УДК 537.533.335

О ФОКУСИРОВКЕ ЧАСТИЦ МАГНЕТИКОВ КВАДРУПОЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ ЛИНЗОЙ

Н. И. Штепа

Исследуются возможности фокусировки и преобразования пучков мелких (10^{-1}—10^{-4} см) частиц магнетиков квадрупольной магнитной линзой. Получены фокусные расстояния в вакууме и параметры преобразования приосевых пучков частиц в газах (жидкостях) тонкими слабыми квадрупольными магнитными линзами.

В работах [1-4] рассмотрены фокусировки и управления пучками частиц магнетиков осесимметричными, плоскими, цилиндрическими и трансаксиальными магнитными полями. Их действия на частицы магнетиков обусловлены градиентом магнитного поля. Как известно [5], квадрупольные магнитные линзы обладают сильными градиентами в приосевой области. Методика их расчета хорошо разработана, в конструктивном отношении они относительно просты. В настоящей работе исследуются возможности применения квадрупольной магнитной линзы для фокусировок и преобразований пучков частиц магнетиков.

Рассмотрение ограничивается пучками мелких (10^{-1}—10^{-4} см) однородных частиц сферической формы, достаточно разреженных так, что взаимодействиями их можно пренебречь. При движении в газах (жидкостях) скорости частиц ограничиваются применимостью закона Стокса.

Фокусировка и преобразование диа- и парамагнетиков

На частицу диа- или парамагнетика в магнитном поле действует сила $\mathbf{F}_м$, обусловленная ее намагниченностью $\mathbf{J}$. В предположении квазиоднородности поля на протяжении частицы [6]

$$\mathbf{F}_м = \frac{4}{3}\pi R^3 (\mathbf{J}\nabla)\,\mathbf{H}, \tag{1}$$

R — радиус частицы, $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля. Индуцированная намагниченность сферической частицы [7]

$$\mathbf{J} = \frac{3}{4\pi}\,\frac{\mu - 1}{\mu + 2}\,\mathbf{H}, \tag{2}$$

$\mu = \mu_1/\mu_2$, μ_1 — магнитная проницаемость частицы, μ_2 — среды, поэтому

$$\mathbf{F}_м = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} R^3 (\mathbf{H}\nabla)\,\mathbf{H}. \tag{3}$$

При движении в поле тяжести в вязкой среде на частицу еще действуют сила тяжести

$$\mathbf{F}_т = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1 \mathbf{g}, \tag{4}$$

архимедова подъемная сила

$$\mathbf{F}_A = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_2 \mathbf{g} \tag{5}$$

и стоксовская сила сопротивления

$$\mathbf{F}_c = -6\pi\eta R(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c), \tag{6}$$

ρ_1, ρ_2 — плотности частицы и среды; $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести; η — коэффициент вязкости; v_c — скорость среды, v — скорость частицы.

В декартовой системе координат, ось ox которой совпадает с осью симметрии линзы, а оси oy и oz направлены так, чтобы форма полюсов и катушек оказалась симметричной относительно плоскостей

$$y = 0, \quad z = 0, \quad y = z, \quad y = -z \tag{7}$$

при условии, что питающие катушки токи равны по величине и чередуются по направлению при переходе от катушки к соседней катушке, напряженность магнитного поля вблизи ее оси можно представить [5]

$$H_x = yz\left(\sigma' - \frac{1}{12}(y^2 + z^2)\sigma'''\right) + Q_x, \quad H_y = z\left(\sigma - \frac{1}{12}(3y^2 + z^2)\sigma''\right) + Q_y,$$

$$H_z = y\left(\sigma - \frac{1}{12}(y^2 + 3z^2)\sigma''\right) + Q_z, \tag{8}$$

где

$$\sigma = \sigma(x) = \frac{\partial H_y}{\partial z}\bigg|_{y=z=0} = \frac{\partial H_z}{\partial y}\bigg|_{y=z=0}$$

— поперечный градиент поля на оси квадрупольной линзы; Q_x, Q_y, Q_z — выражения, содержащие члены пятого и выше порядков разложения.

В дальнейшем ограничимся параксиальным приближением и будем полагать, соблюдая осевую симметрию, что сила тяжести и поток постоянной скорости вязкой среды направлены вдоль оси линзы по движению частиц.

Сохраняя в разложении (8) члены первого порядка малости, получим

$$H_x = 0, \quad H_y = \sigma z, \quad H_z = \sigma y. \tag{9}$$

Дифференциальные уравнения движения частицы в таком приближении запишутся

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} = kg + \lambda v_c, \quad \ddot{y} + \lambda y - a\sigma^2 y = 0, \quad \ddot{z} + \lambda\dot{z} - a\sigma^2 z = 0, \tag{10}$$

где

$$\lambda = \frac{9\eta}{2R^2\rho_1}, \quad k = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right), \quad a = \frac{3}{4\pi\rho_1}\frac{\mu - 1}{\mu + 2}.$$

Преобразуем их к виду

$$\dot{x}'\dot{x} + \lambda\dot{x} = kg + \lambda v_c, \tag{11}$$

$$y'' + \frac{kg + \lambda v_c}{\dot{x}^2}y' - \frac{a\sigma^2}{\dot{x}^2}y = 0, \tag{12}$$

$$z'' + \frac{kg + \lambda v_c}{\dot{x}^2}z' - \frac{a\sigma^2}{\dot{x}^2}z = 0 \tag{13}$$

(штрихами обозначены производные по x). Уравнения (12) и (13) сводятся к одному комплексному

$$u'' + \frac{kg + \lambda v_c}{\dot{x}^2}u' - \frac{a\sigma^2}{\dot{x}^2}u = 0, \tag{14}$$

где

$$u = y + iz \quad \text{или} \quad u = re^{i\varphi}, \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{z}{y}.$$

Поскольку (11) определяет $\dot{x}$ как функцию x, то уравнение (14) представляет собой однородное дифференциальное уравнение второго порядка с коэффициентами — функциями x. Из его общего вида аналогично подобному заключению в электронной оптике [8] приходим к выводу о возможности существования фокусировки параксиальных пучков частиц диа- и парамагнетиков квадрупольной магнитной линзой. Как отмечалось в [1], действие диссипативной силы [6] существенно осложняет фокусировку, и вопрос о ее существовании необходимо решать отдельно в каждой конкретной задаче.

Ф о к у с и р о в к а в в а к у у м е. В вакууме и невесомости осевая скорость частицы сохраняется

$$\dot{x} = v_0,$$

уравнение (14) существенно упрощается

$$u'' - \frac{a\sigma^2}{v_0^2} u = 0. \tag{15}$$

В меридианной плоскости ($\varphi = \mathrm{const}$) оно запишется

$$r'' - \frac{a\sigma^2}{v_0^2} c = 0, \tag{16}$$

откуда следует, что для парамагнетиков ($\mu > 1$, $a > 0$) $r'' > 0$ линза обладает рассеивающим действием, а для диамагнетиков ($\mu < 1$, $a < 0$) $r'' < 0$ собирательным.

Относительно просто найти фокусное расстояние f тонкой слабой квадрупольной магнитной линзы. В области ее действия $x_1 < x < x_2$ траектория частицы мало изменяется, поэтому $r_1 \approx r_2$. Проинтегрировав (16) в этом приближении, получим

$$r_2' = r_1' + \frac{a r_1}{v_0^2} \int\limits_{x_1}^{x_2} \sigma^2 dx. \tag{17}$$

Полагая, что частица до линзы двигалась параллельно оси $r_1' = 0$, и учитывая, что после линзы она движется прямолинейно с наклоном к оси r_2', находим фокусное расстояние

$$f = -\frac{v_0^2}{a \int\limits_{x_1}^{x_2} \sigma^2 dx}. \tag{18}$$

Для диамагнетиков $f > 0$ линза собирательная, а для парамагнетиков $f < 0$ рассеивающая, что уже было отмечено.

При действии силы тяжести осевая скорость $\dot{x} = v_0 + gt$ частицы будет расти. Поэтому после линзы траектория становится параболической, что приводит к «растяжению» фокусировки вдоль оси. Так, для диамагнетиков фокусное расстояние короткой слабой линзы становится

$$f^* = T\left(v_2 + \frac{g}{2} T\right), \tag{19}$$

где

$$T = \frac{v_2}{|a| \int\limits_{x_1}^{x_2} \sigma^2 e^{\frac{kg}{v_0^2}(x - x_2)} dx}, \tag{20}$$

v_2 — осевая скорость частицы при $x = x_2$. Сравнивая f и f^*, видим, что $f^* > f$.

П р е о б р а з о в а н и е п у ч к о в в в я з к о й с р е д е. При движении частиц диа- и парамагнетиков в газе (жидкости) с помощью квадрупольной магнитной линзы можно осуществлять преобразование их пучков. Остановимся на примере преобразования цилиндрического осесимметричного параксиального пучка частиц тонкой слабой линзой. Пусть рассматриваемый пучок частиц захватывается (до линзы) стационарным потоком вязкой среды, движущейся с постоянной скоростью вдоль оси линзы. Установившаяся скорость v частиц, с которой они входят в линзу, согласно (11), выразится

$$v = v_c + kg/\lambda. \tag{21}$$

В поле тонкой слабой линзы вблизи оси расстояние r частицы от нее изменяется незначительно $r \approx r \approx r_2$, поэтому уравнение (14) можно заменить приближенным

$$r'' + \frac{\lambda}{v} r' = \frac{a\sigma^2}{v^2} r_1. \tag{22}$$

Проинтегрировав его методом вариации произвольной постоянной, находим r_2' — наклон траектории частицы относительно оси ox по выходе из линзы

$$r_2' = \frac{r_1}{v^2} N, \tag{23}$$

$$N = a \int_{x_1}^{x_2} \sigma^2 e^{\frac{\lambda}{v}(x-x_2)} dx. \tag{24}$$

Интегрирование (22) после линзы ($\sigma=0$) с учетом (23) дает

$$r = r_1\left(1 + \frac{N}{\lambda v}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{v}(x-x_2)}\right)\right). \tag{25}$$

Из (25) видно, что найденная траектория за линзой асимптотически приближается к

$$r_\infty = r_1 (1 + N/\lambda v) \tag{26}$$

и на достаточном расстоянии $x \sim x_2$ от линзы, когда

$$e^{-\frac{\lambda}{v}(x-x_2)} \ll 1, \tag{27}$$

практически становится параллельной оси ox с $r=r_\infty$. В итоге пучок частиц, движущихся параллельно оси до линзы, преобразуется в ему подобный сжатый или расширенный.

Коэффициент преобразования пучка

$$\gamma = r_\infty / r_1, \tag{28}$$

согласно (26), выразится

$$\gamma = 1 + N/\lambda v. \tag{29}$$

В случае

$$e^{\frac{\lambda}{v}(x-x_2)} \approx 1, \tag{30}$$

что справедливо при малой вязкости и больших скоростях частиц, выражение (29) упрощается

$$\gamma = 1 + \frac{a}{\lambda v} \int_{x_1}^{x_2} \sigma^2 dx. \tag{31}$$

Для частиц парамагнетиков $a > 0$, поэтому $N > 0$ и $\gamma > 1$, т. е. при преобразовании пучок частиц расширяется. В случае диамагнетиков $a < 0$, $N < 0$ и $\gamma < 1$ пучок сжимается; если $\gamma=0$, пучок вырождается в тонкий осевой шнур. Если же $\gamma < 0$, то для диамагнетиков возможно «перевернутое» сжатие при $|\gamma| < 1$ и расширение при $|\gamma| > 1$.

Расстояние S формирования пучка определяем, как и в [1], из соотношения

$$\left| \frac{r_\infty - r_1}{r_\infty - r(S)} \right| = e \tag{32}$$

(e — неперово число), откуда следует, что для тонкой слабой линзы

$$S = v/\lambda \tag{33}$$

или

$$S = \left(r_c + \frac{2R^2\rho_1 g}{9\eta}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} g\right)\right)\frac{2R^2\rho_1}{9\eta}. \tag{34}$$

Зависимость γ и S от размеров, плотности частиц, их магнитной проницаемости может быть использована для их сепарации.

Фокусировка и преобразование ферромагнетиков

Пучки частиц магнитомягких ферромагнетиков, намагниченность которых (в области, далекой от насыщения) можно считать пропорциональной напряженности поля линзы, фокусируются и преобразуются линзой, как и пучки парамагнетиков. При этом по сравнению с парамагнетиками действие поля линзы на ферромагнетики значительно эффективнее вследствие больших значений μ.

Для пучков намагниченных частиц ферромагнетиков с постоянной $J_0 = \mathrm{const}$ остаточной намагниченностью, значительно превосходящей индуцированную полем линзы намагниченность

$$J_0 \gg \frac{3}{4\pi}\frac{\mu - 1}{\mu + 2} H, \tag{35}$$

фокусирующие и преобразующие действия магнитной квадрупольной линзы существенно изменяются. В предположении, что намагниченность частиц при движении направлена по напряженности поля,

$$\mathbf{J}_0 = J_0 \frac{\mathbf{H}}{|H|}. \tag{36}$$

Тогда для частицы, увлекаемой вязкой средой, при установившемся движении дифференциальное уравнение траектории в меридианной плоскости в поле короткой слабой линзы ($x_1 < x < x_2$) в параксиальном приближении запишется

$$r'' + \frac{\lambda}{v} r' - \frac{J_0 |\sigma|}{\rho_1 v^2} = 0. \tag{37}$$

Из его общего вида следует, что линза не обладает обычными фокусирующими свойствами по отношению к пучкам ферромагнетиков с остаточной намагниченностью. Так, частица, траектория которой до линзы параллельна оси ($r_1' = 0$), выходит из линзы под наклоном к оси

$$r_2' = \frac{J_0}{\rho_1 v^2}\int_{x_1}^{x_2} |\sigma| e^{-\frac{\lambda}{v}(x_2 - x)}\, dx. \tag{38}$$

Поскольку $r_2' > 0$ и не зависит от r_1, то все одинаковые частицы по выходе из линзы будут иметь траектории с одинаковыми начальными наклонами относительно оси линзы. В результате цилиндрический однородный пучок, симметричный относительно оси линзы, после прохождения ее становится расходящимся (куполообразным) полым со стороны оси. В частности, в вакууме при невесомости такой пучок после линзы принимает конусообразную пустотелую форму.

Преобразование квадрупольной линзой пучков частиц магнитомягких ферромагнетиков, остаточной намагниченностью которых можно пренебречь, движущихся в вязкой среде, аналогично описанному ранее преобразованию парамагнитных пучков. Т. е. после прохождения короткой слабой линзы цилиндрический осесимметричный пучок расширяется и преобразуется в ему подобный с параметрами преобразования γ и S, определяемыми формулами (29), (34). При этом, как и при фокусировке, процесс преобразования по сравнению с парамагнетиками значительно эффективнее.

При преобразовании пучков частиц ферромагнетиков с постоянной остаточной намагниченностью короткой слабой квадрупольной линзой цилиндрический осесимметричный пучок, расширяясь, преобразуется (в первом приближении) в осесимметричный трубчатый пучок с наружным и внутренним радиусами

$$r_{\text{н}} = r_1 + r_2' \frac{v}{\lambda}, \quad r_{\text{в}} = r_2' \frac{v}{\lambda}. \qquad (39), (40)$$

«Толщина стенок» такого трубчатого пучка равна радиусу r_1 цилиндрического пучка до преобразования. Расстояние S формирования преобразованного пучка определяется, согласно (32), по формулам (33), (34).

Зависимость параметров фокусировок и преобразований пучков частиц ферромагнетиков от их характеристик, как и в случае диа- и парамагнетиков, может быть использована для сепарации частиц.

В заключение отметим, что установленные особенности фокусировок и преобразований пучков мелких частиц магнетиков при ряде ограничений и упрощений на примере тонкой слабой квадрупольной магнитной линзы помогут оценить и предвидеть возможности фокусировок и преобразований пучков магнетиков толстыми сильными квадрупольными магнитными линзами при применении их в лабораторных исследованиях и в практике порошковой технологии.

Литература

[1] *Штепа Н. И.* ЖТФ, 1979, т. 49, № 9, с. 1839—1845.
[2] *Штепа Н. И.* ЖТФ, 1982, т. 52, № 4, с. 729—734.
[3] *Штепа Н. И.* ЖТФ, 1984, т. 54, № 3, с. 659—663.
[4] *Штепа Н. И.* ЖТФ, 1986, т. 56, № 10, с. 1967—1972.
[5] *Штеффен К.* Оптика пучков высокой энергии. М.: Мир, 1969, с. 19, 58.
[6] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: ГИФМЛ, 1959, с. 100.
[7] *Измаилов С. И.* Курс электродинамики. М.: Учпедгиз, 1952, с. 202.
[8] *Кельман В. М., Явор С. Я.* Электронная оптика. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959, с. 120.

Черниговский государственный
педагогический институт
им. Т. Г. Шевченко

Поступило в Редакцию
24 июня 1987 г.