

ФОРМИРОВАНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ СОЛИТОНОВ ДЕФОРМАЦИИ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

Г. В. Дрейден, Ю. И. Островский, А. М. Самсонов,
И. В. Семенова, Е. В. Сокуринская

Работа посвящена теоретическому и экспериментальному изучению формирования и распространения уединенных волн (солитонов) деформации в нелинейно-упругом твердом теле. На основании уточненной модели распространения продольных волн деформации определены основные характеристики процесса формирования солитона из слабой ударной волны сжатия и параметры уединенной волны деформации. Зарегистрировано формирование и распространение солитона продольной деформации.

Введение

В последнее время интенсивно изучаются различные нелинейные волновые процессы в упругих твердых телах и развивается математическая теория соответствующих нелинейных уравнений [1-4].

В связи с несомненными перспективами приложений в физике и механике твердого тела особенный интерес вызывает возможность формирования в твердом теле уединенной нелинейной волны (солитона) деформации. В однородном волноводе солитон локализован в пространстве и имеет постоянные форму, амплитуду и скорость, не меняющиеся, как правило, даже при столкновениях солитонов, памятью о котором может служить только некоторый сдвиг импульсов относительно того положения, в котором один солитон находился бы в отсутствие другого [2].

Теоретическим исследованиям распространения солитонов в одномерных упругих волноводах посвящено много работ (см., например, [5, 6]), но экспериментально солитоны деформации в твердом теле до сих пор не наблюдались, по-видимому, в силу того что для их образования необходимо выполнить совокупность довольно жестких условий связи параметров начального импульса с упругими и геометрическими характеристиками волновода. Поэтому для формирования солитона деформации требуется целенаправленное создание определенных условий эксперимента. Эти условия не удовлетворялись, в частности, в экспериментах [7-9], где регистрировались не солитоны, а ударные волны.

1. О теории распространения солитонов продольной деформации

Аналитическое описание распространения солитонов в нелинейно-упругом стержне обычно основано [3, 4] на выводе уравнения Буссинеска вида

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta u^2}{\rho} + \nu^2 R^2 u_{tt} \right)_{xx}$$

относительно продольной деформации u . Здесь x — продольная координата, t — время, ρ — плотность материала, ν — коэффициент Пуассона, R — радиус поперечного сечения стержня, $c_0 = (E/\rho)^{1/2}$ — скорость линейных продольных

волн в стержне, E — модуль Юнга, $\beta = 3E + 2l(1-2\nu)^3 + 6n\nu^2 + 4m(1-2\nu) \times (1+\nu)^2 \geq 0$ — коэффициент нелинейности материала, (l, m, n) — модули упругости III порядка (модули Мурнагана) [1], нижний индекс означает дифференцирование. Затем уравнение Буссинеска для $u(x, t)$, как правило, приводят к уравнению Кортевега де Вриза (КдВ) [3, 4, 10], решение которого после обратного преобразования к исходным переменным имеет вид солитона продольной деформации $u(x, t) = A \operatorname{ch}^{-2} [(x-Vt)/\lambda]$, скорость V распространения которого равна $V = c_0(1 - A\beta/6E)^{-1}$ и превышает скорость c_0 линейных продольных волн в стержне [5, 15, 16]. Если нелинейность материала такова, что $\beta > 0$, то необходимо $A > 0$ и решение соответствует импульсу растяжения, при $\beta < 0$ и $A < 0$ решение описывает солитон сжатия. Наблюдать солитоны уравнения КдВ в твердотельных волноводах до сих пор не удавалось.

Уточнение физической модели распространения нелинейных волн в цилиндрическом стержне и вывод нового уравнения длинных волн приведены в [11, 12]. Этот вывод основан на задании класса рассматриваемых нелинейно-упругих материалов, на системе предположений, позволяющих исходные трехмерные уравнения теории упругости свести к одному волновому уравнению, и на ограничении класса изучаемых решений нелинейного уравнения [11, 12] волновыми решениями.

В размерных переменных это «уравнение с двумя дисперсиями», полученное из лагранжиана задачи при отсутствии диссипации, имеет вид

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta u^2}{\rho} + v^2 R^2 (u_{tt} - c_1^2 u_{xx}) \right)_{,xx}, \quad (1)$$

где $c_1 = (\mu/\rho)^{1/2}$ — скорость сдвиговых волн в стержне, $\mu = E/(2+2\nu)$ — модуль сдвига. При выводе (1) предполагалось, что деформации малы, но конечны (учитывалась «геометрическая нелинейность»), поведение материала стержня описывается в рамках нелинейной модели среды Мурнагана,¹ а характерные длины волн λ значительно превышают радиус стержня R , что позволяет связать смещение w вдоль радиуса r с продольной деформацией u соотношением Лява $w = -vru$, т. е. сечения стержня при деформировании остаются плоскими, боковая поверхность стержня свободна от радиальных напряжений.

Волновые локализованные однопараметрические квазистационарные решения уравнения (1), имеющие вид $u_k = A_k f(\theta_k)$, $\theta_k = x \pm V_k t / \lambda_k$, A_k — амплитуда (параметр решения), V_k — скорость, λ_k — ширина импульса, существуют в той области параметров, где нелинейные и дисперсионные слагаемые в правой части [1] уравновешивают друг друга и малы по сравнению со слагаемыми линейного волнового оператора. В частности, решения типа солитонов продольной деформации u имеют вид [11, 12]

$$u_k(x, t) = D_k + A_k \operatorname{ch}^{-2} \theta_k, \quad k = 1, 2, \quad (2)$$

где $D_1 = 0$, $D_2 = -2/3 A_2$,

$$V_k^2 = c_0^2 \pm A_k \beta / (3\rho), \quad \lambda_k^2 = 2v^2 R^2 [3(E - \mu) / (A_k \beta) \pm 1]. \quad (3)$$

Верхний знак в (3) соответствует значению $k=1$, нижний — $k=2$. Укажем на существование сингулярных решений уравнения (1) типа подвижных разрывов, которые получаются из (2) формальной заменой $\operatorname{ch}^{-2} \theta_k \rightarrow \operatorname{sh}^{-2} \theta_k$. Отметим также, что уединенные волны (2) характеризуются иными соотношениями между амплитудой A_k , скоростью V_k и шириной λ_k (3), нежели обычные солитоны уравнения Кортевега де Вриза [10, 14, 15, 16].

Важно, что условие локализации импульса вида $\lambda_k^2 > 0$ для каждого из решений u_k выделяет свою, т. е. «мертвую зону» скоростей, при которых распространение уединенных волн вида u_1 или u_2 невозможно [11, 12]. Разрешенные

¹ Заметим, что (1) описывает нелинейные волны в стержне для довольно широкого класса сжимаемых и несжимаемых материалов с различными упругими потенциалами [12], в частности в стержнях из металлов, пластиков, полимеров, резины и пр., однако эти уединенные волны не являются солитонами в строгом смысле слова [2]. Термин «солитон» употребляется нами для краткости.

значения скоростей уединенной волны u_1 заключены в интервалах $0 < V_1 < c_1$ и $V_1 > c_0$, следовательно, кроме решений u_1 типа «сверхзвуковых» солитонов деформации с $V_1 > c_0$, существование которых, правда, с другими параметрами следует и из анализа решений уравнения Кортевега де Вриза [5, 14, 15, 16], уравнение (1) допускает также в качестве решений «дозвуковые» солитоны u_1 с $V_1 < c_1 < c_0$. Для решения u_2 условие локализации волны приводит соответственно к ограничению $c_1 < V_2 < c_0$, т. е. уединенные волны вида u_2 являются «дозвуковыми», если только $\nu > -1/2$.

Итак, уединенные волны деформации вида (2) существуют, если выполнены условия: а) локализации импульса $\lambda^2 > 0$; б) отсутствия пластического течения материала стержня, т. е. ограничение на продольную компоненту тензора конечных деформаций Коша—Грина $|\sqrt{1+2C_{xx}}-1| < e_0$ (e_0 — предел текучести материала), что в нашем случае эквивалентно неравенству

$$\left| u + \frac{\nu^2 R^2}{2} u_x^2 \right| < e_0, \quad (4)$$

в) баланса между нелинейностью и дисперсией, связывающее параметры солитона с физическими и геометрическими характеристиками стержня

$$|A| = \frac{\nu^2 R^2 E}{\gamma^2 |\beta|} \left| \frac{V^2 - c_1^2}{c_0^2} \right| \left| \frac{f''}{f^2} \right|, \quad (5)$$

где величина $|f''/f^2|$ определяется по начальному условию и близка к единице по порядку величины. В частности, для солитона вида u_1 (2) имеем $|f''/f^2| = 6$.

Важно отметить, что условие (5) баланса между нелинейностью и дисперсией для уравнения (1) принципиально отличается от аналитического условия [15, 16] для уравнения Кортевега де Вриза и для уравнения Буссинеска (последнее совпадает с (1), если формально положить $c_1 = 0$). Условие баланса для (1) должно связывать все параметры решения A , V и λ , а не A и λ , как в случае уравнения Буссинеска. Это объясняется разными дисперсионными свойствами этих уравнений, и в частности тем, что дисперсионные слагаемые $C_1^2 u_{xxxx}$ и u_{xxtt} в уравнении (1) могут даже компенсировать друг друга при $V \approx c_1$, после чего баланс нелинейности и дисперсии будет нарушен. Из решения (2) и оценок (3)—(5) следует, что для возбуждения сверхзвуковой уединенной нелинейной волны сжатия — солитона вида u_1 (что, по-видимому, является наиболее простым экспериментом) необходимо, чтобы параметры материала стержня и начального импульса удовлетворяли следующим соотношениям:

$$V_0 > c_0, \quad \lambda_0 > \nu R \sqrt{6(E - \mu)/(|\beta| e_0)}; \quad |A_0| < e_0, \quad \beta < 0. \quad (6)$$

В (6) под λ_0 подразумевается характерная ширина импульса по уровню $0.8 A_0$. Последнее условие ($\beta < 0$) выполняется [17] для большинства металлов, кристаллов типа поваренной соли, полимеров типа полистирола. Можно показать, что при возбуждении в торцевой части стержня радиуса R импульса сжатия с амплитудой давления P_0 и длительностью $\tau_0 = \lambda_0/c_0$ на расстоянии l от торца стержня может сформироваться локализованная плоская волна, имеющая амплитуду деформации A , ширину λ и скорость V

$$l \sim (R\nu/4)(E/|\beta A|)^{3/2}, \quad |A| \sim P_0/E, \quad \lambda \sim R\nu(2 + 6(E - \mu)/|\beta A|)^{1/2}, \\ V \sim c_0(1 + A\beta/3E)^{1/2}, \quad (7)$$

амплитуда W смещения боковой поверхности стержня вследствие пуассоновского расширения оценивается при этом по величине $|A| W = R\nu|A|$.

Возбуждение сверхзвукового солитона растяжения ($A > 0$) возможно в стержнях из материалов с $\beta > 0$ (оргстекло, некоторые полимеры, плавленый кварц, стекло [17]) при выполнении условий (6) для параметров начального импульса растяжения. Характеристики такого солитона деформации растяжения оцениваются по формулам (7). Конкретные примеры расчета параметров уединенных нелинейных волн в стержне радиуса $R = 0.4$ см и заданного значения давления P_0 начального импульса приведены в таблице.

Материал	Параметры начального импульса			$l, \text{ см}$	$ A $	$\lambda, \text{ мм}$	$\frac{V - c_0}{c_0}$	$W, \text{ мкМ}$
	Вид деформации	$ P_0 , \text{ атм}$	$\tau_0, \text{ мкс}$					
Сталь Rex 535	Сжатие	400	8	$5.6 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^{-4}$	61	$2.4 \cdot 10^{-4}$	0.2
Латунь 162 тв.	»	1000	6	61	10^{-3}	28	$1.0 \cdot 10^{-3}$	1.2
Полистирол	»	200	5	1.2	$5.7 \cdot 10^{-3}$	9	$1.6 \cdot 10^{-2}$	8.0
Поваренная соль	»	80	5	$1.1 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^{-4}$	32	$6.7 \cdot 10^{-4}$	1.2
Плавленый кварц	Растяжение	900	2	44	$1.2 \cdot 10^{-3}$	22	$1.2 \cdot 10^{-3}$	0.2
Оргстекло	»	200	13	$3.0 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^2$	$9.2 \cdot 10^{-5}$	0.6
Стекло	»	100	6	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	66	$1.4 \cdot 10^{-4}$	0.1

Заметим, что если форма начального импульса отличается от функции вида $\text{sh}^{-2}\theta$ и амплитуда импульса достаточно велика, то возможен распад начального импульса и образование последовательности N солитонов деформации [2, 4], располагающихся в порядке убывания амплитуд, причем импульсам

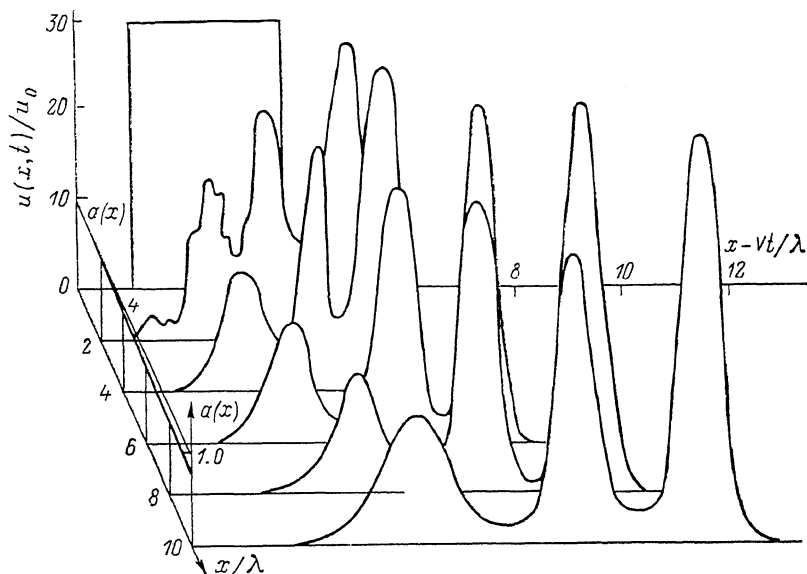


Рис. 1. Формирование последовательности солитонов и фокусировка их при распространении в сужающемся стержне. Изменение площади a сечения показано вдоль оси x .

с большими амплитудами соответствуют большие значения скорости V и меньшие значения λ (7). Пример формирования последовательности солитонов из начального импульса, имеющего прямоугольную форму, показан на рис. 1 [15]. Отметим, что в случае образования последовательности солитонов оценки (7) для A , λ и V и данные таблицы соответствуют первому из солитонов.

Что же касается формирования дозвуковых солитонов сжатия ($\beta > 0$) или растяжения ($\beta < 0$), то ограничение на тип упругого материала, в котором можно было бы ожидать возбуждения таких волн, следует из определения (3) скорости V для решения u_1 при ограничении (4) на амплитуду A импульса и имеет вид

$$\kappa = 3(E - \mu) / (|\beta| e_0) < 1. \quad (8)$$

Оказывается, что для большинства исследованных нами материалов $\kappa \gg 1$, в частности, для стали ~ 500 , для латуни ~ 200 , для оргстекла ~ 1000 . Следовательно, в рассматриваемых областях параметров материала стержня и начального импульса трудно осуществить формирование дозвуковых солитонов.

Таким образом, вопрос о выборе материала, в котором можно ожидать формирования дозвукового солитона, остается пока открытым. Следует однако

отметить, что поскольку уравнение (1) в длинноволновом приближении описывает нелинейные волны в стержнях из материалов с различными упругими потенциалами [12], в частности из несжимаемых высокоэластичных нелинейных материалов неогукера типа, то можно ожидать выполнения условия (8), а значит, и образования дозвукового солитона в каучуках, резине, пенополистироле и т. п.

Важным фактором, влияющим на динамику нелинейных волн, может быть неоднородность геометрических и упругих свойств волновода, которая возникает вследствие обработки, неравномерного нагрева при изготовлении, пористости материала или может быть создана искусственно. Задачи об эволюции локализованного импульса продольной деформации в нелинейно-упругом стержне переменного сечения и в неоднородном стержне рассматривались ранее [13, 15], где, в частности, было показано, что слабое изменение параметров R , E и β вдоль оси стержня приводит к изменению амплитуды солитона сжатия, распространение которого сопровождается длинной волной малой амплитуды (плато). Например, если стержень расширяется, то амплитуда начального солитона и его скорость уменьшаются, а плато за солитоном соответствует дополнительной по отношению к импульсу волне деформации сжатия. Наоборот, если стержень сужается, то за солитоном сжатия образуется длинная волна деформации растяжения, а амплитуда и скорость импульса возрастают, характерная ширина λ солитона при этом уменьшается, т. е. происходит фокусировка импульса, которая, очевидно, может привести к большим локальным напряжениям, превышающим предел упругости материала.

С другой стороны, по зависимости параметров солитона от вида неоднородностей волновода можно определять изменения физических и геометрических характеристик стержня вдоль его оси.

Очень интересен, но далек от разрешения вопрос о влиянии диссипации на распространение нелинейных упругих волн в стержне. Основными причинами затухания волн [18] являются рассеяние на микронеоднородностях вещества и поглощение в материале. В длинноволновом приближении затухание можно считать экспоненциальным с коэффициентом затухания α , который определяется для линейных (α_1) и нелинейных (α_2) упругих волн следующим образом [18, 19]:

$$\alpha_1 = \pi\varepsilon/\lambda, \quad \alpha_2 = 8\pi^2\eta/(\lambda^2\rho c_0), \quad (9)$$

где ε — постоянный коэффициент потерь, η — вязкость.

В случае $\alpha_1 \ll \alpha_2$ затухание волны описывается линейной теорией, при $\alpha_1 \gg \alpha_2$ преобладает нелинейный механизм затухания. В качестве примера оценим характерное расстояние α^{-1} затухания для солитона деформации растяжения в стержне с $R=0.4$ см из плавленого кварца (параметры A , λ , V приведены в таблице, $\varepsilon=1.7 \cdot 10^{-6}$, $\eta=6.7 \cdot 10^{-4}$ кг/м \cdot с) получим $\alpha_1^{-1} \sim 5 \cdot 10^3$ м, $\alpha_2^{-1} \sim 10^5$ м, т. е. $\alpha_1^{-1} \ll \alpha_2^{-1}$, и поглощение упругой нелинейной волны необходимо рассчитывать по нелинейной теории $\alpha = \alpha_2$.

2. Наблюдение уединенных нелинейных волн деформации в твердом теле

Установка (рис. 2) состояла из устройства для создания ударных волн в жидкости, схемы синхронизации и голографического интерферометра. Ударные волны образовывались при воздействии нефокусированного импульса от рубинового лазера ОГМ-20 (энергия 0.4 Дж, длительность импульса 15—20 нс) на алюминированное зеркало, расположенное в воде непосредственно перед входным торцом образца из полистирола, изготовленного в виде цилиндрического стержня диаметром 1 см и длиной 5.5 см, с плоскими продольными срезами, отполированными для поперечного наблюдения на просвет. Для регистрации голограмм использовался второй рубиновый лазер ОГМ-20, синхронизованный с первым с помощью таймера ГЗИ-6. Диафрагмированный пучок света от лазера 1 (диаметр пучка 1.5 мм) расширялся двумя телескопическими системами 2 и 3 до диаметра 20 мм и клином 4 делился на предметный и опорный пучки. Предметный пучок, пройдя через клин, падал на кювету 5 с окном 12.

Центральное сечение стержня 13 проецировалось линзой 7 в плоскость голограммы 8. Опорный пучок формирования из излучения лазера, отраженного клином через линзу 9 и направляемого зеркалом 10 на голограмму. Таким образом регистрировалась голограмма сфокусированного изображения стержня. Первая экспозиция осуществлялась в отсутствие импульса от лазера 11, вторая экспозиция голограммы производилась лазерным импульсом, синхронизованным с определенной стадией распространения ударной волны.

Несущие полосы на интерферограммах, полученных в результате восстановления дважды экспонированных голограмм, появились в результате поворота клина 6 между экспозициями.

На интерферограммах (рис. 3, а, б) представлены две достаточно сильные волны сжатия А и В в стержне из полистирола и в жидкости, окружающей образец, причем амплитуда первой из них А немного превышает амплитуду второй волны В, а характерные толщины этих волн составляют 2—3 мм, что

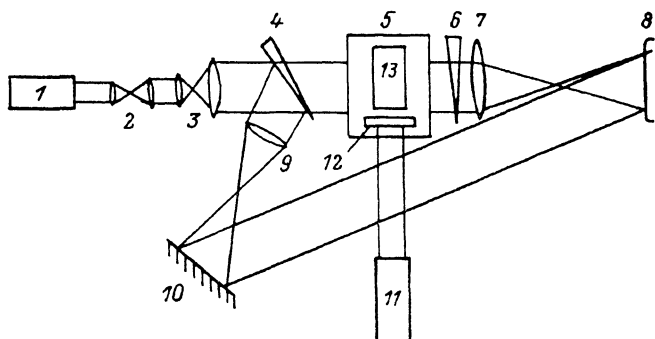


Рис. 2. Схема экспериментальной установки для генерации и наблюдения нелинейных волн деформации.

значительно превосходит характерную толщину скачка уплотнения в начальной ударной волне. Вслед за волнами сжатия А и В движется длинная волна С меньшей амплитуды. По-видимому, интерферограммы на рис. 3, а, б отражают процесс формирования солитона сжатия, сопровождающийся перекачкой энергии из волн сжатия А и В в солитон С. Пик солитона плавно переходит в осциллирующий хвост, что согласуется с данными численных расчетов процесса формирования нелинейных уединенных волн [15].

В окружающей стержень жидкости видны граничные конические волны (или так называемые пуассоновы волны), возникающие вследствие пуассонова расширения боковой поверхности стержня при прохождении по нему волны сжатия [20].

Приведем некоторые количественные оценки параметров наблюдаемого солитона. Характерную длину λ солитона можно измерить непосредственно по фотографиям. Скорость V солитона можно оценить по углу γ , образованному фронтом пуассоновой волны и боковой поверхностью стержня

$$V = c_{ж} / \sin \gamma, \quad (10)$$

где $c_{ж}$ — скорость волны в жидкости, которую мы примем равной скорости звука.

Амплитуда А солитона деформации может быть определена по смещению полос Δk в интерференционной картине

$$A = \lambda_1 \Delta k / ((n - 1)(1 - 2\nu)l_1 + (n - n_B)2\nu R), \quad (11)$$

где λ_1 — длина световой волны, n — показатель преломления твердого тела, n_B — показатель преломления воды, l_1 — толщина стержня по ходу луча (расстояние между параллельными срезами).

Для нашего случая значения параметров таковы: $c_{ж} = 1.49 \cdot 10^3$ м/с, $n = 1.6$, $n_B = 1.33$, $l_1 = 0.75 \cdot 10^{-2}$ м, $\lambda_1 = 0.7 \cdot 10^{-6}$ м. Приведем оценки параметров солитона

деформации сжатия, интерферограмма которого помещена на рис. 3, б: $V = 2.4 \cdot 10^3$ м/с, $\lambda = 8$ мм, $A = 4.5 \cdot 10^{-4}$. Это соответствует амплитуде волны давления, равной $P = AE = 13.5$ атм, и удовлетворительно согласуется со значениями, полученными по формулам (7) по значению $P_0 = 13.5$ атм при $R = 5$ мм $A \approx 4.5 \times 10^{-4}$, $V \approx 2.36 \cdot 10^3$ м/с, $\lambda \approx 30$ мм, $l \approx 60$ мм. Оценка энергии \mathcal{E} солитона по формуле

$$\mathcal{E} = 4\pi A^2 \lambda R^2 E / 3, \quad (12)$$

приводим к значению $\mathcal{E} \sim 5 \cdot 10^{-4}$ Дж. Учитывая, что энергия оптического излучения лазера составляет около 0.5 Дж, можно заключить, что коэффициент преобразования световой энергии в акустическую имеет весьма правдоподобную величину порядка 10^{-3} .

Таким образом, нам, по-видимому, впервые удалось сформировать из первичной ударной волны и зарегистрировать нелинейную уединенную волну

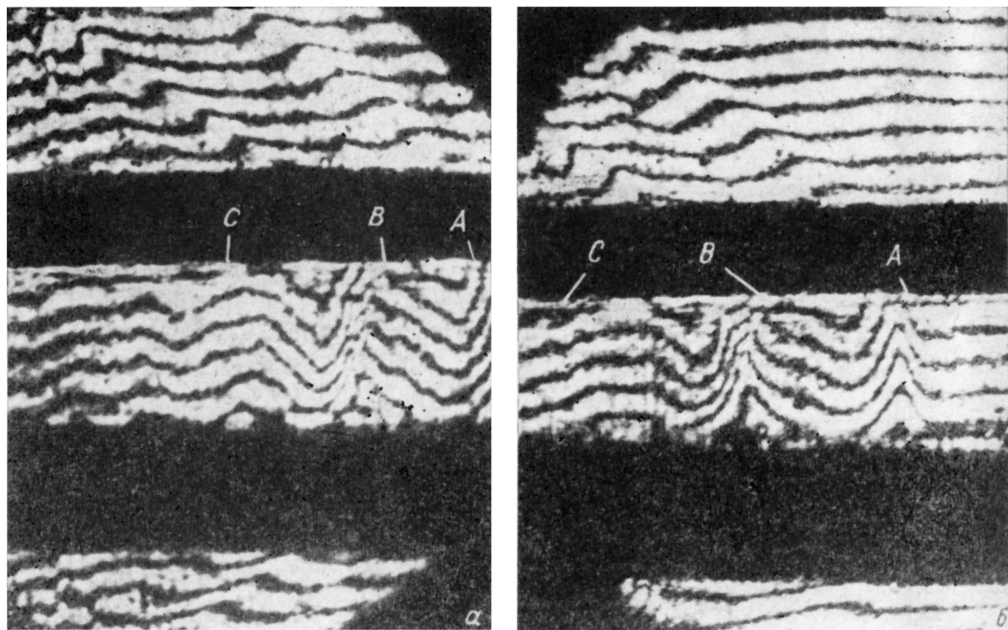


Рис. 3.

а, б — лазерные интерферограммы процесса формирования нелинейных уединенных волн продольной деформации сжатия.

деформации в твердотельном волноводе (стержне из полистирола). Качественное отличие наблюдаемых нами нелинейных волн от слабых ударных волн в твердом теле состоит в значительно большей ширине возмущенной зоны сжатия в стержне ($\lambda > R$), наличии протяженного осциллирующего хвоста за основным локализованным импульсом, а также в отсутствии зоны растяжения за волной сжатия. Оценки параметров нелинейной уединенной волны удовлетворительно согласуются с найденными теоретически величинами для солитонов сжатия u_1 (см. формулу (2)) в полистироле, полученными при решении «уравнения с двумя дисперсиями».

По имеющимся данным [21], при ширине импульса $\lambda \sim 1$ см характерное расстояние затухания в полистироле превышает 100 см, что значительно больше расстояния l , на котором наблюдается формирование уединенной волны деформации ($l \sim 6$ см). Это указывает на возможность проведения экспериментов по уточнению физических свойств наблюдаемых волн.

Авторы благодарны С. К. Захарову и М. Ф. Лебедевой за предоставленный полистирол и измерение его механических свойств и А. Б. Синяни за полезное обсуждение механизма затухания волн в полимерах.

Литература

- [1] *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* УФН, 1970, т. 102, № 4, с. 549—586.
- [2] *Солитоны / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри.* М.: Мир, 1983. 408 с.
- [3] *Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена, Э. Скотта.* М.: Мир, 1981. 290 с.
- [4] *Захаров В. Е.* ЖЭТФ, 1973, т. 65, № 1, с. 219—225.
- [5] *Nariboli G., Sedov A. J.* Math. Anal. Appl., 1970, v. 32, N 3, p. 661—677.
- [6] *Boussinesq J. J.* Math. Pures Appl., 1872, v. 2, p. 55—97.
- [7] *Карабутов А. А., Платоненко В. Т., Руденко О. В.* и др. Вестник МГУ, сер. 3, 1984, т. 25, № 3, с. 89—91.
- [8] *Г. В. Дрейден, Ю. И. Островский, А. М. Самсонов* и др. Письма ЖТФ, 1986, т. 12, № 19, с. 1153—1158.
- [9] *Amiranoff F., Fedoseevs R., Schmalz R. F.* Phys. Rev., 1985, v. A32, N 6, p. 3535—3546.
- [10] *Виедорчик Н. Е., Иоффе И. В.* Письма ЖТФ, 1982, т. 8, № 5, с. 314—316.
- [11] *Samsonov A. M.* In: Proc. Intern. Conf. on plasma physics (Kiev, April 1987). Kiev: Naukova dumka, 1987, v. 4, p. 88—90.
- [12] *Самсонов А. М., Сокуринская Е. В.* В сб.: VIII Всес. симп. по распространению упругих и упругопластических волн. Новосибирск: Наука, 1987, с. 190—197.
- [13] *Самсонов А. М.* ДАН СССР, 1984, т. 277, № 2, с. 332—335.
- [14] *Островский Л. А., Сутин А. М.* ПММ, 1977, т. 41, № 3, с. 531—537.
- [15] *Самсонов А. М., Сокуринская Е. В.* ПММ, 1987, т. 51, № 3, с. 483—488.
- [16] *Потапов А. И.* Нелинейные волны деформации в стержнях и пластинах. Горький, 1985, 108 с.
- [17] *Францевич И. Н., Воронов Ф. Ф., Банута С. А.* Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов. Киев: Наукова думка, 1982. 286 с.
- [18] *Красильников В. А., Крылов В. В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 312 с.
- [19] *Полякова А. Л.* Письма в ЖЭТФ, 1968, т. 7, № 2, с. 76—78.
- [20] *Дрейден Г. В., Островский Ю. И., Самсонов А. М.* Письма ЖТФ, 1988, т. 14, № 4, с. 310—313.
- [21] *Woodward A. E.* J. Pol. Sci. Part C, 1966, N 14, p. 89—97.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР
Ленинград

Поступило в Редакцию
10 февраля 1988 г.