1988 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 58, в. 10
1988 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 58, № 10

УДК 539.3

ДИНАМИКА ДИСЛОКАЦИОННЫХ СКОПЛЕНИЙ

С. И. Сивер, Л. А. Зильберман, О. И. Дацко

Метод Эшелби, Франка, Набарро обобщен для описания колебаний плоского скопления дислокаций, удерживаемого запертой головной дислокацией и постоянным напряжением. Колебания совершаются под действием малой внешней силы. Рассчитан вклад дислокационного скопления в амплитудно-независимое внутреннее трение. Показано, что в случае большого числа дислокаций в скоплении точное решение и решение, полученное в континуальном приближении, совпадают при не очень больших частотах вынуждающей силы ($\omega\tau \ll n$). Здесь $\tau = nBA/2\,(b\,\sigma)^2$, n — число дислокаций в скоплении, B — коэффициент вязкого трения, A — константа взаимодействия дислокаций, b — величина вектора Бюргерса, σ — внешнее постоянное напряжение. Головные дислокации в этом случае не колеблются.

1. Одним из элементов дислокационной структуры, играющих важную роль в механическом поведении кристаллов, являются плоские дислокационные скопления (ДС). Большое количество работ посвящено таким вопросам, как динамика ДС [1-4], дислокационные механизмы зарождения трещины [5], вклад ДС во внутреннее трение [6, 7] и др. Можно выделить два основных подхода, используемых для описания ДС. Дискретное описание методом ортогональных полиномов применялось в основном для исследования равновесных конфигураций плоских ДС. Динамика ДС этим методом рассмотрена лишь в случаях наиболее простых запирающих полей напряжения [1-3]. Большое количество исследований как статики ДС, так и динамики ДС выполнено в континуальном приближении методом сингулярных интегральных уравнений. Этот метод эффективен в тех случаях, когда число дислокаций в скоплении велико и упругое поле вычисляется на достаточно большом расстоянии от скопления. В других же случаях этот подход может приводить к неправильным результатам (основные ограничения при использовании континуального приближения проанализированы в книге Владимирова [5], а также в [8, 9]). Поэтому представляют интерес задачи, которые могут быть решены обоими методами и в которых можно определить условия перехода от точного решения к решению в континуальном приближении. Одной из них, как будет показано ниже, является задача об амплитудно-независимом внутреннем трении, обусловленном плоскими ДС. В континуальном приближении точное решение этой задачи получено в [7]. Авторами этой работы рассмотрен случай, когда скорость дислокации — линейная функция напряжения, а сила торможения дислокации — сила сухого трения.

В настоящей работе в дискретном приближении рассмотрены колебания плоского ДС под действием малого внешнего напряжения. Анализируется случай, когда скопление удерживается запертой головной дислокацией и постоянным напряжением. Эта модель представляет практический интерес с точки зрения возможности зарождения микроскопической трещины, а также при изучении процессов преодоления препятствий при движении дислокаций за счет возрастания внутренних напряжений. Метод, развитый в работе, позволяет «следить» за движением каждой дислокации, что особенно важно при исследовании дислокационных перестроек скоплений. Результаты расчета использованы для вычисления внутреннего трения и сравниваются с результатами, полученными в континуальном приближении.

2. Выберем систему координат таким образом, чтобы закрепленная головная дислокация находилась в начале координат, а ряд из n свободных прямолинейных дислокаций был расположен вдоль положительной части оси X. Уравнение движения i-й дислокации скопления, расположенной в точке $x=x_i(t)$, будет иметь вид

$$B\dot{x}_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{A}{x_i - x_j} - \frac{A}{x_i} + b[\sigma + \sigma_1(t)] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где B — коэффициент вязкого трения дислокации; σ и $\sigma_1 = \sigma_0 \cos \omega t$ — внешние напряжения; $A = Gb^2$ [$\sin \alpha + (1-\nu)\cos \alpha$] [$2\pi (1-\nu)^{-1}$]; α — угол между линией дислокации и ее вектором Бюргерса; b — величина вектора Бюргерса; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона.

Следуя Эшелби, Франку и Набарро [10], введем полином

$$f(x, t) = \prod_{i=1}^{n} [x - x_i(t)].$$

Тогда

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1} \Bigg|_{x=x_i}, \quad \dot{x}_i = -\frac{\partial f}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1} \Bigg|_{y=x_i}.$$

Если за единицу длины принять величину $x_0 = A(2b\sigma)^{-1}$, а за единицу времени $t_0 = BA(b\sigma)^{-2}/2$ и ввести обозначение $\tau_0 = \sigma_0/\sigma$, то аналогично тому, как это делается в [10], получим следующее дифференциальное уравнение, эквивалентное системе (1):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\frac{2}{x} - 1 - \tau_0 \cos \omega t\right) \frac{\partial f}{\partial x} + Q(n, x, t) f = 0. \tag{2}$$

Функция $Q(n, x, t)$ выбирается таким образом, чтобы уравнение (2) имело решение в форме полинома n-ой степени и нули этого полинома не совпадали с полюсами функции $Q(n, x, t)$. В амплитудно-независимой области достаточно найти решение в первом приближении по τ_0

$$f(x, t) = f_0(x) + f_1(x, t), \quad Q(n, x, t) = \frac{1}{x}[q_0 + q_1(t)].$$

Уравнение для f_0 описывает равновесие линейных рядов дислокаций и рассмотрено в [10]

$$x \frac{d^2 f_0}{dx^2} + (2 - x) \frac{df_0}{dx} + q_0 f_0 = 0.$$

Решением этого уравнения при $q_0 = n$ являются обобщенные полиномы Лагерра

$$f_0 = (-1)^n n!\, L_n^1(x).$$

В размерном виде

$$f_0(x) = (-1)^n n!\, L_n^1\left(\frac{2b\sigma x}{A}\right).$$

Для $f_1(x, t)$ имеем

$$x\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right) + (2 - x) \frac{\partial f_1}{\partial x} + n f_1 = -q_1 f_0 + x\tau(t) \frac{df_0}{dx}. \tag{3}$$

Обычно применение метода Эшелби, Франка, Набарро ограничено изучением случаев, когда функция $Q(n, x, t)$ находится приравниванием нулю членов с высшей и следующей за ней степенью x в уравнении для $f(x, t)$. В рассматриваемой здесь задаче эта процедура не приводит к успеху. Поэтому ниже поступим следующим образом. Найдем установившееся по времени решение уравнения (3) при произвольном q_1 и выберем q_1 из условия, чтобы это решение было полиномом $(n-1)$-степени по x.

3. Представим переменное напряжение $\tau(t)$, $f_1(x, t)$ и $q_1(t)$ в комплексном виде

$$\tau(t)=\tau_0 e^{i\omega t},\quad f_1(x, t)=f_{10}(x) e^{i\omega t},\quad q_1(t)=q_{10}e^{i\omega t}.$$

Тогда уравнение (3) запишется следующим образом:

$$x\frac{d^2 f_{10}}{dx^2}+(2-x)\frac{df_{10}}{dx}+(n+i\omega x) f_{10}=(-1)^{n+1}n!\,[\delta_1 L_n^1(x)+\delta_2 L_{n-1}^1(x)], \qquad (4)$$

где

$$\delta_1=q_{10}-n\tau_0,\quad \delta_2=(n+1)\tau_0.$$

Решение уравнения (4) будем искать в виде интеграла по замкнутому контуру в окрестности нулевой точки

$$f_{10}(x)=\frac{(-1)^{n+1}n!}{2\pi i}\oint^{(0+)} e^{xt}t^{-n}g(t)\,dt. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (4) и воспользовавшись представлением обобщенных полиномов Лагерра в виде интеграла по тому же контуру, для $g(t)$ имеем

$$\dot g-\left[\frac{n}{t}+\frac{n+1}{(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)}\right]g=\frac{(t-1)^n[(\delta_1+\delta_2)t-\delta_1]}{t(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)}. \qquad (6)$$

Здесь

$$\alpha_1=\left(1+\sqrt{1-4i\omega}\right)/2,\quad \alpha_2=\left(1-\sqrt{1-4i\omega}\right)/2. \qquad (7)$$

Общее решение уравнения (6) будет иметь вид

$$g=t^n(t-\alpha_1)^k(t-\alpha_2)^{-k}\left\{C+\int_{\alpha_2}^{t} dz\,z^{-(n+1)}\varphi(z)\,[(\delta_1+\delta_2)z-\delta_1]\right\}, \qquad (8)$$

$$\varphi(t)=(t-1)^n(t-\alpha_1)^{-k-1}(t-\alpha_2)^{k-1},$$

C — постоянная интегрирования,

$$k=(n+1)/(\alpha_1-\alpha_2). \qquad (9)$$

Чтобы представление (5) было полиномом $(n-1)$-й степени, функция $g(t)$ должна быть регулярна. Для этого выбираем δ_1 таким образом, чтобы коэффициент с $\ln t$ в разложении $g(t)$ в ряд Тейлора обращался в нуль. Из этого условия находим

$$\delta_1=\frac{n\varphi^{(n-1)}(0)}{\varphi^{(n)}(0)-n\varphi^{(n-1)}(0)}\,\delta_2. \qquad (10)$$

Пользуясь теоремой Лейбница о дифференцировании произведения функций $(t-1)^n$ и $(t-\alpha_1)^{-k-1}(t-\alpha_2)^{k-1}$ и формулами линейного преобразования гипергеометрической функции $F(a, b, c, z)$ [11], $\varphi^{(n-1)}(t)$ можно представить в виде

$$\varphi^{(n-1)}(t)=A_1(t-1)(t-\alpha_2)^{-(n+1)}\sum_{e=0}^{\infty}\binom{-k-1}{l}\times$$

$$\times\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right)^e F\left(1+k+l,\,n+1,\,2,\,\frac{t-1}{t-\alpha_2}\right),$$

где

$$A_1=n!\,\alpha_{11}^{n+k}(\alpha_2-\alpha_1)^{-k-1}.$$

Вычисляя сумму по формуле (11)

$$\sum_{e=0}^{\infty}\binom{\lambda}{e} s^{e} F(e-\lambda,\ b,\ c,\ z)=(1+s)^{\lambda} F\left(-\lambda,\ b,\ c,\ \frac{z}{1+s}\right),$$

получим

$$\varphi^{(n-1)}(t)=A_1\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{k+1}(t-1)(t-\alpha_2)^{-(n+1)}\times$$

$$\times F\left(k+1,\ n+1,\ 2,\ \frac{(t-1)(\alpha_2-\alpha_1)}{\alpha_2(t-\alpha_2)}\right).$$

Дифференцируя полученное выражение и воспользовавшись соотношением

$$z\frac{d}{dz}F(a,\ b,\ c,\ z)=a\left[F(a+1,\ b,\ c,\ z)-F(a,\ b,\ c,\ z)\right],$$

имеем

$$\varphi^{(n)}(0)=n\varphi^{(n-1)}(0)+A_1\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{k+1}(-1)^{n}\alpha_2^{-(n+1)}(n+1)\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\times$$

$$\times F(k+1,\ n+2,\ 2,(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_2^{-2}).$$

Подставляя $\varphi^{(n-1)}(0)$ и $\varphi^{(n)}(0)$ в (10), находим

$$\delta_1=\frac{n\alpha_2^2F(k+1,\ n+1,\ 2,\ (\alpha_2-\alpha_1)\alpha_2^{-2})}{(n+1)\alpha_1F(k+1,\ n+2,\ 2,(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_2^{-2})}\delta_2.$$

Если еще раз воспользоваться линейным преобразованием для гипергеометрической функции

$$F(a,\ b,\ c,\ z)=(1-z)^{-a}F\left(a,\ c-b,\ c,\ \frac{z}{z-1}\right),$$

то можно представить δ_1 в виде отношения двух многочленов

$$\delta_1=\frac{\alpha_2 nF(k+1,\ 1-n,\ 2,\ z)}{\alpha_1(n+1)F(k+1,\ -n,\ 2,\ z)}\delta_2,\quad z=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1^2}. \qquad (11),(12)$$

Это выражение удобно для точного вычисления δ_1, когда число дислокаций в скоплении невелико.

4. Пластическая деформация ε, обусловленная движением незакрепленных дислокационных сегментов длиной l в объеме V, равна

$$\varepsilon=\frac{lb}{V}\sum_{i=1}^{n}x_i. \qquad (13)$$

Сумму корней полинома $f(x,t)$ можно выразить через коэффициент a_{n-1} $(f_1=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0)$. Из уравнения (4)

$$a_{n-1}=-\mathrm{Re}\,[\delta_1(i\omega)^{-1}e^{i\omega t}].$$

Таким образом, для точного вычисления внутреннего трения Q^{-1} достаточно знать δ_1

$$Q^{-1}=-Q_0^{-1}[(\omega\tau_0)^{-1}\mathrm{Re}\,\delta_1],\quad Q_0^{-1}=GlA/2V\sigma^2. \qquad (14)$$

Здесь ω, так же как и раньше, — безразмерная частота. Практический интерес представляет случай $n\gg 1$. Ограничимся также рассмотрением не очень больших частот $\omega n\sim 1$. При этом аргумент гипергеометрической функции в (11), как следует из (12) и (7), стремится к единице. Поэтому воспользуемся линейным преобразованием

$$F(k+1,\ 1-n,\ 2,\ z)=\frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(1-k)\Gamma(n+1)}F(k+1,\ 1-n,\ k-n+1,\ 1-z),$$

$$F(k+1, -n, 2, z) = \frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(1-k)\Gamma(n+2)} F(k+1, -n, k-n, 1-z).$$

Выражая $F(k+1, 1-n, k-n+1, 1-z)$ через смежные функции $F(k+1, -n, k-n+1, 1-z)$, $F(k+1, -n, k-n+2, 1-z)$ и переходя к пределу $n \to \infty$, получим

$$\delta_1 = -\frac{J_{\beta+1}(\beta)}{J_\beta(\beta)}\delta_2,$$

$J_\beta(z)$ — функция Бесселя, $\beta = 2ni\omega$. Отношение двух функций Бесселя, порядок которых отличается на единицу, можно представить в виде непрерывной дроби

$$\frac{J_{\beta+1}(\beta)}{J_\beta(\beta)} = \frac{\beta[2(\beta+1)]^{-1}}{1-}\ \frac{\beta^2[4(\beta+1)(\beta+2)]^{-1}}{1-}\ \frac{\beta^2[4(\beta+2)(\beta+3)]^{-1}}{1-}. \qquad (15)$$

В таком виде решение полностью совпадает с решением, полученным в работах [6, 7]. Отличие времени релаксации τ и подвижности μ связано с рассмотрением случая вязкого трения. В нашей задаче

$$\mu = 1/Blb, \quad \tau = nBA/(b\sigma)^2.$$

Так же как и в [7], для $|\beta| \leqslant 3$, ограничиваясь в (15) первым членом дроби, из (14) получим

$$Q^{-1} = Q_0^{-1} n \frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}.$$

Оценим частоты, при которых $Q^{-1}(\omega)$ имеет максимум. Для $B \sim 10^{-5}$ Па·с, $G \sim 3 \cdot 10^{10}$ Па, $n = 20$, $A \sim Gb^2(2\pi)^{-1}$ имеем $\sigma/G = 10^{-5} \div 10^{-4}$, $\omega = 10^5 \div 10^7$ Гц.

5. Чтобы понять, к чему приводит ограничение сверху на частоту при переходе от точного решения к континуальному, рассмотрим в том же предельном случае решение уравнения (4). Для вычисления интеграла в представлении (8) сделаем замену переменной

$$z = \alpha_2^{-1} y + \alpha_2.$$

После этого

$$\int_{\alpha_2}^{t} dz z^{-(n+1)} \varphi(z)[(\delta_1+\delta_2)z - \delta_1] = \alpha_2 \int_0^{\alpha_2 t - \alpha_2^2} dy\,(y - i\omega + \alpha_2^2)^{-k-1} y^{k-1} \times$$
$$\times \left[\delta_1\left(\frac{y-i\omega}{y+\alpha_2^2}\right)^{n+1} + \delta_2\left(\frac{y-i\omega}{y+\alpha_2^2}\right)^{n}\right]. \qquad (16)$$

Здесь учтено, что $\alpha_1\alpha_2 = i\omega$. В рассматриваемом предельном случае $\alpha_2 \simeq i\omega$. Поэтому оставляя в (16) α_2 в первой степени, находим

$$\int_{\alpha_2}^{t} dz z^{-(n+1)} \varphi(z)[(\delta_1+\delta_2)z - \delta_1] \xrightarrow[(\omega n \sim 1)]{n\to\infty} -\left[\frac{\delta_1}{\beta}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{\beta} + \frac{\delta_2}{\beta+1}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{\beta+1}\right].$$

Подставим полученное выражение в (8), а (8) в (5). Тогда решение уравнения (4) будет иметь вид

$$f_{10}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2\pi i} \oint^{(0+)} dt e^{xt} \left(\frac{t-\alpha_1}{t-\alpha_2}\right)^{n+1+\beta} \left[\frac{\delta_1}{\beta}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{\beta} + \frac{\delta_2}{\beta+1}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{\beta+1}\right].$$

Сделаем замену переменной $t \to t/\alpha_2$. В результате, сохраняя лишь первую степень α_2, получим следующее решение:

$$f_{10}(x) = \frac{(-1)n!}{2\pi i} \oint^{(0+)} dt e^{\frac{xt}{\alpha_2}} \left[\frac{\delta_1}{\beta}\left(\frac{t-i\omega}{t}\right)^{n+1} + \frac{\delta_2}{\beta+1}\left(\frac{t-i\omega}{t}\right)^{n}\right],$$

которое можно представить в виде

$$f_{10}(x)=(-1)^n!\left[\frac{\delta_1}{\beta}L_n^1(x)+\frac{\delta_2}{\beta+1}L_{n-1}^1(x)\right].$$

Отклонение от положения равновесия дислокаций ($x_i^1=x_i-x_i^0$) определяется формулой

$$x_i^1=-\mathrm{Re}\left[\frac{f_{10}(x_i^0)}{f_0'(x_i^0)}e^{i\omega t}\right],$$

с помощью которой получим

$$x_i^1=\frac{\delta_2 x_i^0}{n}\mathrm{Re}\frac{e^{i\omega t}}{1+2ni\omega}.$$

Таким образом, континуальное и дискретное описание колебаний ДС под действием малой внешней силы совпадает для не очень больших частот вынуждающей силы ($\omega\tau\ll n$). В этом диапазоне частот все дислокации колеблются в фазе с амплитудой, убывающей к голове скопления. С точностью до величин порядка n^{-1} можно считать, что головные дислокации скопления не колеблются.

Литература

[1] *Соловьев В. А.* ФММ, 1972, т. 33, № 4, с. 690—697.
[2] *Соловьев В. А.* ФММ, 1972, т. 34, № 4, с. 836—841.
[3] *Head A. K.* Phil. Mag., 1972, v. 26, N 1, p. 43—63.
[4] *Ockendon H., Ockendon J. R.* Phil. Mag., 1983, v. 47, N 5, p. 707—719.
[5] *Владимиров В. И.* Физическая природа разрушения металлов. М.: Металлургия, 1984. 280 с.
[6] *Brailsford A. D.* Phys. Rev., 1965, v. 139, N 6A, p. 1807—1812.
[7] *Николаев В. В., Орлов А. Н., Талуц Г. Г.* В кн.: Внутреннее трение в металлических материалах. М.: Наука, 1970. 208 с.
[8] *Владимиров В. И., Приемский Н. Д.* ЖТФ, 1982, т. 52, № 3, с. 559—561.
[9] *Владимиров В. И., Приемский Н. Д.* ЖТФ, 1982, т. 52, № 9, с. 1721—1724.
[10] *Eshelby J. D., Frank F. C., Nabarro R. F. N.* Phil. Mag., 1951, v. 42, p. 327.
[11] *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. 296 с.

Донецкий физико-технический институт
АН УССР

Поступило в Редакцию
30 апреля 1987 г.