$$\mathbf{A} = A_s(x_0 \cos(\omega_s t - h_s z) + y_0 \sin(\omega_s t - h_s z)). \quad (6)$$

Уравнения движения электронов в полях (5), (6) и однородном продольном магнитном поле $\mathbf{H}_0 = H_0 z_0$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \frac{dp_+}{dz} - \frac{if}{p_{\parallel}} p_+ &= i\alpha_s (\beta_{\parallel}^{-1} - 1) e^{i\theta_s} - i\alpha_u e^{iZ}, \\ \frac{d\gamma}{dZ} &= -\operatorname{Re} \left[i \frac{p_+^*}{p_{\parallel}} \alpha_s e^{i\theta_s} \right], \quad \frac{d\theta_s}{dZ} = g (\beta_{\parallel}^{-1} - 1), \end{aligned} \quad (7)$$

где использованы безразмерные переменные: $p_+ = (p_x + ip_y)/mc$, $p_{\parallel} = p_z/mc$, p_x, y, z — декартовы компоненты импульса электрона, $Z = h_u z$, $\alpha_s = eA_s h_s / mc^2 h_u$, $\alpha_u = eH_u / mc^2 h_u$, $f = \omega_s / h_u c$, $\omega_{H_0} = eH_0 / mc$ — нерелятивистская гирочастота, $g = \omega / h_u c$, $\gamma = E / mc^2$, E — энергия электрона, $\beta_{\parallel} = p_{\parallel} / \gamma$, $\theta_s = \omega_s t - h_s z$.

Далее удобно перейти к новым переменным

$$p_1 = |p_+| \cos Z, \quad p_2 = |p_+| \sin Z, \quad \vartheta = \theta_s - Z,$$

преобразовав уравнения (7) к форме [10]

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dZ} &= p_2 \left(1 - \frac{f}{p_{\parallel}} \right) - \alpha_s (\beta_{\parallel}^{-1} - 1) \sin \vartheta, \\ \frac{dp_2}{dZ} &= -\alpha_u - p_1 \left(1 - \frac{f}{p_{\parallel}} \right) + \alpha_s (\beta_{\parallel}^{-1} - 1) \cos \vartheta, \\ \frac{d\gamma}{dZ} &= -\frac{\alpha_s}{p_{\parallel}} (p_1 \sin \vartheta - p_2 \cos \vartheta), \\ d\vartheta/dZ &= g (\beta_{\parallel}^{-1} - 1) - 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Продольный импульс электрона связан с энергией и поперечным импульсом соотношением

$$p_{\parallel} = \sqrt{\gamma^2 - 1 - p_1^2 - p_2^2}.$$

Рассмотрим предварительно движение электрона в отсутствие сигнальной волны ($\alpha_s = 0$). Это движение описывается уравнениями

$$\frac{dp_1}{dZ} = p_2 \left(1 - \frac{f}{p_{\parallel}} \right), \quad \frac{dp_2}{dZ} = -\alpha_u - p_1 \left(1 - \frac{f}{p_{\parallel}} \right). \quad (9)$$

При постоянной амплитуде ондуляторного поля $\alpha_u = \text{const}$ уравнения (9) имеют первый интеграл

$$\mathcal{H} = -\alpha_u p_1 - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - f p_1,$$

определяющий траектории электрона на фазовой плоскости $p_{1,2}$ (рис. 1).

Координаты состояний равновесия определяются соотношениями

$$p_{2*} = 0, \quad p_{1*} \left(\frac{f}{\sqrt{\gamma^2 - 1 - p_{1*}^2}} - 1 \right) = \alpha_u. \quad (10)$$

Зависимости $p_{1*}(f)$ приведены на рис. 2. При малых напряженностях продольного магнитного поля существуют три состояния равновесия (рис. 1, а), а при больших напряженностях — одно состояние равновесия (рис. 1, б). Для определения устойчивости состояний равновесия, представляя импульс в виде $P_1 = P_{1*} + \hat{p}_1$, $P_2 = \hat{p}_2$, линеаризуем уравнения (10)

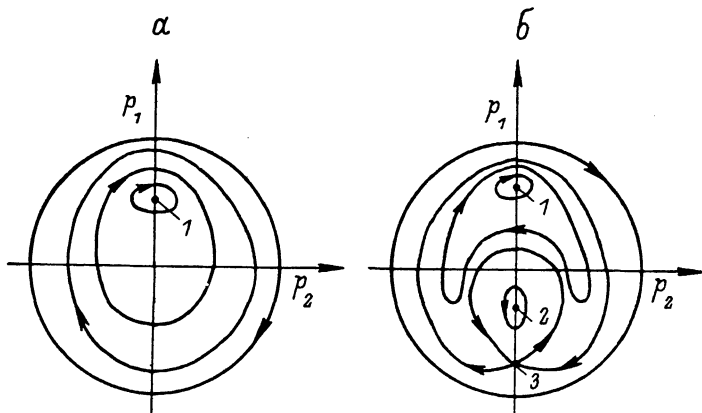


Рис. 1. Траектории электрона на фазовой плоскости (p_1 ; p_2) в случае большой $f > f_{cr}$ (а) и малой $f < f_{cr}$ (б) величины однородного магнитного поля.

$$\frac{d\hat{p}_1}{dZ} = \hat{p}_2 \left(1 - \frac{f}{p_{1*}}\right), \quad \frac{d\hat{p}_2}{dZ} = -\hat{p}_1 \left(1 - \frac{f}{p_{1*}} - \frac{fp_{1*}^2}{p_{1*}^3}\right), \quad (11)$$

где $\hat{p}_{1,2}$ — малые отклонения импульса от равновесного значения,

$$p_{1*} = \sqrt{\gamma^2 - 1 - p_{1*}^2} \quad (12)$$

— величина продольного импульса в состоянии равновесия. Записывая решение (11) в виде

$$\hat{p}_{1,2} = \hat{p}_{1,2}^{(0)} e^{i\Gamma Z},$$

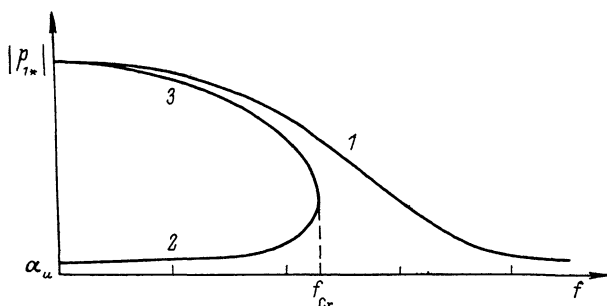


Рис. 2. Зависимость амплитуды поперечного импульса электрона на стационарной траектории от величины однородного магнитного поля f .

1, 2 — устойчивые состояния равновесия типа центр; 3 — неустойчивое состояние равновесия типа седло.

для показателя экспоненты получим

$$\Gamma = \sqrt{\left(1 - \frac{f}{p_{1*}}\right) \left(1 - \frac{f}{p_{1*}} - \frac{fp_{1*}^2}{p_{1*}^3}\right)}. \quad (13)$$

Согласно (10), (13), состояние равновесия, лежащее на ветви 3 рис. 2, неустойчиво (комплексные Γ), в то время как состояния равновесия на ветвях 1 и 2 устойчивы (действительные Γ). Этим устойчивым состояниям равновесия типа центр соответствует движение электрона по стационарной винтовой траектории. Соотношение (13) определяет входящую в условия синхронизмов (2), (3) частоту малых колебаний электрона около равновесной траектории.

Исследования движения электронов в секции адиабатической раскочки (см., например, [10]) показывают, что в области $\alpha_u = \text{const}$ в устойчивом состоянии равновесия 1 при $f \geq \sqrt{\gamma^2 - 1}$ или 2 при $f < \sqrt{\gamma^2 - 1}$ окажутся электроны, которые не имели начального поперечного импульса. Электроны, имевшие малый поперечный импульс, будут совершать малые колебания около указанных состояний равновесия. Причиной возникновения колебаний электронов может быть также слишком резкое (неадиабатическое) включение ондуляторного поля.

Анализ взаимодействия электронного пучка с электромагнитной волной проведем в предположении, что в поле ондулятора электроны находятся в состоянии устойчивого равновесия, или совершают малые колебания около этих состояний. Допустим также, что амплитуда сигнальной волны достаточно мала

$$\alpha_s / \Gamma \gamma \ll 1, \quad (14)$$

так что изменение энергии электрона за период осцилляций $2\pi/\Omega$ невелико. В таких условиях целесообразно ввести понятие текущего (зависящего от энергии электрона) состояния равновесия, координата которого определяется соотношением (10), и представить поперечный импульс электрона в виде

$$p_1 = p_{1*}(\gamma) + \hat{p}_1, \quad p_2 = \hat{p}_2. \quad (15)$$

Рассматривая (15) как замену переменных в уравнениях (8) и считая, что отклонения от состояния равновесия, вызванные начальными колебаниями, а также воздействием сигнальной волны, не слишком велики $|\hat{p}_{1,2}| \ll |p_{1*}|$, после разложения правых частей уравнений в ряд по малым величинам $\hat{p}_{1,2}$ приведем уравнения (8) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{p}_1}{dZ} &= \hat{p}_2 \left(1 - \frac{f}{p_{1*}}\right) + F_1(\hat{p}_1; \hat{p}_2) - \frac{dp_{1*}}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dZ} - \alpha_s \left(\beta_{1*}^{-1} - 1 + \frac{\gamma p_{1*}}{p_{1*}^3} \hat{p}_1\right) \sin \vartheta, \\ \frac{d\hat{p}_2}{dZ} &= -\hat{p}_1 \left(1 - \frac{f}{p_{1*}} - \frac{fp_{1*}}{p_{1*}^3}\right) + F_2(\hat{p}_1; \hat{p}_2) + \alpha_s \left(\beta_{1*}^{-1} - 1 + \frac{\gamma p_{1*}}{p_{1*}^3} \hat{p}_1\right) \cos \vartheta, \\ \frac{d\gamma}{dZ} &= -\frac{\alpha_s}{p_{1*}} (\hat{p}_1 \sin \vartheta - \hat{p}_2 \cos \vartheta) - \frac{\alpha_s p_{1*}}{p_{1*}} \sin \vartheta - \frac{\alpha_s p_{1*}^2}{p_{1*}^3} \hat{p}_1 \sin \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dZ} &= g(\beta_{1*}^{-1} - 1) - 1 + g\gamma \left[\frac{p_{1*} \hat{p}_1}{p_{1*}^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{3p_{1*}^2 \hat{p}_1^2}{p_{1*}^3} + \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{p_{1*}^3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $\beta_{1*} = p_{1*}/\gamma$; функции $F_{1,2}$, характеризующие ангармоничность колебаний электрона около состояния равновесия, с точностью до кубических членов определяются соотношениями

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{\hat{p}_2 f}{p_{1*}^3} \left[p_{1*} \hat{p}_1 + \frac{3}{2} \frac{p_{1*}^2}{p_{1*}^3} \hat{p}_1^2 + \frac{1}{2} (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) \right], \\ F_2 &= \frac{\hat{p}_1 f}{p_{1*}^3} \left[p_{1*} \hat{p}_1 + \frac{3}{2} \frac{p_{1*}^2}{p_{1*}^3} \hat{p}_1^2 + \frac{1}{2} (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) \right] + \frac{p_{1*} f}{p_{1*}^3} \left[\frac{3}{2} \frac{p_{1*}^2 \hat{p}_1^2}{p_{1*}^3} + \frac{1}{2} (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \frac{p_{1*}}{p_{1*}^2} (\hat{p}_1 \hat{p}_2^2 + \hat{p}_1^3) + \frac{5p_{1*}^3 \hat{p}_1^3}{2p_{1*}^4} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (16) представляют собой уравнения нелинейного осциллятора, находящегося под воздействием внешней силы со стороны электромагнитного поля. Поэтому при $\alpha_s \neq 0$ решение этих уравнений следует искать методом вариаций произвольных постоянных, взяв в качестве опорного решение линеаризованной системы уравнений (11)

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= C_1(Z) \sin \chi + C_2(Z) \cos \chi, \\ \hat{p}_2 &= R(C_1(Z) \cos \chi - C_2(Z) \sin \chi), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\chi = \int_0^Z \Gamma dZ, \quad R = \sqrt{\left(1 - \frac{f}{p_{1*}} - \frac{fp_{1*}}{p_{1*}^3}\right) \left(1 - \frac{f}{p_{1*}}\right)^{-1}}.$$

Подставляя (18) в систему уравнений (16), приведем эту систему к эквивалентной форме, удобной для последующего усреднения

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dZ} = & -\alpha_s (\beta_{1*}^{-1} - 1) (\sin \vartheta \sin \chi - R^{-1} \cos \vartheta \cos \chi) - \frac{d\bar{p}_{1*}}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dZ} \sin \chi - \\ & - \frac{C_1}{R} \frac{dR}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dZ} \cos^2 \chi + \frac{C_2}{R} \frac{dR}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dZ} \cos \chi \sin \chi + F_1 \sin \chi + F_2 R^{-1} \cos \chi + \\ & + (C_1 \sin \chi + C_2 \cos \chi) (R^{-1} \cos \vartheta \cos \chi - \sin \vartheta \sin \chi) \alpha_s \frac{\gamma \bar{p}_{1*}}{P_{1*}^3}, \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_2}{dZ} = & -\alpha_s (\beta_{1*}^{-1} - 1) (\cos \vartheta \sin \chi R^{-1} + \sin \vartheta \cos \chi) - \frac{d\bar{p}_{1*}}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dZ} \cos \chi + \\ & + \frac{C_1}{R} \frac{dR}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dZ} \cos \chi \sin \chi - \frac{C_2}{R} \frac{dR}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dZ} \sin^2 \chi + F_1 \cos \chi - F_2 R^{-1} \sin \chi - \\ & - \alpha_s \frac{\gamma \bar{p}_{1*}}{P_{1*}^3} (C_1 \sin \chi + C_2 \cos \chi) (R^{-1} \cos \vartheta \sin \chi + \sin \vartheta \cos \chi), \end{aligned} \quad (19б)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dZ} = & -\frac{\alpha_s}{P_{1*}} \left[p_{1*} \sin \vartheta + \left(1 + \frac{p_{1*}^2}{P_{1*}^2} \right) \sin \vartheta (C_1 \sin \chi + C_2 \cos \chi) - \right. \\ & \left. - R \cos \vartheta (C_1 \cos \chi - C_2 \sin \chi) \right], \end{aligned} \quad (19в)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dZ} = & \frac{g\gamma}{P_{1*}} \left[1 + \frac{p_{1*}}{P_{1*}} (C_1 \sin \chi + C_2 \cos \chi) + \frac{1}{2p_{1*}^2} \left(1 + \frac{3p_{1*}^2}{P_{1*}^2} \right) (C_1 \sin \chi + \right. \\ & \left. + C_2 \cos \chi)^2 + \frac{R^2}{2p_{1*}^2} (C_1 \cos \chi - C_2 \sin \chi)^2 \right] - g - 1. \end{aligned} \quad (19г)$$

Для моноскоростного, не имеющего начальной модуляции электронного пучка, граничные условия к уравнениям (19) следующие:

$$C_{1,2}(0) = (C_0)_{1,2}, \quad \gamma(0) = \gamma_0, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0 \in [0, 2\pi).$$

2. Режим ондуляторного синхронизма

Предположим, что выполнено условие обычного ондуляторного синхронизма (1). В этом случае фаза ϑ является медленной, а фаза χ при выполнении соотношения (4) быстрой. Проводя усреднение уравнений (19) по этой фазе, приведем уравнения для поперечного импульса к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{C}_1}{dZ} = & \frac{d\bar{p}_{1*}}{d\gamma} \frac{\alpha_s}{2\bar{p}_{1*}} \left[\left(1 + \frac{\bar{p}_{1*}^2}{P_{1*}^2} \right) \bar{C}_1 \sin \bar{\vartheta} + \bar{R} \bar{C}_2 \cos \bar{\vartheta} \right] + \frac{1}{R} \frac{d\bar{R}}{d\gamma} \frac{\alpha_s \bar{p}_{1*}}{\bar{p}_{1*}} \frac{\bar{C}_1}{2} \sin \bar{\vartheta} - \\ & - \alpha_s \beta_{1*}^{-1} \frac{\bar{p}_{1*}}{2\bar{p}_{1*}^2} (\bar{C}_1 \sin \bar{\vartheta} - \bar{C}_2 \bar{R}^{-1} \cos \bar{\vartheta}) + Q (\bar{C}_2 \bar{C}_1^2 + \bar{C}_2^3), \\ \frac{d\bar{C}_2}{dZ} = & \frac{d\bar{p}_{1*}}{d\gamma} \frac{\alpha_s}{2\bar{p}_{1*}} \left[\left(1 + \frac{\bar{p}_{1*}^2}{P_{1*}^2} \right) \bar{C}_2 \sin \bar{\vartheta} - \bar{R} \bar{C}_1 \cos \bar{\vartheta} \right] - Q (\bar{C}_1 \bar{C}_2^2 + \bar{C}_1^3) + \\ & + \frac{1}{R} \frac{d\bar{R}}{d\gamma} \frac{\alpha_s \bar{p}_{1*}}{\bar{p}_{1*}} \frac{\bar{C}_2}{2} \sin \bar{\vartheta} - \alpha_s \beta_{1*}^{-1} \frac{\bar{p}_{1*}}{2\bar{p}_{1*}^2} (\bar{C}_2 \sin \bar{\vartheta} + \bar{C}_1 \bar{R}^{-1} \cos \bar{\vartheta}), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$Q = \frac{f\bar{R}}{8\bar{p}_{1*}^4} (3\bar{p}_{1*}^2 + \bar{p}_{1*}^2) + \frac{3f\bar{R}^3}{16\bar{p}_{1*}^3} + \frac{3f}{16\bar{R}\bar{p}_{1*}^4} (5\bar{p}_{1*}^4 + \bar{p}_{1*}^4 + 6\bar{p}_{1*}^2 \bar{p}_{1*}^2). \quad (21)$$

Для получения корректного усредненного уравнения для медленной фазы¹ необходимы также выражения для осцилляторных составляющих поперечного импульса

$$\bar{C}_1 = \frac{\alpha_s}{\bar{\Gamma}} \left[(\beta_{1*}^{-1} - 1) (\cos \chi \sin \bar{\vartheta} + \bar{R}^{-1} \cos \bar{\vartheta} \sin \chi) - \frac{d\bar{p}_{1*}}{d\gamma} \frac{\bar{p}_{1*}}{\bar{p}_{1*}} \sin \bar{\vartheta} \cos \chi \right],$$

¹ В уравнении для энергии учет осцилляторных составляющих поперечного импульса приводит к появлению членов порядка α_s^2 , которыми можно пренебречь. В то же время в уравнении для фазы после усреднения возникает дополнительный член, пропорциональный α_s , который входит аддитивно с малой начальной расстройкой синхронизма.

$$C_2 = \frac{a_s}{\Gamma} \left[(\beta_{1*}^{-1} - 1) (-\sin \chi \sin \vartheta + \bar{R}^{-1} \cos \vartheta \cos \chi) + \frac{d\bar{p}_{1*}}{d\gamma} \frac{\bar{p}_{1*}}{\bar{p}_{1*}} \sin \vartheta \sin \chi \right].$$

Подставляя в уравнения (19в), (19г) поперечный импульс в виде $C_{1,2} = \bar{C}_{1,2} + \bar{C}'_{1,2}$ и производя усреднение этих уравнений по быстрой фазе χ , получим

$$\frac{d\gamma}{dZ} = -\frac{a_s \bar{p}_{1*}}{\bar{p}_{1*}} \sin \vartheta, \quad (22a)$$

$$\frac{d\vartheta}{dZ} = g(\beta_{1*}^{-1} - 1) - 1 + \frac{\bar{\gamma} \bar{p}_{1*} a_s}{\bar{p}_{1*}^2 \bar{R} \Gamma} \cos \vartheta + (\bar{C}'_1 + \bar{C}'_2) \frac{g}{4\bar{p}_{1*}^2 \beta_{1*}} \left(1 + \frac{3\bar{p}_{1*}^2}{\bar{p}_{1*}^2} + \bar{R}^2 \right). \quad (22б)$$

Если невозмущенное движение электронов происходит по равновесной траектории $C_{1,2}(0) = 0$, то в соответствии с уравнениями (18) $C_{1,2}(Z) \equiv 0$, т. е. при ондуляторном синхронизме (1) электроны в процессе взаимодействия с сигнальной волной остаются в состоянии равновесия, если они находились там в начальный момент. В этом случае усредненные уравнения движения сводятся к двум уравнениям (22). При $C_{1,2} = 0$ уравнения (22) могут быть представлены в канонической форме (знак усреднения здесь и далее опускается)

$$\frac{d\gamma}{dZ} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{dZ} = g(\beta_{1*}^{-1} - 1) - 1 + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma}$$

с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = -\frac{a_s \bar{p}_{1*}}{\bar{p}_{1*}} \cos \vartheta.$$

Зависимости $p_{1*}(\gamma)$, $p_{\perp*}(\gamma)$, $\Gamma(\gamma)$ в уравнениях (22) заданы неявным образом посредством соотношений (10), (12) и (13). В случае, когда гиро- и баунс-частоты достаточно сильно различаются и поперечный импульс, приобретаемый электроном в поле ондулятора, мал по сравнению с продольным

$$\left| 1 - \frac{f}{\sqrt{\gamma_0^2 - 1}} \right| \gg \frac{a_u^2}{2^{1/2} (\gamma_0^2 - 1)^{1/2}}, \quad |p_{1*}| \ll \alpha_u^{1/2} (\gamma_0^2 - 1)^{1/2}, \quad (23)$$

эти зависимости могут быть выражены в явной форме

$$p_{1*} = -\frac{a_u}{1 - \omega_{H_0}/\gamma \omega_b}, \quad p_{\perp*} = \sqrt{\gamma^2 - 1}, \quad \Gamma = 1 - \frac{\omega_{H_0}}{\gamma \omega_b}.$$

В таких условиях при $C_{1,2} = 0$ уравнения (22) приобретают известный вид^[11, 12] и могут быть получены в рамках метода усредненного пондеромоторного потенциала^[13]

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dZ} &= \frac{a_s}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \frac{a_u}{1 - \omega_{H_0}/\gamma \omega_b} \sin \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dZ} &= \Delta + \frac{\gamma g}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} + \frac{g\gamma a_u^2 - 2a_u a_s \gamma \cos \vartheta}{2(\gamma^2 - 1)^{3/2} (1 - \omega_{H_0}/\gamma \omega_b)^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Перейдем теперь к анализу на основе усредненных уравнений (22) энергообмена с волной пучка электронов, движущихся по стационарным винтовым траекториям. Для такого пучка граничные условия имеют вид²

$$\gamma(0) = \gamma_0, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0 \in [0; 2\pi), \quad C_{1,2}(0) = 0, \quad (25)$$

² Без последних двух членов в уравнении для фазы (22) использовались ранее в работах [8, 7], где они были получены исходя из качественных соображений. В работах [8, 6] нелинейный анализ проводился на основе численного решения неусредненных уравнений движения без разделения резонансов (1)–(3).

а электронный КПД определяется соотношением

$$\eta = \frac{1}{1 - \gamma_0^{-1}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0} d\vartheta_0. \quad (26)$$

В режиме малого сигнала $\alpha_s \rightarrow 0$, решая уравнения (22) методом последовательных приближений, в первом не исчезающем при усреднении по фазам влета ϑ_0 порядке получим следующее выражение для так называемого линейного КПД:

$$\eta_{\text{лин}} = \frac{\alpha_s^2 L^2}{1 - \gamma_0^{-1}} \left[-\frac{\alpha_u p_{10}}{2p_{10}^2 \Gamma_0^2} \frac{\sin^2 \psi/2}{(\psi/2)^2} + L \frac{p_{10}^2 g}{8p_{10}^2 \Gamma_0^2} \mu \frac{d}{d\psi} \frac{\sin^2 \psi/2}{(\psi/2)^2} \right], \quad (27)$$

где $\psi = (g(\beta_{10}^{-1} - 1) - 1)L$ — угол пролета электронов, $L = h_u L$,

$$\mu = -\gamma_0 \left. \frac{d\beta_{1*}^{-1}}{d\gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} \quad (28)$$

— параметр инерционной группировки. Выражение (27), определяющее стартовый ток генератора, совпадает с результатами линейной теории [10]. Первый член в правой части (27) описывает силовую группировку электронов. Такой механизм группировки обусловлен зависимостями $p_{1*}(\gamma)$, $\beta_{1*}(\gamma)$ в уравнении для энергии электронов (22а), а также членом, пропорциональным α_s , в правой части уравнения для фазы (22б). Заметим, что оба эффекта дают одинаковый вклад в энергообмен электронного пучка с волной. Второй член в правой части (27) описывает инерционную группировку, к которой приводит зависимость поступательной скорости от энергии частицы (см. (28)).

Если параметр инерционной группировки μ отличен от нуля, то при достаточно большой длине пространства взаимодействия

$$|\mu| g L \Gamma_0 \gg 1 \quad (29)$$

в силу своего саморазвивающегося характера инерционная группировка становится преобладающей (первый член в (27) пренебрежимо мал). Соответственно в нелинейных уравнениях движения (22) можно считать $p_{1*} = p_{10}$, $\beta_{1*} = \beta_{10}$, а также опустить член, пропорциональный α_s , в уравнении для фазы. Кроме того, при выполнении условия (29) малы относительные изменения энергии электронов (см. ниже формулу (32)), что позволяет упростить уравнения (22) и представить их в форме, эквивалентной уравнениям физического маятника

$$\frac{dw}{dZ} = \frac{\alpha_s p_{10}}{p_{10}} \sin \vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{dZ} = \Delta + g\mu w, \quad (30)$$

где $w = 1 - \gamma/\gamma_0$; $\Delta = g(\beta_{10}^{-1} - 1) - 1$ — начальная расстройка синхронизма (1). Далее в уравнениях (30) с помощью замены переменных

$$\zeta = \frac{Z}{L}, \quad u = |\mu| g L w, \quad F = \frac{|\mu| \alpha_s p_{10}}{p_{10}} L^2$$

удобно минимизировать число независимых параметров

$$\frac{du}{d\zeta} = F \sin \vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{d\zeta} = u \operatorname{sign} \mu + \psi. \quad (31)$$

КПД в новых переменных определяется соотношениями

$$\eta = \frac{1}{|\mu| g L} \hat{\eta}, \quad \hat{\eta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u|_{\zeta=1} d\vartheta_0. \quad (32)$$

Максимум приведенного КПД $\hat{\eta} = 5.6$ достигается при $F = 18$, $\psi_{\text{отр}} = -5.8 \operatorname{sign} \mu$.

Величина полного КПД зависит прежде всего от величины параметра инерционной группировки, выражение для которого при выполнении условий (23) может быть представлено в виде (ср. с [5])

$$\mu = \frac{1}{\gamma_0^2} \left[1 + \frac{\alpha_u^2}{(1 - f/\gamma_0)^2} \right]. \quad (33)$$

В отсутствие продольного магнитного поля ($f=0$) параметр группировки $\mu = \gamma_0^{-2} (1 + \alpha_u^2)$. Поэтому в условиях, когда частота излучения существенно превосходит баунс-частоту ($g \approx 2\gamma_0^2$), КПД сравнительно невелик и обратно пропорционален числу периодов ондулятора $\eta = 1/L \ll 1$. В присутствии магнитного поля на ветви стационарных решений I (рис. 2) в области $f \approx \gamma_0 (1 + \alpha_u^2)$ параметр группировки может быть сколь угодно мал $\mu \ll \gamma_0^{-2}$ [5, 6]. В этой области параметров могут реализоваться достаточно высокие значения КПД: $\eta \gg 1/L$. Максимум КПД достигается при длине $L \sim 1/\mu g$, когда условие (29) нарушается и наряду с инерционной необходимо учитывать силовую группировку электронов в рамках уравнений (22). Численный анализ этих уравнений будет проведен в специальной работе.

3. Режим комбинационных синхронизмов

В условиях синхронизмов (2), (3) медленной является разностная (суммарная) фаза: $\varphi = \vartheta \mp \chi$. Производя усреднение уравнений (19) по быстрым фазам ϑ и χ , получим (знак усреднения опущен)

$$\begin{aligned} dC_1/dZ &= \alpha_s a \cos \varphi + Q (C_2 C_1^2 + C_2^3), \\ dC_2/dZ &= \pm \alpha_s a \sin \varphi - Q (C_1 C_2^2 + C_1^3), \\ d\gamma/dZ &= -\alpha_s b (C_1 \cos \varphi \pm C_2 \sin \varphi), \\ \frac{d\varphi}{dZ} &= g\beta_{\parallel*}^{-1} \left[1 + \frac{1}{4p_{\parallel*}^2} \left(1 + \frac{3p_{\perp*}^2}{p_{\parallel*}^2} + R^2 \right) (C_1^2 + C_2^2) \right] - g - 1 \mp \Gamma, \end{aligned} \quad (34)$$

$$C_{1,2}(0) = (C_0)_{1,2}, \quad \gamma = \gamma_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0 \in [0; 2\pi). \quad (35)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left[(\beta_{\perp*}^{-1} - 1) (\mp 1 + R^{-1}) \mp \frac{p_{\perp*}^2 \gamma f}{p_{\parallel*}^2 \Gamma R} \right], \\ b &= \pm \frac{1}{2p_{\parallel*}^2} (p_{\perp*}^2 + p_{\parallel*}^2 (1 \mp R)) - \frac{g\gamma p_{\perp*}^2}{2\Gamma p_{\parallel*}^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Верхний знак в (34)–(36) и последующих соотношениях соответствует синхронизму (2), а нижний — (3). Обратим внимание, что последний член в коэффициенте b получен в рамках первого улучшенного приближения метода усреднения [14]. В данном случае учтены малые осцилляторные добавки к фазе

$$\vartheta = -\frac{g\gamma p_{\perp*}}{\Gamma p_{\parallel*}^2} (C_1 \cos \chi - C_2 \sin \chi),$$

а первое слагаемое в уравнении для энергии (19в) представлено в виде

$$\frac{d\gamma}{dZ} = -\frac{\alpha_s p_{\perp*}}{p_{\parallel*}} (\sin \vartheta + \cos \vartheta \vartheta).$$

В режиме малого сигнала $\alpha_s \rightarrow 0$, предполагая, что невозмущенное движение электронов происходит по стационарной винтовой траектории ($(C_0)_{1,2} = 0$), из уравнений (34) получим выражение для линейного КПД, совпадающее с [10],

$$\eta_{\text{линейн}} = \frac{\alpha_u^2}{2(1 - \gamma_0^2)} L^2 \frac{\alpha_0 b_0}{\gamma_0} \frac{1 - \cos \psi_{\mp}}{\psi_{\mp}^2}, \quad (37)$$

где $\psi_{\mp} = (\Delta \mp \Gamma)L$ — углы пролета. Анализ знаков коэффициентов α_0 , b_0 показывает, что если невозмущенному движению электронов соответствует состояние равновесия, лежащее на ветви I (рис. 2), то излучение ($\eta > 0$) имеет место при выполнении условий синхронизма (3), а поглощение ($\eta < 0$) в условиях синхро-

низма (2). Напротив, если состояние равновесия лежит на ветви 2 (рис. 2), то излучение имеет место при резонансе (3), а поглощение при резонансе (2).

Отметим, что в случае, когда gyro- и баунс-частоты достаточно сильно разнесены между собой, а амплитуда ондуляторного поля мала (см. условия (23)), для частоты осцилляций электронов около состояний равновесия справедливо следующее приближенное выражение:

$$\Gamma = \begin{cases} 1 - \frac{f}{p'_1} - \frac{\alpha_u^2 f}{p_{11}^3 (1 - f/p'_1)^2}, & \text{для ветви 2 } \frac{f}{p'_1} < 1, \\ \frac{f}{p'_1} - 1 + \frac{\alpha_u^2 f}{p_{11}^3 (1 - f/p'_1)^2}, & \text{для ветви 1 } \frac{f}{p'_1} > 1, \end{cases} \quad (38)$$

где $p'_1 = \sqrt{\gamma^2 - 1}$. Тогда условие синхронизма, при котором имеет место излучение, можно записать в универсальном для обеих ветвей стационарных решений виде

$$\omega - hv_{11} = 2\omega_B - \omega_H - \frac{\alpha_u^2 \omega_H}{p_{11}^2 (1 - f/p'_1)^2}, \quad (39)$$

где $\omega_H = \omega_{H0}/\gamma$ — релятивистская гирочастота. Обратим внимание, что для ветви 2 это излучение может быть более высокочастотным, чем обычное ондуляторное излучение. Поглощение имеет место при синхронизме

$$\omega - hv_{11} = \omega_H + \frac{\alpha_u^2 \omega_H}{p_{11}^2 (1 - f/p'_1)^2}. \quad (40)$$

Очевидно, в предельном случае $\alpha_u \rightarrow 0$ (40) определяет частоты, а (37) интенсивности обычного циклотронного поглощения.

Для нелинейного анализа в уравнениях поперечного движения электронов (34) удобно перейти к полярным координатам $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\varphi_c = \arctg C_1/C_2$. В этих переменных система уравнений (34) может быть преобразована к виду

$$dC/dZ = a\alpha_s \cos \Phi, \quad d\gamma/dZ = -bC\alpha_s \cos \Phi, \quad (41a), (41b)$$

$$d\Phi/dZ = g(\beta_{11}^* - 1) - 1 \mp \Gamma \pm QC^2 +$$

$$+ \frac{gC^2}{4p_{11}^4 \beta_{11}^*} (3p_{11}^{*2} + p_{11}^{*2}(1 + R^2)) - \frac{\alpha_s a}{C} \sin \Phi, \quad (41b)$$

где $\Phi = \varphi \mp \varphi_c$. Уравнения (41a), (41b) имеют интеграл

$$C^2 - C_0^2 = -2 \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{a}{b} d\gamma. \quad (42)$$

В рассматриваемом ниже случае малых относительных изменений энергии частиц $|w| \ll 1$ соотношение (42) может быть записано в виде

$$C^2 - C_0^2 = -2 \frac{a_0}{b_0} (\gamma - \gamma_0). \quad (43)$$

Согласно (43), при $a_0/b_0 > 0$ торможение электрона сопровождается раскачкой осцилляции электрона около состояния равновесия, а при $a_0/b_0 < 0$ уменьшением амплитуды этих осцилляций. Поэтому для получения излучения во второй ситуации невозмущенное движение электронов должно происходить по траектории, отличной от равновесной, т. е. электроны должны обладать начальным запасом колебательной энергии: $C_0^2 \neq 0$.³ В первой ситуации излучение возможно и при движении электронов по равновесной траектории $C_0 = 0$. Очевидно, первый случай типичен для излучения электронов-осцилляторов в условиях

³ Излучение, имеющее место при $C_0 = 0$, в условиях синхронизма (40) представляет собой модифицированное циклотронное излучение, переходящее в обычное циклотронное излучение винтовых электронных пучков [16] в предельном случае $\alpha_u \rightarrow 0$.

аномального эффекта Доплера, а второй — в условиях нормального эффекта Доплера [15, 16]. Аномальный эффект Доплера реализуется в условиях синхронизма (39), нормальный эффект Доплера имеет место при синхронизме (40).

Ограничимся здесь исследованием излучения в условиях синхронизма (39) пучка электронов, движущихся в поле ондулятора по равновесным траекториям. В этом случае граничные условия к уравнениям (41) для всех электронов пучка идентичны

$$C(0) = 0, \quad \gamma(0) = \gamma_0, \quad \Phi(0) = 0. \quad (44)$$

Следовательно, раскачка поперечных осцилляций и энергообмен с волной у всех частиц протекают совершенно одинаково и превалирует силовая группировка частиц, за которую ответствен последний член в уравнении для фазы (41в). Считая, что относительные потери энергии частиц малы $|w| \ll 1$, с учетом интеграла (43) сведем систему уравнений (41) к двум уравнениям

$$\begin{aligned} dw/dZ &= \sqrt{2a_0 b_0} \sqrt{w} \alpha_s \cos \Phi, \\ \frac{d\Phi}{dZ} &= \delta + \nu w - \frac{\alpha_s \sqrt{a_0 b_0}}{\sqrt{2} \sqrt{w}} \sin \Phi, \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$\delta = g(\beta_{i0}^{-1} - 1) - 1 \mp \Gamma_0$$

— начальная расстройка синхронизма,

$$\begin{aligned} \nu &= \pm 2Q \frac{\gamma_0 a_0}{b_0} + \frac{g \gamma_0 a_0}{2b_0 p_{i0}^4 \beta_{i0}} [3p_{i0}^2 + p_{i0}^2 (1 + R_0^2)] - g \frac{\gamma_0}{p_{i0}} \pm \frac{3}{2} \frac{f p_{i0}^2 \gamma_0^2}{R_0 p_{i0}^3} + \\ &+ \frac{p_{i0}^3 \gamma_0 \delta + p_{i0}^2 \gamma_0^2 f \Gamma_0^{-1} R_0^{-1}}{p_{i0}^3} \left[g \gamma_0 \pm \frac{1}{2} R_0 f \pm \frac{1}{2} R_0^{-1} f \right] \pm \frac{1}{2} \frac{p_{i0}^2 \gamma_0^2 f^2}{R_0^2 p_{i0}^3 \Gamma_0} (2p_{i0}^2 + 3p_{i0}^2). \end{aligned}$$

Заменой переменных

$$u = \frac{|v|w}{B}, \quad \zeta = BZ, \quad \delta = \frac{\delta}{B} B = (2|v| a_0 b_0 \alpha_s^2)^{1/2}$$

уравнения движения (45) сводятся к виду, универсальному для генераторов, основанных на аномальном эффекте Доплера (ср. с [17-19])

$$\frac{du}{d\zeta} = \sqrt{u} \cos \Phi, \quad \frac{d\Phi}{d\zeta} = \hat{\delta} + \text{sign } \nu u - \frac{1}{2\sqrt{u}} \sin \Phi. \quad (46)$$

Электронный КПД с учетом идентичности энергообмена с волной всех электронов определяется соотношением

$$\eta = \frac{1}{1 - \gamma_0^{-1}} \frac{B}{|v|} u. \quad (47)$$

Исходя из интеграла уравнений (46)

$$\sin \Phi = \hat{\delta} \sqrt{u} + \text{sign } \nu \frac{u^{3/2}}{2}, \quad (48)$$

нетрудно получить (см. подробнее [18, 19]), что максимальное торможение электронов $u_{\max} = 4$ достигается при

$$\hat{\delta}_{\text{opt}} = -\frac{3}{2} \text{sign } \nu, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \text{sign } \nu.$$

В режиме точного синхронизма

$$\hat{\delta} = 0, \quad u_{\max} = 2^{2/3} \text{ при } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{sign } \nu.$$

Оптимальная длина генератора в последнем случае составляет $\zeta_{\text{opt}} = 3$.

Литература

- [1] Fiedland L., Hirshfield J. L. Phys. Rev. Lett., 1980, v. 44, N 22, p. 1455—1460.
- [2] Freund H. P., Sprangle P., Dillenberg D. et al. Phys. Rev. A, 1981, v. 24, N 4, p. 1965—1979.
- [3] Jackson R. H., Gold S. H., Parker R. K. et al. IEEE J. Quant. Electron., 1983, v. Qe-19, N 3, p. 346—356.
- [4] Gold S. H., Hardesty D. L., Kinkead A. K. Phys. Rev. Lett., 1984, v. 52, N 14, p. 1218—1222.
- [5] Кондратенко А. М., Салдин Е. Л. ЖТФ, 1981, т. 51, № 8, с. 1633—1642.
- [6] Гинзбург Н. С., Петелин М. И. В кн.: Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, ИПФ АН СССР, 1984, в. 4, с. 49.
- [7] Freund H. P., Gold S. H. Phys. Rev. Lett., 1984, v. 52, N 11, p. 926—930.
- [8] Freund H. P. Phys. Rev. A., 1983, v. 27, N 4, p. 1977—1988.
- [9] Ganguly A. K., Freund H. P. Phys. Rev. A., 1985, v. 32, N 4, p. 2275—2287.
- [10] Гинзбург Н. С., Новожилова Ю. В. ЖТФ, 1986, т. 56, № 9, с. 1709—1716.
- [11] Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И. ЖЭТФ, 1979, т. 76, № 3, с. 930—943.
- [12] Гинзбург Н. С., Сергеев А. С. Тез. докл. VI Всес. симпозиума по сильноточной электронике. Томск, 1986, с. 20.
- [13] Миллер М. А. Изв. вузов. Радиофизика, 1958, т. 1, № 3, с. 110—123.
- [14] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [15] Железняков В. В. Электромагнитные волны в космической плазме. М.: Наука, 1977.
- [16] Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Нусинович Г. С. и др. В кн.: Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, ИПФ АН СССР, 1979, в. 1, с. 157.
- [17] Гинзбург Н. С. Изв. вузов. Радиофизика, 1979, т. 22, № 4, с. 470—478.
- [18] Гинзбург Н. С. ЖТФ, 1984, т. 54, № 2, с. 299—305.
- [19] Ginzburg N. S., Tokman M. D. Optics Commun., 1982, v. 43, N 2, p. 317—340.

Институт прикладной физики
АН СССР
Горький

Поступило в Редакцию
9 марта 1987 г.