

УДК 537.29

## К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИСКРИВЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

М. Д. Габович, Э. А. Пашицкий

Рассмотрена электрокапиллярная неустойчивость искривленной (параболической) поверхности жидкого металла и тонкой жидкометаллической пленки в электрическом поле. Показано, что аperiodическая неустойчивость малых возмущений возникает даже в том случае, когда отрицательное полеовое давление по абсолютной величине не превышает равновесного давления Лапласа.

### Введение

Как известно [1], на плоской поверхности жидкого металла с коэффициентом поверхностного натяжения  $\alpha$  под действием постоянного электрического поля  $E_0$  возникает аperiodическая неустойчивость длинноволновых возмущений с волновыми числами  $k < E_0^2/4\pi\alpha$  — так называемая электрокапиллярная неустойчивость Тонкса—Френкеля.

Однако в ряде практически важных случаев поверхность жидкого металла независимо от приложенного электрического поля является сильно искривленной, например в процессе истечения жидкой струи [2, 3] либо в результате параметрического возбуждения нелинейных капиллярных волн в расплаве [4, 5] при воздействии внешней периодической силы (ультразвука, переменного газодинамического или полевого давления), либо при смачивании тонкой пленкой жидкого металла поверхности твердого ядра (иглы) с малым радиусом кривизны на конце ( $R_0 \leq 10$  мкм), которые обычно используются в качестве эмиттеров в жидкометаллических источниках ионов (ЖМИИ) [6].

В настоящей работе рассмотрена аperiodическая электрокапиллярная неустойчивость нелинейной волны и искривленной поверхности смачивающей жидкометаллической пленки в условиях, когда напряженность внешнего электрического поля  $E_0$  относительно невелика, так что отрицательное полеовое давление  $P_E = -E_0^2/8\pi$  по абсолютной величине не превышает равновесное давление Лапласа  $P_L = 2\alpha/R_0$  на вершине волны или иглы, но максимальный инкремент экспоненциального нарастания неустойчивых возмущений  $\gamma_{\max}$  гораздо больше характерного обратного времени движения (изменения формы) поверхности жидкого металла. Такая неустойчивость может быть причиной возникновения вытянутых жидкометаллических острий на гребнях нелинейных капиллярных волн [4] и острых выступов или струй на вершинах смоченных жидким металлом эмиттеров ЖМИИ [6].

### 1. Неустойчивость нелинейной капиллярной волны

В экспериментах [4] на поверхности быстро замороженного металлического расплава с помощью растрового электронного микроскопа наблюдалась панорама нелинейных капиллярных волн с характерным пространственным периодом (длиной волны)  $\lambda_0 \approx 30 \div 50$  мкм и сильно вытянутыми застывшими остриями на вершинах, где концентрируются силовые линии внешнего электрического

поля и, следовательно, может возникать электрокапиллярная неустойчивость [1].

В связи с этим рассмотрим неустойчивость искривленной поверхности жидкого металла в электрическом поле, аппроксимируя форму отдельной нелинейной волны параболоидом вращения

$$z(r) = \frac{R_0}{2} (1 - r^2/R_0^2)$$

с радиусом кривизны при вершине  $R_0 \ll \lambda_0$ . Будем считать, что периодические колебания амплитуды волны с частотой  $\omega_0$  происходят адиабатически медленно по сравнению с характерным временем развития неустойчивости, т. е. инкремент нарастания возмущений  $\gamma \gg \omega_0$ . Кроме того, предположим, что длины волн неустойчивых возмущений  $\lambda$  гораздо больше толщины приповерхностного вязкого (турбулентного) слоя  $\delta \sim \sqrt{\nu/\gamma}$ , где  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости (но  $\lambda \ll \lambda_0$ ). В этом случае, согласно [7], движение жидкости можно считать потенциальным (безвихревым) и задавать гидродинамическую скорость  $\mathbf{v}$ , удовлетворяющую условию  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ , в виде  $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ , где  $\Phi$  — потенциал поля скоростей. В силу условия несжимаемости жидкости  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  для  $\Phi$  справедливо уравнение Лапласа  $\Delta \Phi = 0$ , которое в параболических координатах  $\xi = \sqrt{r^2 + z^2} + z$  и  $\eta = \sqrt{r^2 + z^2} - z$  для аксиально-симметричных относительно оси  $OZ$  возмущений принимает вид

$$\frac{4}{\xi + \eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \right] = 0. \quad (1)$$

Смещение свободной поверхности жидкости  $\zeta(\eta, t)$  по направлению нормали к невозмущенной параболической поверхности  $\xi = R_0$  связано с  $\Phi$  граничным условием [1, 7]

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_{\xi = R_0 + \zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (2)$$

Для малых возмущений ( $|\zeta| \ll R_0$ ), экспоненциально зависящих от времени ( $\sim e^{-i\omega t}$ ), методом разделения переменных из (1) и (2) с учетом непрерывности  $\Phi$  и  $\zeta$  в точке  $\eta = 0$  находим

$$\Phi(\xi, \eta, t) = C I_0(2\sqrt{x\xi}) J_0(2\sqrt{x\eta}) e^{-i\omega t}, \quad (3)$$

$$\zeta(\eta, t) = \frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{x}{R_0}} C I_1(2\sqrt{xR_0}) J_0(2\sqrt{x\eta}) e^{-i\omega t}, \quad (4)$$

где  $C$  — произвольная начальная амплитуда возмущений;  $J_0(x)$ ,  $I_n(x)$  — функции Бесселя 1-го рода от вещественного и мнимого аргументов соответственно; параметр разделения переменных  $x$  играет роль волнового числа по координате  $\eta$  вдоль дуги параболоида.

Вычислим возмущение давления Лапласа на аксиально-симметричной поверхности, площадь которой равна

$$S = \pi \int_0^L d\eta \sqrt{(R_0 + \zeta)(R_0 + \zeta + \eta)} \sqrt{1 + \frac{\eta}{R_0 + \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right)^2}, \quad (5)$$

где  $L$  — длина дуги, отсчитываемая от вершины параболоида. С точностью до квадратичных по  $\zeta$  членов вариация площади  $S$  равна

$$\delta S = \pi \int_0^L d\eta \sqrt{R_0(R_0 + \eta)} \left[ \frac{2R_0 + \eta}{2R_0(R_0 + \eta)} - \frac{\eta^2 \zeta}{4R_0^2(R_0 + \eta)^2} - \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) \right] \delta \zeta, \quad (6)$$

где  $\delta \zeta$  — вариация смещения  $\zeta$ . Учитывая, что давление Лапласа на невозмущенной параболической поверхности жидкости ( $\xi = R_0$ ) равно

$$P_L^0 \equiv \alpha \left( \frac{1}{R_1^0} + \frac{1}{R_2^0} \right) = \frac{2\alpha(1 + \eta/2R_0)}{R_0(1 + \eta/R_0)^{5/2}}, \quad (7)$$

аналогично задаче о капиллярных колебаниях сферической капли [7] получаем из (6) линейную по  $\zeta$  поправку к  $P_L^{(0)}$

$$P_L^{(1)}(\eta, t) = \frac{2\alpha\zeta(\eta, t)}{\sqrt{R_0(R_0 + \eta)}} \left[ \alpha - \frac{(R_0 + \eta/2)^2}{R_0(R_0 + \eta)^2} \right]. \quad (8)$$

Как видим, на параболоиде (в отличие от сферы) возмущение давления  $P_L^{(1)}$  зависит от «продольной» координаты  $\eta$ , что затрудняет определение закона дисперсии капиллярных волн. В связи с этим для упрощения задачи вместо точного выражения (8) в дальнейшем воспользуемся приближенным выражением

$$P_1 = \frac{2\alpha\zeta}{R_0} (\alpha - 1/R_0), \quad (9)$$

считая, что оно справедливо не только на вершине параболоида ( $\eta=0$ ), но и при любых значениях  $\eta$ . Тем самым несколько завышается действие Лапласова давления по сравнению с полевым давлением (см. ниже).

Линеаризованное уравнение движения малых потенциальных возмущений на искривленной (параболической) поверхности жидкого металла во внешнем постоянном электрическом поле  $E_0$  имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\xi=R_0} + \frac{P_1}{\rho} - \frac{E_0 E_1}{4\pi\rho} \Big|_{\xi=R_0} = 0. \quad (10)$$

Возмущение напряженности поля  $E_1$  складывается из величины  $E_1' = -d\varphi_1/d\xi$ , где  $\varphi_1$  — изменение электростатического потенциала, обусловленное перераспределением поверхностной плотности индуцированного в металле переменного заряда, и вариации поля  $E_1''$  за счет искажения (смещения) заряженной поверхности металла. Последняя добавка обусловлена пространственной неоднородностью невозмущенного электрического поля  $E_0 = -d\varphi_0/d\xi$  в окрестности металлического параболоида, которое определяется решением уравнения Лапласа (1) для потенциала  $\varphi_0$  с соответствующими граничными условиями. В частном случае, когда жидкий металл находится под нулевым потенциалом, так что  $\varphi_0/\xi=R_0=0$ , а внешний электрод, находящийся под потенциалом  $U_0$ , имеет форму параболоида  $\xi=R_1$ , софокусного с  $\xi=R_0$  ( $R_1 > R_0$ ), получаем<sup>1</sup>

$$\varphi_0(\xi) = \frac{U_0}{\ln(R_1/R_0)} \ln\left(\frac{\xi}{R_0}\right), \quad E_0(\xi) \equiv -\frac{d\varphi_0}{d\xi} = -\frac{U_0}{\xi \ln(R_1/R_0)}. \quad (11)$$

При этом вариация поля на возмущенной поверхности  $\xi=R_0+\zeta$  при  $|\zeta| \ll R_0$  в линейном приближении равна

$$E_1''(\eta, t) \Big|_{\xi=R_0} = \zeta(\eta, t) \frac{E_0(R_0)}{R_0}, \quad (12)$$

Переменный потенциал  $\varphi_1$  также удовлетворяет уравнению Лапласа (1) в области  $R_0 \ll \xi \ll R_1$  и при условии  $R_1 \gg R_0$  с экспоненциальной точностью равен

$$\varphi_1(\xi, \eta, t) = C_1 K_0(2\sqrt{x\xi}) J_0(2\sqrt{x\eta}) e^{-i\omega t}, \quad (13)$$

где  $K_0(x)$  — функция Макдональда, а константа  $C_1$  определяется из условия равенства нулю полного возмущенного потенциала на поверхности жидкого металла

$$[\varphi_0(R_0 + \zeta) + \varphi_1 \Big|_{\xi=R_0}] = 0.$$

В результате в линейном по  $\zeta$  приближении для возмущения напряженности электрического поля  $E_1 = E_1' + E_1''$  получаем следующее выражение:

$$E_1 \Big|_{\xi=R_0} = \frac{E_0(R_0)}{R_0} \zeta \left[ \sqrt{xR_0} \frac{K_1(2\sqrt{xR_0})}{K_0(2\sqrt{xR_0})} - 1 \right]. \quad (14)$$

<sup>1</sup> В экспериментах [4] роль второго электрода (анода) играет подвижная внешняя граница денгмюровского ионного слоя, которая может в значительной степени повторять форму жидкометаллического катода.

Подставляя (3), (4), (9) и (14) в (10), приходим к дисперсионному уравнению капиллярных волн малой амплитуды на параболической поверхности жидкого металла в электрическом поле

$$\omega^2 = \frac{\alpha x}{\rho R_0} \sqrt{\frac{x}{R_0}} \left\{ 1 - \frac{1}{x R_0} + \frac{E_0^2 (R_0)}{4\pi \alpha x} \left[ 1 - \sqrt{x R_0} \frac{K_1(2\sqrt{x R_0})}{K_0(2\sqrt{x R_0})} \right] \right\} \frac{I_1(2\sqrt{x R_0})}{I_1(2\sqrt{x R_0})}, \quad (15)$$

которое во многом аналогично дисперсионному уравнению малых колебаний на боковой поверхности жидкометаллического цилиндра (струи) радиуса  $R_0$  в радиальном электрическом поле [3]

$$\omega^2 = \frac{\alpha k^3}{\rho} \left\{ 1 - \frac{1}{k^2 R_0^2} + \frac{E_0^2}{4\pi \alpha k^2 R_0} \left[ 1 - k R_0 \frac{K_1(k R_0)}{K_0(k R_0)} \right] \right\} \frac{I_1(k R_0)}{I_0(k R_0)}. \quad (15a)$$

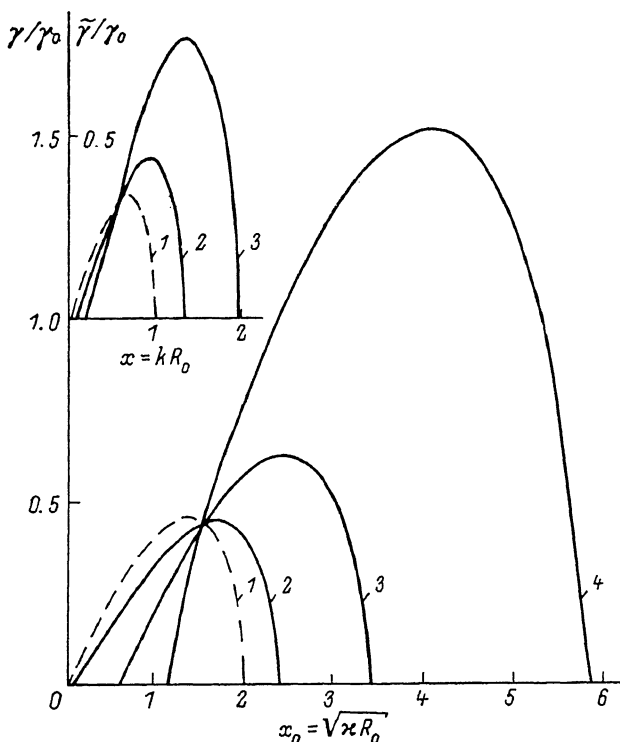


Рис. 1. Зависимости относительных инкрементов аperiodической электрокапиллярной неустойчивости на параболической  $\gamma/\gamma_0$  и цилиндрической  $\tilde{\gamma}/\gamma_0$  поверхностях жидкого металла от безразмерных продольных волновых чисел ( $x_0 = 2\sqrt{x R_0}$  и  $x = k R_0$  соответственно) для разных значений напряженности электрического поля ( $\mu = E_0^2 R_0 / 16 \pi \alpha$ ,  $\gamma_0 = \sqrt{\alpha / \rho R_0^3}$ ).  $\mu = 0$  (1), 0.25 (2), 0.5 (3), 0.866 (4).

На рис. 1 представлены зависимости инкремента аperiodической неустойчивости  $\gamma \equiv \text{Im } \omega$  от  $x_0 = 2\sqrt{x R_0}$  для параболоида и от  $x = k R_0$  для цилиндра при разных значениях безразмерного параметра  $\mu = E_0^2 R_0 / 16 \pi \alpha$ . Как видим, в обоих случаях существуют особые точки пересечения кривых (при  $x_0 = 1.55$  и  $x = 0.6$ ), соответствующие обращению в нуль выражений в квадратных скобках в (15) и (15а), а в области малых значений  $x_0$  и  $x$  имеет место стабилизация неустойчивости электрическим полем. В то же время максимальное значение инкремента электрокапиллярной неустойчивости непрерывно нарастает с ростом поля  $E_0$ , т. е. параметра  $\mu$ ,<sup>2</sup> и при  $\mu \lesssim 1$ , когда

<sup>2</sup> Некоторое превышение  $\gamma_{\text{max}}$  при  $\mu = 0$  над  $\gamma_{\text{max}}$  при  $\mu = 0.25$  на рис. 1 связано с использованием завышенного приближенного выражения (9) для возмущения лапласова давления. При более строгом рассмотрении задачи на основе точного выражения (8) неустойчивость длинноволновых возмущений при  $\mu \rightarrow 0$  должна быть в значительной степени подавлена за счет убывания  $P_L^{(1)}$  с ростом  $\eta$ .

стационарное полевое давление  $P_E = -E_0^2/8\pi$  по абсолютной величине все еще меньше давления Лапласа  $P_L = 2\alpha/R_0$  на вершине параболоида, достигает значений  $\gamma_{\max} \geq \gamma_0 = \sqrt{\alpha/\rho} R_0^3$ . В условиях экспериментов [4] для нелинейных капиллярных волн на поверхности расплавленного металла с характерными параметрами  $\alpha \approx 10^3$  дин/см и  $\rho \approx 10$  г/см<sup>3</sup> при радиусе кривизны на вершине  $R_0 \leq 10^{-4}$  см это соответствует оценке  $\gamma_{\max} \geq 10^7$  см<sup>-1</sup>, что значительно превышает частоту параметрических колебаний  $\omega_0 \leq 10^6$  с<sup>-1</sup>. Оценим характерную длину волны неустойчивых возмущений  $\lambda$  и сравним ее с толщиной вязкого слоя  $\delta \approx \sqrt{\nu/\gamma_{\max}}$ , которая при  $\nu \approx 10^{-3}$  см<sup>2</sup>/с по порядку величины равна  $\delta \leq 10^{-5}$  см. Поскольку оптимальное значение  $\kappa$  определяется из условия максимума инкремента и при  $\mu \leq 1$  близко к  $\kappa_m \approx 4/R_0$ , для эффективной длины изменения возмущения (осцилляций функции Бесселя  $J_0(2\sqrt{\kappa}\eta)$ ) вдоль дуги параболоида получаем оценку  $\lambda \approx R_0$ , что на порядок превышает  $\delta$ .

Таким образом, на основании проведенного выше рассмотрения можно сделать вывод, что причиной образования жидкометаллических острий на вершинах нелинейных капиллярных волн в экспериментах [4] является электрокапиллярная неустойчивость искривленной поверхности жидкого металла, обусловленная усилением электрического поля на гребнях волн.

## 2. Неустойчивость жидкометаллической пленки

Равновесная форма поверхности тонкой смачивающей пленки жидкого металла в электрическом поле определяется не только конкуренцией полевого и лапласова давлений, но и капиллярными силами сцепления жидкости с твердым телом и в связи с этим во многом повторяет форму поверхности подложки. Для простоты аппроксимируем эти поверхности софокусными параболоидами вращения с радиусами кривизны при вершинах  $\bar{R}_0$  и  $r_0 < R_0$ .

Задача об устойчивости жидкометаллической пленки толщиной  $h = R_0 - r_0$  на вершине эмиттера ЖМИИ отличается от рассмотренной выше задачи об устойчивости искривленной поверхности глубокого массива жидкого металла дополнительным граничным условием к уравнению Лапласа

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_{\xi=r_0} = 0, \quad (16)$$

которое соответствует обращению в нуль нормальной компоненты скорости жидкости на твердой стенке, а также дополнительным условием  $h \gg \delta \sim \sqrt{\nu/\gamma}$ , которое наряду с неравенством  $\lambda \gg \delta$  является критерием применимости потенциального приближения  $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ .

При этом вместо (3) и (4) из (1) с учетом (2) и (16) находим

$$\Phi(\xi, \eta, t) = C [I_0(2\sqrt{\kappa}\xi) + \bar{C}K_0(2\sqrt{\kappa}\xi)] J_0(2\sqrt{\kappa}\eta) e^{-i\omega t}, \quad (17)$$

$$\zeta(\eta, t) = \frac{i x_0}{\omega R_0} C [I_1(x_0) - \bar{C}K_1(x_0)] J_0(2\sqrt{\kappa}\eta) e^{-i\omega t}, \quad (18)$$

где

$$\bar{C} = I_1(\bar{x}_0)/K_1(\bar{x}_0), \quad \bar{x}_0 = 2\sqrt{\kappa}r_0, \quad x_0 = 2\sqrt{\kappa}R_0. \quad (19)$$

В результате аналогично разделу 2 получаем следующее дисперсионное уравнение поверхностных волн (ср. с (15)):

$$\omega^2 = \gamma_0^2 \frac{x_0^2}{8} \left\{ 1 - \frac{4}{x_0^2} - \frac{8\mu}{x_0^2} \left[ x_0 \frac{K_1(x_0)}{K_0(x_0)} - 2 \right] \right\} F(x_0, \bar{x}_0), \quad (20)$$

где

$$F(x_0, \bar{x}_0) = \frac{I_1(x_0)K_1(\bar{x}_0) - K_1(x_0)I_1(\bar{x}_0)}{I_0(x_0)K_1(\bar{x}_0) + K_0(x_0)I_1(\bar{x}_0)}. \quad (21)$$

Для достаточно тонких пленок ( $h \ll r_0 \approx R_0$ ) в коротковолновом пределе ( $x_0, \bar{x}_0 \gg 1$ ) с экспоненциальной точностью получаем приближенное выражение для инкремента неустойчивости

$$\gamma \approx \gamma_0 \left\{ x_0 \operatorname{th} \left( \frac{h}{R_0} x_0 \right) \left[ x_0 \left( \mu - \frac{x_0}{8} \right) - 2 \left( \mu - \frac{1}{4} \right) \right] \right\}^{1/2}. \quad (22)$$

Как видим, при  $h \rightarrow 0$  инкремент убывает по корневому закону ( $\gamma \sim h^{1/2}$ ), так что при уменьшении  $h$  перестает выполняться неравенство  $h \gg \sqrt{\nu/\gamma(h)}$ . Кроме того, при малых значениях  $\gamma(h)$  необходимо учитывать затухание капиллярных волн за счет конечной вязкости жидкости, которое описывается декрементом  $\Gamma = 2k^2\nu$  [7]. Роль волнового числа  $k = 2\pi/\lambda$  в данном случае играет величина  $k_m = x_{0m}/R_0$ , причем значение  $x_{0m}$  соответствует точке максимума инкремента (22) и при  $h \ll R_0/x_{0m}$  равно  $x_{0m} \approx 3\mu + \sqrt{9\mu^2 - 8\mu + 2}$ .

При учете конечной вязкости дисперсионное уравнение поверхностных капиллярных волн принимает вид<sup>3</sup>

$$\omega^2 + i\omega\Gamma + \gamma^2 = 0, \quad (23)$$

откуда для эффективного инкремента нарастания возмущений следует выражение

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{\gamma^2 + \Gamma^2/4} - \Gamma/2. \quad (24)$$

Как видим, вязкое затухание не изменяет аperiodического характера неустойчивости, но уменьшает величину инкремента. В частности, при условии  $\gamma \ll \Gamma$  из (24) получаем

$$\tilde{\gamma} \approx \gamma^2/\Gamma \ll \gamma. \quad (25)$$

Проведем численные оценки соответствующих величин исходя из параметров эмиттеров ЖМИИ [6]. При напряжении  $U \approx 5$  кВ, радиусе кривизны керн  $R_0 \approx 10^{-3} \div 10^{-4}$  см и расстоянии до вытягивающего ионы отрицательного электрода (экстрактора)  $d \approx 10^{-1}$  см электрическое поле на эмиттере  $E_0 \approx 10^6 \div 7 \times 10^6$  В/см, что соответствует значениям  $\mu \equiv E_0^2 R_0 / 16\pi a \approx (0.2 \div 1)$ .

Как было показано выше, электрокапиллярная неустойчивость жидкометаллической пленки с инкрементом (22) или (24) на линейной стадии приводит к экспоненциальному нарастанию во времени малых возмущений и тем самым способствует формированию на поверхности пленки тонкого острья (выступа), являющегося в дальнейшем непосредственным источником ионно-полевой эмиссии [6].

Максимальное значение инкремента (22) быстро нарастает с увеличением параметра  $\mu$  (рис. 1), т. е. с ростом напряженности поля  $E_0$  (как  $\sim E_0^2$  при  $h \gg R_0/x_{0m}$  и  $\sim E_0^3$  при  $h \ll R_0/x_{0m}$ ), и при  $\mu \approx 1$ , когда  $x_{0m} \approx 4.7$ , равно по порядку величины  $\gamma_{\max} \approx \gamma_0 \approx 3 \cdot 10^5 \div 3 \cdot 10^8$  с<sup>-1</sup> для  $h \approx 0.1 R_0 \approx 10^{-4} \div 10^{-5}$  см, тогда как  $\Gamma_m = 2\nu k_m^2 \approx 2 \cdot 10^4 \div 2 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup>. При этом  $\delta \approx \sqrt{\nu/\gamma_0} \approx 5 \cdot 10^{-5} \div 2 \cdot 10^{-6}$  см, так что условие  $h \gg \delta$  выполняется на пределе.

В случае более тонких пленок ( $h \ll 10^{-2} R_0$ ) и тупых кернов ( $R_0 \gg 10^{-3}$  см) неравенства  $h \gg \delta$  и  $\gamma \gg \Gamma$  перестают выполняться и электрокапиллярная неустойчивость оказывается сильно подавленной вязким трением жидкого металла (см. выражение (25)). В этом случае неустойчивости должна предшествовать стадия медленного накопления вещества на эмиттере под действием тянущего градиента полевого давления, который при определенных условиях может превышать градиент лапласова давления даже при  $|P_E| < P_L$ . Действительно, в системе с плоским (или бесконечно удаленным) экстрактором полевое давление на проводящей параболической поверхности ( $r^2 = R_0 \eta$ ) равно [8]

$$P_E(\eta) = -E_0^2/8\pi(1 + \eta/R_0), \quad (26)$$

так что тянущая сила, действующая в направлении к вершине параболоида вдоль поверхности, имеет вид

$$f_E(\eta) \equiv -\frac{dP_E}{d\eta} = -\frac{E_0^2}{8\pi R_0(1 + \eta/R_0)^2}. \quad (27)$$

<sup>3</sup> Строго говоря, в этом случае неприменимо приближение потенциальности течения ( $\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq 0$ ), однако для оценок можно воспользоваться выражением (22).

Соответствующая сила лапласова давления направлена в противоположную сторону и, согласно (7), равна

$$f_L(\eta) \equiv -\frac{dP_L}{d\eta} = \frac{2\alpha(1 + \eta/4R_0)}{R_0^2(1 + \eta/R_0)^{3/2}}. \quad (28)$$

Приравнявая выражения (27) и (28), находим точки равновесия сил  $|f_E| = f_L$

$$\eta_{\pm} = 4R_0 [(2\mu - 1) \pm \mu\sqrt{4\mu^2 - 3}]. \quad (29)$$

Отсюда следует, что при условии  $\mu \geq \sqrt{3/2}$  в области  $\eta_- \leq \eta \leq \eta_+$  выполняется неравенство  $|f_E| \geq f_L$ , тогда как при  $\mu < \sqrt{3/2}$  на всей поверхности  $|f_E| < f_L$ . На рис. 2 представлены зависимости  $|f_E(\eta)|$  и  $f_L(\eta)$ , а также  $|P_E(\eta)|$  и  $P_L(\eta)$  от  $\eta$  для разных значений  $\mu$ .

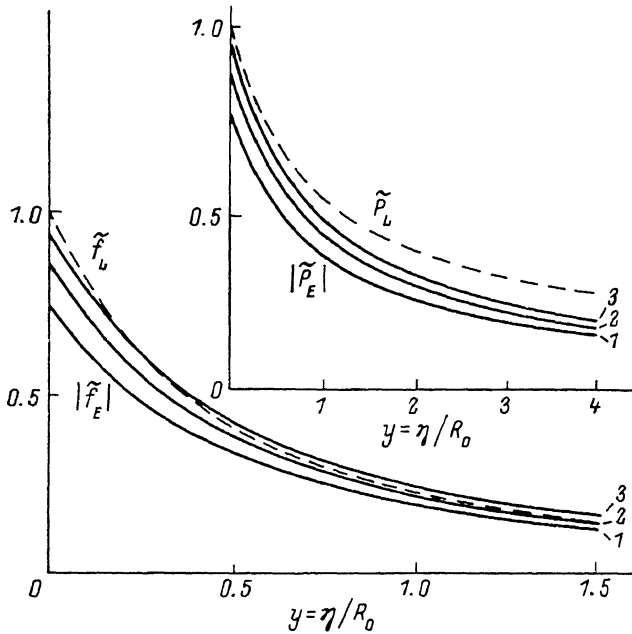


Рис. 2. Зависимости продольных сил  $|f_E|$  и  $f_L$ , а также полевого  $|P_E|$  и лапласова  $P_L$  равновесных давлений от координаты  $\eta$  на поверхности твердой параболической иглы, покрытой тонкой смачивающей пленкой жидкого металла.

Зависимости  $|f_E|$  и  $|P_E|$  приведены для разных значений параметра  $\mu$ : 1 — 0.75, 2 — 0.866, 3 — 0.95.

Таким образом, в случае исходного состояния эмиттера ЖММИ с очень тонкой пленкой ( $h \leq \delta$ ) в интервале полей  $\sqrt{3/2} < \mu < 1$  в силу уравнения непрерывности под действием поля происходит медленное (вязкое) натекание жидкого металла на вершину керна. Значение параметра  $\mu = \sqrt{3/2}$  определяет критическое поле  $E_{кр} = 4(\pi\alpha\sqrt{3/2}R_0)^{1/2}$ , т. е. пороговое напряжение

$$U_{пор} = 4 \ln\left(\frac{d}{R_0}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \pi\alpha R_0\right)^{1/2} \simeq 2 \cdot 10^3 \ln(d/R_0) \sqrt{\alpha R_0} \quad (\text{В}), \quad (30)$$

начиная с которого происходит постепенное увеличение толщины жидкометаллической пленки вплоть до значений  $h$ , удовлетворяющих условиям  $h \gg \delta$  и  $\gamma(h) \gg \Gamma$ , которые являются необходимыми для быстрого развития электрокапиллярной неустойчивости за времена  $\tau \sim 1/\gamma_0 \sim 3 \cdot 10^{-8} \div 3 \cdot 10^{-9}$  с. По-видимому, именно с этим эффектом вязкого течения и медленного накопления жидкого металла в пленке связаны наблюдавшиеся в [8] длительные (до сотен миллисекунд) задержки ионного тока ЖММИ после включения напряжения  $U$ , близкого к пороговому ( $U - U_{пор}) \ll U_{пор}$ .

В случае исходно толстых смачивающих пленок ( $h \gg \delta$ ) время срабатывания ЖММИ фактически совпадает с характерным временем развития неустой-

чивости ( $\tau \leq 3 \cdot 10^{-6}$  с), что согласуется с приведенной в [9] оценкой времени установления ионного тока.

Существование гистерезиса на вольт-амперных характеристиках ЖМИИ [8, 10] также находит качественное объяснение в рамках рассмотренной выше картины явления ионной эмиссии, в основе которой лежит представление об электрокапиллярной неустойчивости искривленной поверхности жидкого металла. При достаточно медленном повышении напряжения  $U$  после прохождения порогового значения  $U_{\text{пор}}$ , которое для тонких пленок ( $h \leq \delta$ ) на керне параболической формы определяется выражением (30), т. е. условием  $|P_E| = \sqrt{3}P_L/2$ , а не обычно используемым равенством  $|P_E| = P_L$ , успевает произойти как накопление жидкого металла в пленке до толщин  $h > \delta$ , так и формирование в результате неустойчивости (и последующей нелинейной стадии гидродинамического течения) равновесного жидкометаллического острия как источника ионной автоэмиссии. При постепенном уменьшении  $U$  ниже  $U_{\text{пор}}$ , происходит изменение (подстройка) формы острия и уменьшение ионного тока до тех пор, пока при некотором значении  $U_0 < U_{\text{пор}}$  установится равновесная бестоковая конфигурация типа конуса Тейлора [2].

Для исходно толстых пленок ( $h \geq \delta$ ) порога по напряжению (30), связанного с началом вязкого течения жидкого металла, формально не существует. Однако довольно резкая зависимость максимального инкремента электрокапиллярной неустойчивости от поля ( $\gamma_{\text{max}} \sim E_0^2$  или  $\sim E_0^3$ ) при достаточно быстром увеличении  $U$  на экспериментальных ВАХ может выглядеть как скачкообразное включение тока, тогда как при плавном повышении напряжения может наблюдаться затягивание ВАХ с постепенным нарастанием тока.

В заключение выражаем благодарность В. П. Коваленко за многочисленные полезные дискуссии по вопросам, затронутым в данной работе.

#### Литература

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1988. 532 с.
- [2] Taylor G. Proc. Roy. Soc. A, 1964, v. 280, N 1316, p. 383—397.
- [3] Taylor G. Proc. Roy. Soc. A, 1969, v. 313, N 1515, p. 453—475.
- [4] Габович М. Д., Порицкий В. Я. ЖЭТФ, 1983, т. 85, № 1, с. 146—154.
- [5] Габович М. Д., Пашинский Э. А. ЖТФ, 1987, т. 57, № 1, с. 9—14.
- [6] Габович М. Д. УФН, 1983, т. 140, № 1, с. 137—151.
- [7] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1958. 788 с.
- [8] Tompson S. P., Prewett P. D. J. Phys. D, Appl. Phys., 1984, v. 17, N 10, p. 2305—2321.
- [9] Дудников В. Р., Шабалин А. Л. ЖТФ, 1985, т. 55, № 4, с. 776—778.
- [10] Габович М. Д., Зюзя А. С., Козырев Ю. Н., Феник М. Б. Тр. VI Всес. конф. по сильноточной электронике СО АН СССР. Томск, 1986, ч. 1, с. 17—19.

Институт физики  
АН УССР  
Киев

Поступило в Редакцию  
31 июля 1986 г.  
В окончательной редакции  
22 декабря 1987 г.