УДК 53 : 51

УСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛЕ ДВУХ РАЗНОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПРИСУТСТВИИ НЕРЕЗОНАНСНОГО ОДНОРОДНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Н. С. Гинзбург

Получены уравнения, описывающие усредненное движение релятивистских электронов в полях двух интенсивных плоских электромагнитных волн в условиях комбинационного синхронизма, реализующихся в лазерах на свободных электронах, основанных на индуцированном рассеянии волны и индуцированном ондуляторном излучении. Исследованы эффекты, вызванные наложением однородного магнитного поля, напряженность которого далека от резонансного значения. Показано, что в присутствии такого поля усредненное движение электронов не может быть задано только усредненным пондеромоторным потенциалом, а требует учета дополнительных членов, обусловленных взаимодействием между магнитостатическим полем и магнитным моментом, приобретаемым электронами при осцилляциях в электромагнитных полях.

В работах [1, 2] было рассмотрено усредненное движение релятивистских электронов в полях двух разночастотных электромагнитных волн и однородном магнитном поле $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{z}_0$ в предположении, что выполнены условия комбинационного синхронизма

$$\omega_1 = \mathbf{k}_1 \mathbf{v}_\parallel = \omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v}_\parallel, \tag{1}$$

а амплитуда волн достаточно мала

$$eA_j/mc^2 \ll 1. \tag{2}$$

Считалось также, что напряженность однородного магнитного поля далека от резонансного значения

$$|\omega_j - \mathbf{k}_j \mathbf{v}_\parallel \mp \omega_H| T \gg 2\pi. \tag{3}$$

В (1)—(3) ω_j, $\mathbf{k}_j$ — частоты и волновые векторы волн; A_j — амплитуды вектор-потенциалов волн; $\mathbf{v}_\parallel$ — поступательная скорость электронов; $\omega_H = eH_0/mc\gamma$ — релятивистская гирочастота; T — время взаимодействия электронов с электромагнитными полями; c — скорость света; e — заряд электрона; m — его масса покоя; γ — релятивистский масс-фактор, $j=1, 2$.

При выполнении условий (1)—(3) в сопровождающей системе отсчета (например, в системе, движущейся с невозмущенной поступательной скоростью электрона) движение электрона носит слаборелятивистский характер и может быть описано в рамках метода усредненного пондеромоторного потенциала [3]. Соответственно усредненные уравнения движения в лабораторной системе отсчета могут быть получены с помощью преобразований Лоренца из уравнений работы [3].

В данной работе усреднение проведено непосредственно в лабораторной системе отсчета в предположении, что амплитуды волн могут быть настолько велики

$$eA_j/mc^2 \sim 1, \tag{4}$$

что не существует системы отсчета, в которой движение электрона являлось бы слаборелятивистским. При этом, однако, как и в [4, 5], считается, что амплитуда осцилляций электрона $\tilde{\mathbf{r}}_j$ в полях каждой из волн мала в масштабе длин этих волн [1]

$$k_j\tilde{\mathbf{r}}_j \ll 1. \tag{5}$$

Новым элементом по сравнению с работами [4, 5] является учет эффектов, связанных с присутствием однородного магнитного поля, вследствие которых усредненное движение релятивистского электрона не может быть задано только пондеромоторным потенциалом, а требует учета малых добавочных членов. Полученные в статье усредненные уравнения могут быть использованы прежде всего для анализа работы релятивистских убитронов с фокусирующим магнитным полем в режиме высокого КПД, для которого поля, удовлетворяющие условиям (4), (5) являются оптимальными [4].

Рассмотрим здесь случай плоских TEM-волн произвольной поляризации, распространяющихся вдоль направления однородного магнитного поля $\mathbf{H}_0$ и задающихся вектор-потенциалами

$$\hat{A} = A_x + iA_y = \sum_{j=1}^{2} \left(A_j^{(-)} e^{i(\omega_j t - k_j z)} + A_j^{(+)} e^{-i(\omega_j t - k_j z)}\right), \tag{6}$$

где $A_j^{(\pm)}(z)$ — медленно меняющиеся амплитуды право- и левоциркулярно-поляризованных компонент волн. В пренебрежении поперечной неоднородностью периодическому магнитостатическому (ондуляторному) полю соответствует в (6) $\omega_j = 0$, $k_j = 2\pi/d$, где d — период модуляции магнитного поля.

Уравнения движения релятивистского электрона в поле плоских волн (6) и однородном магнитном поле удобно представить в виде

$$\frac{d\hat{p}}{dt} - i\omega_H \hat{p} = \frac{e}{c}\frac{d\hat{A}}{dt}, \tag{7}$$

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = ec\,\mathrm{Re}\left[\frac{\hat{p}^*}{\mathscr{E}}\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\right], \tag{8}$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -ec\,\mathrm{Re}\left[\frac{\hat{p}^*}{\mathscr{E}}\frac{\partial \hat{A}}{\partial z}\right], \tag{9}$$

$$dz/dt = c^2 p_z/\mathscr{E}, \tag{10}$$

где $\hat{p} = p_x + ip_y$, $p_{x,y,z} = m\gamma v_{x,y,z}$ — декартовы компоненты импульса электрона; $v_{x,y,z}$ — соответствующие компоненты скорости; $\mathscr{E} = mc^2\gamma$ — энергия электрона.

При выполнении условий (1), (3)—(5) произведем усреднение уравнений (7)—(10), предполагая сначала для простоты, что амплитуды волн не зависят от продольной координаты. С этой целью представим переменные в виде сумм быстрых и медленных (дрейфовых) составляющих

$$\hat{p} = \bar{\hat{p}} + \tilde{\hat{p}}, \quad \mathscr{E} = \bar{\mathscr{E}} + \tilde{\mathscr{E}}, \quad p_z = \bar{p}_z + \tilde{p}_z, \quad z = \bar{z} + \tilde{z}. \tag{11}$$

Если невозмущенное движение электрона происходит вдоль направления однородного магнитного поля, то дрейфовая компонента поперечного импульса

---

[1] В релятивистски сильных полях (4) условие (5) может быть выполнено, если фазовые скорости волн в направлении поступательного движения электронов достаточно сильно отличаются от скорости света и в соответствии с условием синхронизма (1) длины волны соизмеримы между собой.

отсутствует $\tilde{p}=0$. Тогда в соответствии с уравнениями (8)—(10) отсутствуют осцилляторные составляющие энергии, продольного импульса и продольной координаты, пропорциональные первой степени амплитуд волн [2]

$$\tilde{\mathcal{E}}=0, \quad \tilde{p}_z=0, \quad \tilde{z}=0. \tag{12}$$

Для вычисления осцилляторных составляющих поперечного импульса в поле одной из волн представим уравнение (7) в виде

$$\frac{d\hat{p}_j}{dt}-i\omega_H\hat{p}_j=\frac{ie}{c}\left(\Omega_j A_j^{(-)}e^{i\vartheta_j}-\Omega_j A_j^{(+)}e^{-i\vartheta_j}\right), \tag{13}$$

где $\vartheta_j=\omega_j t-k_j z$, $\Omega_j=\omega_j-k_j v_z$. Приближенно интегрируя (13), имеем

$$\tilde{\hat{p}}_j=\frac{e}{c}\left(\frac{\Omega_j}{\Omega_j-\omega_H}A_j^{(-)}e^{i\vartheta_j}-\frac{\Omega_j}{\Omega_j+\omega_H}A_j^{(+)}e^{-i\vartheta_j}\right). \tag{14}$$

Подставляя (14) в уравнение для энергии (8), после усреднения получим

$$\frac{d\bar{\mathcal{E}}}{dt}=\frac{e^2}{\mathcal{E}}\operatorname{Re}i\left\{\left[\frac{\Omega_2\omega_1}{\Omega_2-\omega_H}-\frac{\Omega_1\omega_2}{\Omega_1-\omega_H}\right]A_1^{(-)}A_2^{(-)*}e^{i\theta}-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{\Omega_2\omega_1}{\Omega_2+\omega_H}-\frac{\Omega_1\omega_2}{\Omega_1+\omega_H}\right]A_1^{(+)}A_2^{(+)*}e^{-i\theta}\right\}, \tag{15}$$

где $\theta=\vartheta_1-\vartheta_2$ — медленная комбинационная фаза. Представляя доплеровски смещенные частоты волн в виде

$$\Omega_1=\Omega+\delta, \quad \Omega_2=\Omega-\delta, \tag{16}$$

где с учетом условий синхронизма (1) $|\delta|\ll\Omega$, преобразуем уравнение (15) к виду

$$\frac{d\bar{\mathcal{E}}}{dt}=\frac{e^2}{\mathcal{E}}\operatorname{Re}i\left\{(\omega_1-\omega_2)\left[\frac{\Omega}{\Omega-\omega_H}A_1^{(-)}A_2^{(-)*}e^{i\theta}-\frac{\Omega}{\Omega+\omega_H}A_1^{(+)}A_2^{(+)*}e^{-i\theta}\right]+\right.$$
$$\left.+(\omega_1+\omega_2)\omega_H\delta\left[\frac{1}{(\Omega-\omega_H)^2}A_1^{(-)}A_2^{(-)*}e^{i\theta}-\frac{1}{(\Omega+\omega_H)^2}A_1^{(+)}A_2^{(+)*}e^{-i\theta}\right]\right\}. \tag{17}$$

Производя аналогичные вычисления для усредненного продольного импульса из уравнения (9), с учетом (14) получим

$$\frac{d\bar{p}_z}{dt}=\frac{e^2}{\mathcal{E}}\operatorname{Re}i\left\{(k_1-k_2)\left[\frac{\Omega}{\Omega-\omega_H}A_1^{(-)}A_2^{(-)*}e^{i\theta}-\frac{\Omega}{\Omega+\omega_H}A_1^{(+)}A_2^{(+)*}e^{-i\theta}\right]+\right.$$
$$\left.+(k_1+k_2)\omega_H\delta\left[\frac{1}{(\Omega-\omega_H)^2}A_1^{(-)}A_2^{(-)*}e^{i\theta}-\frac{1}{(\Omega+\omega_H)^2}A_1^{(+)}A_2^{(+)*}e^{-i\theta}\right]\right\}. \tag{18}$$

Принимая во внимание (12), для усредненной продольной координаты имеем

$$d\bar{z}/dt=\bar{v}_z=c^2\bar{p}_z/\mathcal{E}. \tag{19}$$

Соответственно

$$d\theta/dt=\omega_1-\omega_2=(k_1-k_2)\bar{v}_z=2\delta. \tag{20}$$

Комбинируя уравнения (17) и (18), имеем

$$(k_1-k_2)\frac{d\bar{\mathcal{E}}}{dt}-(\omega_1-\omega_2)\frac{d\bar{p}_z}{dt}=\frac{2e^2(\omega_2k_1-\omega_1k_2)}{\mathcal{E}}\times$$
$$\times\operatorname{Re}i\left[\frac{1}{(\Omega-\omega_H)^2}A_1^{(-)}A_2^{(-)*}e^{i\theta}+\frac{1}{(\Omega+\omega_H)^2}A_1^{(+)}A_2^{(+)*}e^{-i\theta}\right]. \tag{21}$$

---

[2] Указанные осцилляторные составляющие возникнут для электрона, обладающего начальной вращательной скоростью, что приведет к появлению в правых частях усредненных уравнений движения (16)—(18) дополнительных членов, пропорциональных квадрату вращательной скорости.

С учетом (20) из (21) получаем приближенный интеграл усредненного движения

$$(k_1 - k_2)\bar{\mathscr{E}} - (\omega_1 - \omega_2)\bar{p}_z = \frac{e^2(\omega_2 k_1 - \omega_1 k_2)\,\omega_H}{\bar{\mathscr{E}}} \times$$
$$\times \operatorname{Re}\left[\frac{1}{(\Omega - \omega_H)^2} A_1^{(-)} A_2^{(-)*} e^{i\theta} + \frac{1}{(\Omega + \omega_H)^2} A_1^{(+)} A_2^{(+)*} e^{-i\theta}\right] + \text{const}. \quad (22)$$

В отсутствие продольного магнитного поля соотношение (22) принимает известный вид [4]

$$(k_1 - k_2)\bar{\mathscr{E}} - (\omega_1 - \omega_2)\bar{p}_z = \text{const}.$$

Для интерпретации интеграла (22) полезно перейти в систему отсчета K', движущуюся со скоростью, равной фазовой скорости комбинационной волны $u = (\omega_1 - \omega_2)/(k_1 - k_2)$, в которой частоты волн совпадают $\omega' = \omega_1' = \omega_2'$. Считая для простоты, что выполнено условие (2) и движение электрона в K' является слаборелятивистским, представим соотношение (22) в виде

$$\mathscr{E}' - \frac{e^2\omega'\omega_H'}{mc^2}\operatorname{Re}\left[\frac{A_1^{(-)'} A_2^{(-)*'} e^{-i\theta'}}{(\omega' - \omega_H')^2} - \frac{A_1^{(+)'} A_2^{(+)*'} e^{-i\theta'}}{(\omega' + \omega_H')^2}\right] = \text{const}$$

или (ср. с [3])

$$\mathscr{E}' + W' = \text{const}, \quad (23)$$

где

$$W' = \frac{\omega'\omega_H'}{2}\left[\overline{|r^{(+)'}|^2} - \overline{|r^{(-)'}|^2}\right] \quad (24)$$

— энергия взаимодействия между внешним магнитным полем $\mathbf{H}_0$ и магнитным диполем, обусловленным вращением электронов с частотой ω',

$$r^{(\pm)'} = \frac{e}{mc}\sum_{j=1}^{2}\frac{A_j^{(\pm)'} e^{\mp i\vartheta_j'}}{(\omega' \pm \omega_H)}$$

— амплитуда поперечных осцилляций электронов.

Рассмотрим теперь усредненное движение релятивистского электрона в поле одной продольно-неоднородной *TEM*-волны и однородном магнитном поле. Опуская для простоты записи индекс «j» и считая волну циркулярно-поляризованной (обобщение на случай эллиптически-поляризованной волны очевидно), представим уравнение (7) для поперечного импульса электрона в виде

$$\frac{d\hat{p}}{dt} - i\omega_H\hat{p} = \frac{e}{c}\left[i(\omega - kv_z)A^{(-)} + v_z\frac{\partial A^{(-)}}{\partial z}\right]e^{i(\omega t - kz)}. \quad (25)$$

Для отыскания вынужденного решения уравнения (25) амплитуду ВЧ поля удобно представить в виде интеграла Фурье

$$A^{(-)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A_h^{(-)} e^{ihz}\,dh. \quad (26)$$

Подставляя (26) в (25), имеем

$$\frac{d\hat{p}}{dt} - i\omega_H\hat{p} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{e}{c}\int_{-\infty}^{\infty}(\omega - (k - h)v_z)A_h^{(-)} e^{(\omega t - (k-h)z)}\,dz. \quad (27)$$

В линейном приближении вынужденное решение (27) дается соотношением

$$\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega - (k - h)v_z}{\omega - (k - h)v_z - \omega_H} A_h^{(-)} e^{i(\omega t - (k-h)z)}\,dh. \quad (28)$$

Принимая теперь во внимание плавную неоднородность амплитуды волны и соответственно узость спектра $A_h^{(-)}$ ($|h| \ll k$), представим (28) в виде

$$\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e}{c} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\Omega}{\Omega - \omega_H} - \frac{\omega_H h v_z}{(\Omega - \omega_H)^2} \right| A_h^{(-)} e^{i(\omega t - (k-h)z)} dh, \tag{29}$$

где $\Omega = \omega - kv_z$. Совершая обратное преобразование Фурье, для амплитуды поперечных осцилляций электрона из (29) получим

$$\tilde{\bar{p}} = \frac{e}{c} \left[\frac{\Omega}{\Omega - \omega_H} A^{(-)} + \frac{i\omega_H \bar{v}_z}{(\Omega - \omega_H)^2} \frac{\partial A^{(-)}}{\partial z} \right] e^{i(\omega t - kz)}. \tag{30}$$

Подставляя (30) в уравнения для энергии и продольного импульса (8), (9) и производя усреднение, получим

$$\frac{d\bar{\mathcal{E}}}{dt} = \frac{e^2}{2\bar{\mathcal{E}}} \frac{\omega\omega_H \bar{v}_z}{(\Omega - \omega_H)^2} \frac{\partial |A^{(-)}|^2}{\partial \bar{z}},$$

$$\frac{d\bar{p}_z}{dt} = -\frac{e^2}{2\bar{\mathcal{E}}} \left| \frac{\Omega}{\Omega - \omega_H} - \frac{k\omega_H \bar{v}_z}{(\Omega - \omega_H)^2} \right| \frac{\partial |A^{(-)}|^2}{\partial \bar{z}},$$

$$d\bar{z}/dt = c^2 \bar{p}_z / \bar{\mathcal{E}}. \tag{31}$$

Система уравнений (31) имеет интеграл, аналогичный (24)

$$\bar{\mathcal{E}} + \bar{W} = \text{const}, \tag{32}$$

где

$$\bar{W} = -\frac{e^2 \omega\omega_H |A^{(-)}|^2}{2\bar{\mathcal{E}} (\Omega - \omega_H)^2}.$$

В частном случае ондуляторного поля ($\omega = 0$, $k = 2\pi/d$) с переменной амплитудой система уравнений (31) принимает вид

$$\frac{d\bar{\mathcal{E}}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{p}_z}{dt} = -\frac{e^2}{2\bar{\mathcal{E}}} \frac{\Omega^2}{(\Omega - \omega_H)^2} \frac{\partial |A^{(-)}|^2}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{c^2 \bar{p}_z}{\bar{\mathcal{E}}}. \tag{33}$$

Объединяя уравнения (17)—(19) с уравнениями (31), получим

$$\frac{d\bar{\mathcal{E}}}{dt} = \frac{1}{\bar{\mathcal{E}}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\delta(\omega_j + \omega_2)}{\bar{\mathcal{E}}} \operatorname{Re}(i\varphi) + \sum_{j=1}^{2} \frac{\bar{v}_z \omega_j}{\bar{\mathcal{E}}} \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{z}}, \tag{34}$$

$$\frac{d\bar{p}_z}{dt} = -\frac{1}{\bar{\mathcal{E}}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\delta(k_1 + k_2)}{\bar{\mathcal{E}}} \operatorname{Re}(i\varphi) + \sum_{j=1}^{2} \frac{\bar{v}_z k_j}{\bar{\mathcal{E}}} \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{z}}, \tag{35}$$

где

$$\Phi = \sum_{j=1}^{2} \frac{e^2}{2} \left[\frac{\Omega}{\Omega - \omega_H} |A_j^{(-)}|^2 + \frac{\Omega}{\Omega + \omega_H} |A_j^{(+)}|^2 \right] +$$
$$+ e^2 \operatorname{Re} \left| \frac{\Omega}{\Omega - \omega_H} A_1^{(-)} A_2^{(-)*} e^{i\theta} + \frac{\Omega}{\Omega + \omega_H} A_1^{(+)} A_2^{(+)*} e^{-i\theta} \right| \tag{36}$$

— усредненный пондеромоторный потенциал,

$$\varphi = e^2 \omega_H \left[\frac{1}{(\Omega - \omega_H)^2} A_1^{(-)} A_2^{(-)*} e^{i\theta} - \frac{1}{(\Omega + \omega_H)^2} A_1^{(+)} A_2^{(+)*} e^{-i\theta} \right], \tag{37}$$

$$\psi_j = \frac{e^2 \omega_H}{2} \left[\frac{|A_j^{(-)}|^2}{(\Omega - \omega_H)^2} - \frac{|A_j^{(+)}|^2}{(\Omega + \omega_H)^2} \right] \tag{38}$$

— добавки к потенциалу, обусловленные наличием продольного магнитного поля.[3]

Для квадратов величин усредненной энергии и продольного импульса из (34), (35) имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d\bar{\mathcal{E}}^2}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\delta(\omega_1+\omega_2)\operatorname{Re}(i\varphi)+\sum_{j=1}^{2}\omega_j\frac{\partial\psi_j}{\partial\bar{z}}, \tag{39}$$

$$\frac{c^2}{2}\frac{d\bar{p}_z^2}{dt}=-\bar{v}_z\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}+\delta\bar{v}_z(k_1+k_2)\operatorname{Re}(i\varphi)+\sum_{j=1}^{2}\bar{v}_z k_j\frac{\partial\psi_j}{\partial\bar{z}}. \tag{40}$$

Вычитая (40) из (39), получим

$$\frac{1}{2}\frac{d(\bar{\mathcal{E}}^2-c^2\bar{p}_z^2)}{dt}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{v}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi+\delta(\omega_1+\omega_2-\bar{v}_z(k_1+k_2)\operatorname{Re}(i\varphi)+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\bar{v}_z(\omega_j-k_j\bar{v}_z)\frac{\partial\psi_j}{\partial\bar{z}}=\frac{d\Phi}{dt}+2\delta\Omega\operatorname{Re}(i\varphi)+\sum_{j=1}^{2}\bar{v}_z\Omega\frac{\partial\psi_j}{\partial\bar{z}}. \tag{41}$$

Из (41) с учетом (20) следует приближенный интеграл

$$\mathcal{E}^2-c^2\bar{p}_z^2=2\Phi+2\Omega\operatorname{Re}\varphi+2\sum_{j=1}^{2}\Omega\psi_j+\text{const}. \tag{42}$$

Подставляя в (42) соотношения (36)—(38), приведем (42) к виду

$$\mathcal{E}^2-c^2\bar{p}_z^2=\sum_{j=1}^{2}e^2\left[\frac{\Omega^2}{(\Omega-\omega_H)^2}|A_j^{(-)}|^2+\frac{\Omega^2}{(\Omega+\omega_H)^2}|A_j^{(+)}|^2\right]+$$

$$+2e^2\operatorname{Re}\left[\frac{\Omega^2}{(\Omega-\omega_H)^2}A_1^{(-)}A_2^{(-)*}e^{i\theta}+\frac{\Omega^2}{(\Omega+\omega_H)^2}A_1^{(+)}A_2^{(+)*}e^{-i\theta}\right]. \tag{43}$$

С учетом выражения для амплитуды поперечных осцилляций электронов (14) интеграл (43) может быть представлен в виде

$$\mathcal{E}^2=c^2\bar{p}_z^2+c^2\overline{(\tilde{\bar{p}}_1+\tilde{\bar{p}}_2)^2}+\text{const}. \tag{44}$$

Очевидно, это соотношение может быть получено и при непосредственном усреднении интеграла, связывающего энергию и полный импульс электрона

$$\mathcal{E}^2=c^2(p_z^2+p_x^2+p_y^2)+m^2c^4, \tag{45}$$

если учесть, что в рассматриваемом случае отсутствуют осцилляторные добавки к величинам $\mathcal{E}$ и p_z, пропорциональные первой степени амплитуд волн. С другой стороны, такое рассмотрение позволяет определить константу в интеграле (44): $\text{const}=m^2c^4$.

Таким образом, в случае постоянных амплитуд волн усредненные уравнения движения (34), (35), (19) имеют интегралы (22) и (44), а в случае переменных амплитуд волн справедлив только интеграл (44). С учетом этого интеграла после перехода к новой независимой переменной — продольной координате $\bar{z}$ — система усредненных уравнений сводится к двум уравнениям для усредненной энергии $\bar{\mathcal{E}}$ и фазы θ

$$\frac{d\bar{\mathcal{E}}}{d\bar{z}}=\frac{1}{c^2\bar{p}_z}\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \tag{46}$$

$$\frac{d\theta}{d\bar{z}}=\frac{\omega_1-\omega_2}{V_z}-(k_1-k_2)=\frac{\omega_1-\omega_2}{c}\left(1-\frac{m^2c^4+c^2\overline{(\tilde{\bar{p}}_1+\tilde{\bar{p}}_2)^2}}{\mathcal{E}^2}\right)^{-1/2}-(k_1-k_2). \tag{47}$$

[3] Отметим, что аналогичные добавки к пондеромоторному потенциалу хорошо известны для движения слаборелятивистских электронов в ВЧ полях, амплитуды которых явно зависят от времени [6, 7].

Отметим, что в уравнении для энергии (46) удержан только главный член, а малые добавки опущены, поскольку их учет необходим только для получения корректной связи между продольным импульсом (скоростью) и энергией электрона, которая уже использована в уравнении для фазы (47).

Для ультрарелятивистских электронов ($\mathscr{E} \gg mc^2$) при выполнении условия (4) продольную скорость электронов можно представить в виде

$$\bar{v}_z = c\left(1 - \frac{m^2c^4 + c^2\,\overline{(\bar{p}_1 + \bar{p}_2)}^2}{2\bar{\mathscr{E}}^2}\right). \tag{48}$$

С учетом (48), переходя к безразмерным обозначениям, приведем систему уравнений (46), (47) к виду [8]

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{1}{1-w}\,\mathrm{Re}\, i\,\{g_-\alpha_1^{(-)}\alpha_2^{(-)*}e^{i\theta} + g_+\alpha_1^{(+)}\alpha_2^{(+)*}e^{-i\theta}\}, \tag{49}$$

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \Delta + \frac{(2-w)\,w + g_-^2\,(|\alpha_1^{(-)}|^2 + |\alpha_2^{(-)}|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\alpha_1^{(-)}\alpha_2^{(-)*}e^{i\theta})}{2\,(1-w)^2} + \frac{g_+^2\,(|\alpha_1^{(+)}|^2 + |\alpha_2^{(+)}|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\alpha_1^{(+)}\alpha_2^{(+)*}e^{-i\theta})}{2\,(1-w)^2}, \tag{50}$$

где

$$w = 1 - \mathscr{E}/\mathscr{E}_0, \quad \zeta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{c}\,\bar{z}\gamma_0^{-2}, \quad \alpha_{1,2}^{(\pm)} = \frac{eA_{1,2}^{(\pm)}}{mc^2},$$

$$\Delta = \left(1 - \frac{c\,(\omega_1 - \omega_2)}{(k_1 - k_2)} + \gamma_0^{-2}/_2\right)\gamma_0^2, \quad g_\pm = \frac{1-w}{1 \pm \nu - w}, \quad \nu = \omega_{H0}/\Omega_0.$$

В отсутствие продольного магнитного поля ($g_\pm = 1$) уравнения (49), (50) сводятся к уравнениям работы [4].

Для убитронов, в которых одна из волн ($j = 2$) представляет собой периодическое магнитостатическое поле (поле ондулятора), интересен и противоположный предельный случай, когда напряженность продольного магнитного поля бесконечно велика $|\nu| \gg 1$, но одновременно бесконечно велика и напряженность ондуляторного поля, так что отношение $|\alpha_2^{(\pm)}/\nu|$ остается конечной величиной. В этом случае уравнения (49), (50) приобретают вид, совпадающий с уравнениями движения частиц в релятивистских черенковских приборах типа «0» [9]

$$\frac{dw}{d\zeta} = \mathrm{Re}\left\{\frac{i}{\nu}\,(\alpha_1^{(-)}\alpha_2^{(-)*}e^{i\theta} - \alpha_1^{(+)}\alpha_2^{(+)*}e^{-i\theta})\right\},$$

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \Delta - \frac{1}{2} + \frac{|\alpha_2^{(-)}|^2 + |\alpha_2^{(+)}|^2}{\nu^2} + \frac{1}{2\,(1-w)^2}. \tag{51}$$

Как показано в работе [10], уравнения (51) могут быть также получены в рамках модели, в которой предполагается, что электроны движутся строго вдоль слабоискривленной силовой линии суммарного магнитного поля, представляющего собой суперпозицию продольного однородного и поперечного ондуляторного полей.

Литература

[1] *Гинзбург Н. С.* В кн.: Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, 1983, в. 3, с. 26.
[2] *Гинзбург Н. С., Новожилова Ю. В.* РиЭ, 1984, т. 29, № 12, с. 2419—2429.
[3] *Миллер М. А.* Изв. вузов. Радиофизика, 1958, т. 1, № 3, с. 110—123.
[4] *Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И.* ЖЭТФ, 1979, т. 76, № 3, с. 930—943.
[5] *Гинзбург Н. С., Токман М. Д.* ЖТФ, 1984, т. 54, № 6, с. 1062—1067.
[6] *Милантьев В. П.* Изв. вузов. Физика, 1976, т. 19, № 12, с. 70—72.
[7] *Токман М. Д.* Физика плазмы, 1984, т. 10, № 3, с. 568—575.
[8] *Гинзбург Н. С., Сергеев А. С.* Тез. докл. VI Всес. симп. по сильноточной электронике. Томск, 1986, т. 3, с. 14.
[9] *Ковалев Н. Ф.* и др. В кн.: Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, 1979, в. 1, с. 76.
[10] *Гинзбург Н. С., Петелин М. И.* В кн.: Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, 1984, в. 4, с. 49.

Институт прикладной физики АН СССР
Горький

Поступило в Редакцию
7 апреля 1987 г.