1988 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 58, в. 9
1988 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 58, № 9

УДК 537.222

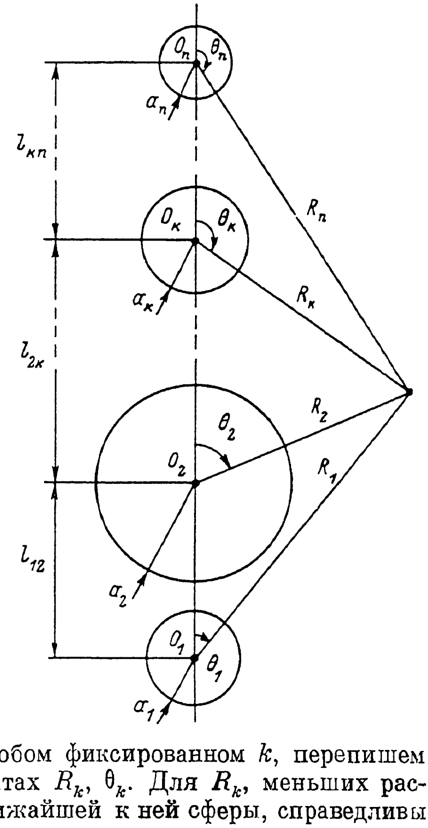
ЕМКОСТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ СФЕРИЧЕСКИХ ПРОВОДНИКОВ

Ю. А. Годин, А. С. Зильберглейт

С помощью переразложения осесимметричных гармонических функций задача сводится к решению бесконечной векторной системы линейных алгебраических уравнений нормального типа, которое находится методом редукции с экспоненциальной скоростью сходимости, а также в виде ряда по степеням малого безразмерного геометрического параметра. Этими способами найдены простые выражения для емкостных коэффициентов. Приводятся примеры.

1. Постановка задачи и сведение ее к нормальной системе линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим n сферических проводников, имеющих потенциалы V^k ($k=1, 2, \ldots, n$) и расположенных на одной оси (см. рисунок). Свяжем с центром k-й сферы O_k радиуса a_k систему сферических координат R_k, θ_k, φ. Расстояние между сферами с номерами i и j обозначим через l_{ij}, так что $l_{ij}=l_{ij} > 0$.



Потенциал в пространстве должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u|_{R_k=a_k} = V^k, \; k=1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

и стремиться к нулю на бесконечности. В соответствии с этим представим решение (1) в виде

$$u = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} A_j^i \left(\frac{a_i}{R_i}\right)^{j+1} P_j(\cos\theta_i) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j^k \left(\frac{a_k}{R_k}\right)^{j+1} P_j(\cos\theta_k) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} \times$$
$$\times A_j^i \left(\frac{a_i}{R_i}\right)^{j+1} P_j(\cos\theta_i), \tag{3}$$

где $P_j(\cos\theta_i)$ — многочлены Лежандра, A_j^i — искомые коэффициенты.

Чтобы удовлетворить условию (2) при любом фиксированном k, перепишем второе слагаемое в выражении (3) в координатах R_k, θ_k. Для R_k, меньших расстояния от центра сферы с номером k до ближайшей к ней сферы, справедливы переразложения (см. [1])

$$\left(\frac{a_i}{R_i}\right)^{j+1} P_j(\cos\theta_i) = (-1)^j \left(\frac{a_i}{l_{ki}}\right)^{j+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+j)!}{m!\,j!} \left(\frac{R_k}{l_{ki}}\right)^m P_m(\cos\theta_k), \quad k < i,$$

$$\left(\frac{a_i}{R_i}\right)^{j+1} P_j(\cos\theta_i) = \left(\frac{a_i}{l_{ki}}\right)^{j+1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(m+j)!}{m!\,j!} \left(\frac{R_k}{l_{ki}}\right)^m P_m(\cos\theta_k), \ k > i. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ A_m^k \left(\frac{a_k}{R_k}\right)^{m+1} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(m+j)!}{m!\,j!} \left(\frac{a_i}{l_{ki}}\right)^{j+1} \left(\frac{R_k}{l_{ki}}\right)^m + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(m+j)!}{m!\,j!} A_j^i \left(\frac{a_i}{l_{ki}}\right)^{j+1} \left(\frac{R_k}{l_{ki}}\right)^m \right\} P_m(\cos\theta_k). \tag{5}$$

В силу (5) из граничного условия (2) следует система уравнений относительно неизвестных A_m^k

$$A_m^k + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(m+j)!}{m!\,j!} A_j^i \left(\frac{a_i}{l_{ki}}\right)^{j+1} \left(\frac{a_k}{l_{ki}}\right)^m +$$
$$+ \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(m+j)!}{m!\,j!} A_j^i \left(\frac{a_i}{l_{ki}}\right)^{j+1} \left(\frac{a_k}{l_{ki}}\right)^m = V^k \delta_{m0},$$
$$k = 1, 2, \ldots, n, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

причем δ_{m0} — символ Кронекера.

Обозначим через h наибольшее из отношений радиуса каждой сферы к расстоянию от ее центра до центров смежных сфер, т. е.

$$h = \max\left\{\frac{a_1}{l_{1,2}};\ \frac{a_2}{l_{2,1}};\ \frac{a_2}{l_{2,3}};\ \ldots;\ \frac{a_k}{l_{k,k-1}};\ \frac{a_k}{l_{k,k+1}};\ \ldots;\ \frac{a_k}{l_{n-1,n}}\right\}, \tag{7}$$
$$0 < h < 1,$$

и положим

$$\mu_k^i = \frac{1-\delta_{ik}}{h} \frac{a_i}{l_{ki}}, \ 0 < \mu_k^i \leqslant 1, \ \mu_i^i = 0, \tag{8}$$

так что

$$a_i/l_{ki} = \mu_k^i h, \quad i \neq k.$$

В этих обозначениях система (6) примет вид

$$A_m^k + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(m+j)!}{m!\,j!} A_j^i (\mu_k^i)^{j+1} (\mu_j^k)^m h^{m+j+1} + \tag{9}$$
$$+ \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(m+j)!}{m!\,j!} A_j^i (\mu_k^i)^{j+1} (\mu_j^k)^m h^{m+j+1} = V^k \delta_{mn},$$
$$k = 1, 2, \ldots, n, \ m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ряд (3), представляющий потенциал, мажорированно сходится, если коэффициенты A_j^i ограничены. Поэтому будем искать решение системы (9) в банаховом пространстве $l^\infty(\mathscr{R}^n)$ ограниченных последовательностей, элементами которых являются n-мерные векторы [2]

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{A}_m\}_{m=0}^{\infty}, \quad \text{где} \quad \mathbf{A}_m = \{A_m^1, A_m^2, \ldots, A_m^n\}.$$

Норму элемента определим равенством

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{m=0,1,\ldots} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_j^i|. \tag{10}$$

Используя векторные обозначения, представим (9) как бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного вектора $\mathbf{A}_m$

$$\mathbf{A}_m + \sum_{j=0}^{\infty} G_{mj}(h)\,\mathbf{A}_j = \mathbf{V}\delta_{m0}, \tag{11}$$

где $G_{mj}(h)$ — $n \times n$ — матрица, элементы которой суть

$$G_{mj}^{ki}(h) = (-1)^{\sigma_{mj}^{ki}} \frac{(m+j)!}{m!\,j!} (\mu_k^i)^{j+1} (\mu_i^k)^m h^{m+j+1}, \tag{12}$$

причем

$$\sigma_{mj}^{ki} = \begin{cases} (-1)^m, & 1 \leqslant i < k, \\ (-1)^j, & k < i \leqslant n. \end{cases}$$

Матрицы G_{mj} экспоненциально убывают при $m \to \infty$ или $j \to \infty$, и если $a_i + a_k < l_{ki}$, то

$$\sum_{m,\,j=0}^{\infty} \| G_{mj}(h) \| < +\infty, \tag{13}$$

где $\|\cdot\|$ — любая согласованная [3] матричная норма, ибо вследствие (8) и (12)

$$\sum_{m,\,j=0}^{\infty} \| G_{mj}(h) \| = \sum_{m,\,j=0}^{\infty} \frac{(m+j)!}{m!\,j!} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left(\frac{a_i}{l_{ki}}\right)^{j+1} \left(\frac{a_k}{l_{ki}}\right)^m \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m,\,j=0}^{\infty} \frac{(m+j)!}{m!\,j!} \sum_{\substack{k,\,i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left(\frac{a_i}{l_{ki}}\right)^{j+1} \left(\frac{a_k}{l_{ki}}\right)^m = \sum_{\substack{k,\,i=1 \\ i \neq k}}^{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_i}{l_{ki} - a_i} \left(\frac{a_k}{l_{ki} - a_i}\right)^m =$$

$$= \sum_{\substack{k,\,i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{a_i}{l_{ki} - a_i - a_k}. \tag{14}$$

Значит, (11) является нормальной векторной системой Пуанкаре—Коха [4].

Исходя из вида системы (11), определим в пространстве $l^\infty(\mathscr{R}^h)$ линейный непрерывный оператор $G(h)$, действующий по формуле

$$(G(h)\,\mathbf{A})_m = \sum_{j=0}^{\infty} G_{mj}(h)\,\mathbf{A}_j. \tag{15}$$

С учетом введенных обозначений систему (11) можно представить в виде операторного уравнения

$$\mathbf{A} + G(h)\,\mathbf{A} = \mathbf{V}. \tag{16}$$

Оператор $G(h)$ обладает следующими свойствами.

1. Если для всех i и k $a_i + a_k < l_{ki}$, т. е. сферы не соприкасаются, то $G(h)$ вполне непрерывен в $l^\infty(\mathscr{R}^n)$ [1] при любом фиксированном h и представим в виде сходящегося по операторной норме ряда

$$G(h) = \sum_{s=1}^{\infty} G^{(s)} h^s, \tag{17}$$

где $G^{(s)}$ — конечномерные операторы, определяемые по формуле

$$(G^{(s)}A)_m^k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (-1)^{\sigma_{ms-m-1}^{ki}} \frac{(s-1)!}{(s-m-1)!\,m!} A_{s-m-1}^i (\mu_k^i)^{s-m} (\mu_i^k)^m. \tag{18}$$

---

[1] Можно доказать [2], что условие (13) является достаточным для полной непрерывности оператора $G(h)$ из $l^1(\mathscr{R}^n)$ в $l^1(\mathscr{R}^n)$.

2. Если, кроме того, $h < 1/n$, то $G(h)$ является оператором сжатия в пространстве $l^\infty(\mathscr{R}^n)$

$$\|G(h)\| < 1. \tag{19}$$

Из утверждений «1», «2», доказательство которых вынесено в Приложение, вытекает, что если $a_i + a_k < l_{ki}$, то решение (11) существует и единственно для любых h, кроме, возможно, счетного набора значений этого параметра, и может быть найдено методом редукции с экспоненциальной скоростью сходимости или же в виде ряда по степеням h, сходящегося для достаточно малых значений этого параметра, в частности при $h < 1/n$. В последнем случае решение может быть построено методом итераций с экспоненциальной скоростью сходимости. Разложение в ряд и метод редукции применяются далее для эффективного решения системы (11).

2. Построение эффективного решения и вычисление емкостных коэффициентов

Итак, будем искать решение в виде степенно́го ряда

$$A_m^k = V^k \delta_{m0} + \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_{ms}^k h^{m+s+1}. \tag{20}$$

Подставляя это в (9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h, находим рекуррентные формулы для коэффициентов α_{ms}^k

$$\alpha_{m0}^k = (-1)^{m+1} \sum_{i=1}^{k-1} V^i \mu_k^i (\mu_i^k)^m - \sum_{i=k+1}^{n} V^i \mu_k^i (\mu_i^k)^m,$$

$$\alpha_{ms}^k = (-1)^{m+1} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{\left[\frac{s-1}{2}\right]} \frac{(m+j)!}{m!\,j!} \alpha_{j,\,s-2j-1}^i (\mu_k^i)^{j+1} (\mu_i^k)^m -$$

$$- \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=0}^{\left[\frac{s-1}{2}\right]} (-1)^j \frac{(m+j)!}{m!\,j!} \alpha_{j,\,s-2j-1}^i (\mu_k^i)^{j+1} (\mu_i^k)^m, \tag{21}$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots; \quad s = 1, 2, \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

причем $\left[\frac{s-1}{2}\right]$ означает целую часть числа $\frac{s-1}{2}$.

Емкостные коэффициенты связаны с зарядом и потенциалами проводников по формуле 5

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} C_{ik} V^i. \tag{22}$$

Заряд на k-м шарике равен

$$Q_k = -\varepsilon \int_{S_k} \frac{\partial u}{\partial R_k}\bigg|_{R_k = a_k} ds,$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды. Подставляя сюда выражение потенциала из (3), получим

$$Q_k = 4\pi\varepsilon a_k A_0^k. \tag{23}$$

Вычисляя по (21) несколько первых коэффициентов α_{0s}^k в выражении (20) для A_0^k, из (22) и (23) для емкостных коэффициентов находим

$$c_{ik} = 4\pi\varepsilon a_k \Big\{\delta_{ik} = h\mu_k^i + h^2 \sum_{j=1}^{n} \mu_j^i \mu_k^j - h^3 \sum_{j,\,p=1}^{n} \mu_j^i \mu_p^j \mu_k^p + h^4 \sum_{j,\,p,\,s=1}^{n} \mu_j^i \mu_p^j \mu_s^p \mu_k^s +$$

$$+ h^4 \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sign}(i-j) \operatorname{sign}(k-j) \mu_j^i \mu_i^j (\mu_k^j)^2 - h^5 \sum_{j,\,p,\,s,\,t=1}^{n} \mu_j^i \mu_p^j \mu_s^p \mu_t^s \mu_k^t -$$

$$-h^5\sum_{j,\,p=1}^{n}\operatorname{sign}(i-j)\operatorname{sign}(p-j)\,\mu_j^i\mu_i^j\mu_k^p(\mu_p^j)^2-$$
$$-h^5\sum_{j,\,p=1}^{n}\operatorname{sign}(j-p)\operatorname{sign}(k-p)\,\mu_j^i\mu_p^j\mu_j^p(\mu_k^p)+O(h^6)\Big\}. \tag{24}$$

Перейдем теперь к построению решения (11) по методу редукции. Учитывая соотношения (22) и (23), для $m=0$ находим

$$c_{ik}\approx 4\pi\varepsilon a_k\{(I+G_{00})^{-1}\}^{ki}, \tag{25}$$

где I — единичная матрица. Матрица $I+G_{00}$ имеет простой вид

$$(I+G_{00})^{ki}=\delta_{ki}+a_i/l_{ki}. \tag{26}$$

Редукция (11) при $m=0$ и 1 дает следующее значение емкостных коэффициентов:

$$c_{ik}\approx 4\pi\varepsilon a_k\{[I+G_{00}-G_{01}(I+G_{11})^{-1}G_{10}]^{-1}\}^{ki}. \tag{27}$$

Здесь

$$G_{01}^{ki}=\operatorname{sign}(k-i)\left(\frac{a_i}{l_{ki}}\right)^2,\quad G_{10}^{ki}=\operatorname{sign}(i-k)\frac{a_i a_k}{l_{ki}^2},$$
$$(I+G_{11})^{ki}=\delta_{ki}-2\frac{a_k}{l_{ki}}\left(\frac{a_i}{l_{ki}}\right)^2. \tag{28}$$

Эффективность найденных формул демонстрируется следующим примером.

3. Вычисление емкостных коэффициентов в случае двух сферических проводников

Пусть $n=2$ и радиусы проводников суть $a_1>a_2$. Согласно (7), (8), имеем

$$h=a_1 l,\ \mu_2^1=1,\ \mu_1^2=a_2/a_1$$

и из (24) для емкостных коэффициентов находим:

$$c_{11}=4\pi\varepsilon a_1\left\{1+\frac{a_1}{l}\frac{a_2}{l}+\left(\frac{a_1}{l}\right)^2\left(\frac{a_2}{l}\right)^2+\frac{a_1}{l}\left(\frac{a_2}{l}\right)^3+O\left(\left(\frac{a_1}{l}\right)^6\right)\right\},$$
$$c_{22}=4\pi\varepsilon a_2\left\{1+\frac{a_1}{l}\frac{a_2}{l}+\left(\frac{a_1}{l}\right)^2\left(\frac{a_2}{l}\right)^2+\left(\frac{a_1}{l}\right)^3\frac{a_2}{l}+O\left(\left(\frac{a_1}{l}\right)^6\right)\right\},$$
$$c_{12}=c_{21}=-4\pi\varepsilon\frac{a_1a_2}{l}\left\{1+\frac{a_1}{l}\frac{a_2}{l}+\left(\frac{a_1}{l}\right)^2\left(\frac{a_2}{l}\right)^2+\frac{a_1}{l}\left(\frac{a_2}{l}\right)^3+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{a_1}{l}\right)^3\frac{a_2}{l}+O\left(\left(\frac{a_1}{l}\right)^6\right)\right\}. \tag{29}$$

Найденные значения емкостных коэффициентов совпадают со значениями, вычисленными с помощью метода изображений [5, с. 126]. По методу редукции для $m=0$ из (25) получается следующее решение:

$$c_{11}=4\pi\varepsilon\frac{a_1}{1-\frac{a_1}{l}\frac{a_2}{l}},\quad c_{22}=4\pi\varepsilon\frac{a_2}{1-\frac{a_1}{l}\frac{a_2}{l}},$$
$$c_{12}=c_{21}=-4\pi\varepsilon\frac{a_1a_2}{l}\frac{1}{1-\frac{a_1}{l}\frac{a_2}{l}}. \tag{30}$$

Эти выражения совпадают с приведенными в [5, с. 49] значениями емкостных коэффициентов, вычисленных в случае удаленных проводников.

Используя приведенные формулы, можно определить емкость проводника, состоящего из двух одинаковых соприкасающихся шариков, точное значение которой [6, с. 264]

$$c=8\pi\varepsilon a\ln 2.$$

В рассматриваемом случае

$$V^1 = V^2 = V,\ a_1 = a_2 = a,\ l = 2a,\ \mu_2^1 = \mu_1^2 = 1,\ h = 1/2.$$

Заряд такого проводника равен сумме зарядов на каждом из шариков, так что значение емкости, получающееся по (24), следует удвоить

$$C = 8\pi\varepsilon a\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{2}{16} - \frac{3}{32} + \cdots\right). \tag{31}$$

В этом случае сходимость ряда (31) не гарантирована, однако сумма первых шести членов ряда дает результат, отличающийся от точного приблизительно на 5 %, а учет последующих членов делает эту погрешность еще меньшей.

С помощью метода редукции емкость C вычисляется по формуле

$$C = 8\pi\varepsilon a\,(c_{11} + c_{12}),$$

где C_{11} и C_{12} находятся по (25) или (27). Так, для $m = 0$ из (25) получаем

$$C = \frac{16}{3}\pi\varepsilon a$$

с относительной погрешностью 3.8 %. Редукция для $m = 0.1$ по (27) дает такое значение емкости:

$$C = \frac{160}{29}\pi\varepsilon a.$$

Здесь ошибка составляет всего 0.50 %.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Дадим доказательство учреждений «1», «2», сформулированных в конце раздела 1. Разложение (17) формально вытекает из определения оператора $G(h)$, поэтому остается показать сходимость ряда (17). Из формулы (18) получаем

$$\|G^{(s)}\| \leqslant \max_{0\leqslant m\leqslant s-1}\ \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{(s-1)!}{(s-m-1)!\,m!}(\mu_k^i)^{s-m}(\mu_i^k)^m,\quad s = 1,\ 2,\ \ldots,$$

и ряд (17) мажорируется по операторной норме выражением (ср. с (14))

$$\sum_{s=1}^{\infty} \max_{0\leqslant m\leqslant s-1}\ \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{(s-1)!}{(s-m-1)!\,m!}(\mu_k^i)^{sm}(\mu_i^k)^m h^s \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{s-1}\sum_{\substack{i,\ k=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{(s-1)!}{(s-m-1)!\,m!}(\mu_k^i)^{s-m}(\mu_i^k)^m h^s =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=m+1}^{\infty}\sum_{\substack{i,\ k=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{(s-1)!}{(s-m-1)!\,m!}(\mu_k^i)^{s-m}(\mu_i^k)^m h^s =$$

$$= \sum_{m,\ j=0}^{\infty}\sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{(m+j)!}{m!\,j!}(\mu_k^i)^{j+1}(\mu_i^k)^m h^{m+j+1} = \sum_{m,\ j=0}^{\infty}\sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{(m+j)!}{m!\,j!}\left(\frac{a_i}{l_{ki}}\right)^{j+1}\left(\frac{a_k}{l_{ki}}\right)^m =$$

$$= \sum_{\substack{i,\ k=1\\ i\neq k}}^{n}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_i}{l_{ki}-a_i}\left(\frac{a_k}{l_{ki}-a_i}\right)^m = \sum_{\substack{i,\ k=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{a_i}{l_{ki}-a_i-a_k}.$$

Для доказательства учреждения «2» оценим норму оператора $G(h)$ при $h < 1/n$

$$\|G(h)\| = \sup_{\substack{\|\mathbf{A}\|=1\\ \mathbf{A}\in l^\infty(\mathscr{R}^n)}} \|G(h)\,\mathbf{A}\|\, l^\infty(\mathscr{R}^n) =$$

$$= \sup_{\substack{\|\mathbf{A}\|=1 \\ \mathbf{A}\in l^{\infty}(\mathscr{R}^n)}} \sup_{m=0,\,1,\,\ldots} \max_{1\leqslant k\leqslant n} \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{\sigma_{mj}^{ki}} \frac{(m+j)\,!}{m\,!\,j\,!} A_j^i \left(\frac{a_i}{l_{ki}}\right)^{j+1} \left(\frac{a_k}{l_{ki}}\right)^m \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{m=0,\,1,\,\ldots} \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m+j)\,!}{m\,!\,j\,!} \left(\frac{a_i}{l_{ki}}\right)^{j+1} \left(\frac{a_k}{l_{ki}}\right)^m =$$

$$= \sup_{m=0,\,1,\,\ldots} \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{a_i}{l_{ki}-a_i} \left(\frac{a_k}{l_{ki}-a_i}\right)^m \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{a_i}{l_{ki}-a_i} =$$

$$= \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{\mu_k^i h}{1-\mu_k^i h} \leqslant \frac{(n-1)\,h}{1-h},$$

откуда следует неравенство (19).

Литература

[1] *Годин Ю. А., Зильберглейт А. С.* ЖТФ, 1986, т. 56, № 6, с. 1082—1090.
[2] *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
[3] *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
[4] *Каган В. Ф.* Основания теории определителей. Одесса, 1922. 522 с.
[5] *Смайт Т. В.* Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.
[6] *Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С.* Сборник задач по математической физике. М.: ГИТТЛ, 1955. 420 с.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР
Ленинград

Поступило в Редакцию
11 февраля 1987 г.