

УДК 537.212

## К ИЗУЧЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ МЕДЛЕННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ МЕТОДОМ СПЕКТРОСКОПИИ ПОЛНОГО ТОКА

М. А. Шалаев, Б. П. Белинский

Приведен расчет движения электронов в задерживающем поле плоского конденсатора с непараллельными обкладками без учета краевого эффекта. Одно из уравнений Эйлера данной системы является нелинейным и неоднородным и решается путем сведения к эквивалентному интегральному уравнению с последующими итерациями. Исследована область значений параметров системы, при которых справедлив метод итераций. В результате в первом приближении получены выражения для явных зависимостей координат и скорости электрона от времени, имеющие естественную физическую асимптотику.

Известно, что при переходе границы раздела «вакуум—твердое тело» составляющая скорости электрона, параллельная границе раздела ( $v_{||}$ ), сохраняется. Поэтому при изучении угловых зависимостей коэффициента отражения медленных электронов от поверхности твердого тела методом спектроскопии полного тока (СПТ) [1] принципиальным является определение этой величины. В нашем эксперименте [2] регистрация спектров полного тока (ПТ) проводилась с помощью электронной оптики четырехсекционного энергоанализатора. С точки зрения определения  $v_{||}$  простейшей является ситуация, когда поверхность образца нормальна к оси пучка электронов, которые в пространстве перед образцом движутся в задерживающем поле (только таким способом можно создать хорошо сфокусированный пучок). Пусть напряженность этого поля такова, что точка поворота пучка электронов находится на поверхности образца. Тогда в цеи образца существует ток, который и измеряется. Но измеряемый ток исчезает после поворота образца на угол  $\alpha$  относительно оси электронного пучка, это означает, что электроны не долетают до поверхности. Только после того как начальная энергия электронов увеличивается на величину  $\delta E$ , ток появляется вновь, причем оказывается, что  $\delta E \sim \alpha^2$ . Это объясняется тем, что после поворота образца у скорости электрона появляется составляющая, параллельная поверхности образца, и часть энергии электрона приходится на нее. Обычно считают, что добавочная энергия  $\delta E$  идет полностью на компенсацию потери энергии, вызванной появлением новой составляющей скорости, поэтому  $v_{||} = (2\delta E/m)^{1/2}$ . Таким образом, определяется  $v_{||}$  только в момент касания пучком электронов поверхности. Далее полагают, что при дальнейшем увеличении начальной скорости электронов увеличивается только нормальная составляющая скорости, а  $v_{||}$  остается неизменной. Очевидно, что это допущение является очень грубым.

В настоящей работе выполнен расчет зависимости  $v_{||}$  от начальной скорости электронов и угла поворота образца. В расчетах используется распределение потенциала между двумя обкладками плоского конденсатора, расположенными под углом  $\alpha$  друг к другу, причем краевого эффект не учитывается. Хотя распределение потенциала в реальной установке [3] сложнее, но, как было показано в работе [3], на небольших расстояниях перед образцом ход эквипотен-

циалей аналогичен случаю плоского конденсатора с непараллельными обкладками. Угол  $\alpha$  между обкладками соответствует углу поворота образца относительно оси электронной пушки. Этот угол  $\alpha$  является малым параметром данной задачи (в эксперименте он изменялся в диапазоне от 0 до  $10^\circ$ ).

Распределение потенциала  $U$  в пространстве между обкладками, записанное в полярных координатах, есть линейная функция полярного угла  $\varphi$  (рис. 1)

$$U = C_1\varphi + C_2, \quad C_1 = (U_1 - U_2)/\alpha, \quad C_2 = (U_2(\varphi_0 + \alpha) - U_1\varphi_0)/\alpha. \quad (1)$$

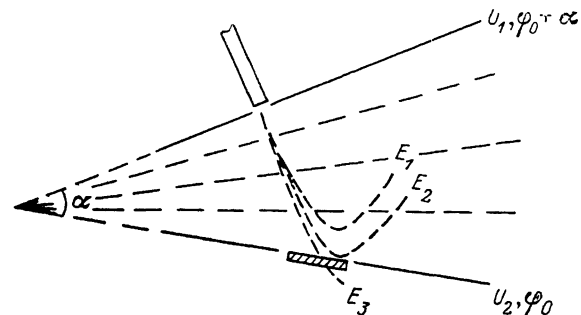


Рис. 1. Траектории движения электронов в задерживающем поле плоского конденсатора с непараллельными обкладками в зависимости от начальной кинетической энергии  $E$ . При  $E=E_1$  ток через образец равен 0, при  $E=E_2$  появляется ток через образец.  $E_{3/2} > E_2 > E_1$ .

Тогда лагранжиан данной задачи, записанный в полярных координатах, примет вид

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} [\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2] + eC_1\varphi + eC_2,$$

а уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dt} (m\rho^2\dot{\varphi}) = eC_1, \quad (2)$$

$$\ddot{\rho} = \rho\dot{\varphi}^2. \quad (3)$$

Введем обозначения

$$\delta U = U_1 - U_2, \quad \frac{e\delta U}{\hbar v_0^2/2} = 2/S, \quad \tau = \frac{\hbar}{v_0}, \quad (4)$$

где  $v_0$  — скорость влета электрона в конденсатор,  $\hbar$  — расстояние между обкладками в точке влета.

Тогда, интегрируя (2) при начальных условиях

$$\dot{\varphi}|_{t=0} = -\frac{\text{tg } \alpha}{\tau}, \quad \rho|_{t=0} = \frac{\hbar}{\text{tg } \alpha},$$

получим следующую систему уравнений:

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0^2\tau}{a} \left( \frac{t}{S\tau} - \frac{a}{\text{tg } \alpha} \right) \frac{1}{\rho^2}, \quad (5)$$

$$\ddot{\rho}^3 = \frac{v_0^4\tau^2}{a^2} \left( \frac{t}{S\tau} - \frac{a}{\text{tg } \alpha} \right)^2 \quad (6)$$

при начальных условиях

$$\rho|_{t=0} = \frac{\hbar}{\text{tg } \alpha}, \quad \dot{\rho}|_{t=0} = 0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0 + \alpha.$$

Сделаем замену переменных и заменим функции в (5), (6)

$$\left(\frac{t}{S\tau} - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}\right) = x, \quad \frac{d}{dt} = \frac{1}{S\tau} \frac{d}{dx}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{S^2\tau^2} \frac{d^2}{dx^2},$$

$$\rho(t) = \frac{\hbar}{\operatorname{tg} \alpha} (1 + R(x)), \quad (7)$$

где  $R(x)$  — новая функция от новой переменной  $x$ .

Заметим, что из анализа характера движения электрона от первой обкладки до второй следует

$$R(x) \geq 0. \quad (8)$$

Из (6) с учетом сделанных замен для функции  $R(x)$  получим задачу Коши с нулевыми начальными условиями

$$\begin{cases} R''(1+R)^3 = \frac{\operatorname{tg}^4 \alpha}{\alpha^2} S^2 x^2, \\ R(-a) = 0, \\ R'(-a) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где через  $a$  обозначена величина  $(\alpha/\operatorname{tg} \alpha)$ .

Очевидно, что  $(-a)$  есть нижний предел изменения величины  $x$ . Обозначим верхний предел изменения  $x$  через  $f(S, \alpha)$ . Величина  $f(S, \alpha)$  есть линейная функция времени пролета электрона между обкладками (см. (7)), которое мы обозначим через  $T(S, \alpha)$

$$f(S, \alpha) = \frac{T(S, \alpha)}{S\tau} - a. \quad (10)$$

В течение этого времени  $T(S, \alpha)$  угловая скорость электрона неположительна

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0}{\hbar} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\alpha} \frac{x}{[1+R(x)]^2} \leq 0. \quad (11)$$

Условие (11) выполняется только при  $x \leq 0$ .

Таким образом, для того чтобы найти явную зависимость  $\rho(t)$  (а следовательно, и  $\dot{\rho}(T) = v_n$ ), необходимо решить задачу Коши (9) при  $x$ , изменяющемся в пределах

$$-1 \leq -a \leq x \leq f(S, \alpha) \leq 0. \quad (12)$$

Затем, подставляя  $\rho(t)$  в (5) и интегрируя уравнение (5) по времени от 0 до  $T(S, \alpha)$  (учитывая, что за время  $T(S, \alpha)$  угловая координата  $\varphi$  электрона изменится на величину  $\alpha$ ), получим алгебраическое уравнение для неизвестной величины  $T(S, \alpha)$ , которую и найдем. Тем самым мы определим величину  $v_n = \dot{\rho}(T)$  (скорость «скольжения» электрона при подлете ко второй обкладке) как функцию начальной энергии электрона и угла между обкладками при фиксированной величине задерживающего поля.

Рассмотрим уравнение (9). Оно нелинейно и неоднородно, и, следовательно, поиск точного решения затруднителен. Сведем задачу Коши (9) к эквивалентному интегральному уравнению с нелинейным интегральным оператором Гаммерштейна [4]

$$R(x) = \mathcal{H}R(x) = \varepsilon \int_{-a}^x \frac{t^2(x-t) dt}{[1+R(t)]^3},$$

$$-1 \leq -a \leq x \leq f(S, \alpha) \leq 0, \quad (13)$$

где через  $\varepsilon$  обозначена величина  $S^2 \operatorname{tg}^4 \alpha / \alpha^2$ .

Решение уравнения (13) будем искать по методу итераций. Физические соображения и методика СПТ требуют, чтобы  $R(x) \leq 1$  при  $\alpha$ , принадлежащем отрезку  $[0, 10^\circ]$ . Поэтому, учитывая (8), в качестве нулевого приближения естественно взять  $R_0(t) = 0$ . Тогда после первой итерации получим

$$R_1(x) = \varepsilon \int_{-a}^x t^2(x-t) dt = \varepsilon \left( \frac{x^4}{12} + \frac{a^3}{3}x + \frac{a^4}{4} \right). \quad (14)$$

В интересующей нас области ( $x \in [-a; 0]$ ) функция  $R_1(x)$  монотонно растет. Так как  $R_1(-a) = 0$ , то можно заключить, что  $R_1(x)$  в данной задаче есть неотрицательная функция, и для результата второй итерации легко устанавливается оценка

$$0 \leq R_2(x) = \varepsilon \int_{-a}^x t^2(x-t) \frac{dt}{(1+R_1(t))^3} \leq R_1(x) \quad (15)$$

С помощью (14) нетрудно провести оценку для результата любой последующей итерации

$$R_n(x) \leq R_{n-1}(x) \leq \dots \leq R_1(x) \quad (16)$$

при  $x$ , изменяющемся в пределах  $[-a; 0]$ .

Покажем, что оператор  $\mathcal{K}$  в уравнении (13) является оператором сжатия. Оператор  $\mathcal{K}$ , действующий в пространстве  $\mathcal{C}$  непрерывных функций, удовлетворяет на множестве подчиняющихся условию (16) неотрицательных функций условию Липшица, так как с учетом (16) справедлива оценка в пространстве  $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}R_{n+1}(x) - \mathcal{K}R_n(x)\| &= \max \left| \varepsilon \int_{-a}^x t^2(x-t) \left[ \frac{1}{(1+R_n(t))^3} - \frac{1}{(1+R_{n-1}(t))^3} \right] dt \right| \leq \\ &\leq \|R_{n+1}(x) - R_n(x)\| 3\varepsilon \int_{-a}^x t^2(x-t) (1+R_1(t))^2 dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, оператор  $\mathcal{K}$  является оператором сжатия, и, следовательно, решение уравнения (13) существует единственно и может быть найдено итерациями, если

$$3\varepsilon \int_{-a}^x t^2(x-t) (1+R_1(t))^2 dt < 1. \quad (18)$$

Так как  $R_1(t)$  есть монотонно растущая неотрицательная функция, то, учитывая (12), (14), для нее получим оценку

$$R_1(f) \leq R_1(f) = \int_{-a}^f t^2(f-t) dt = \frac{\varepsilon}{12} (f+a)^2 (f^2 - 2af + 3a^2). \quad (19)$$

Тогда условие сжатия (18) заведомо выполнено, если

$$(1+R_1(f))^2 R_1(f) < 1/3. \quad (20)$$

Численное решение неравенства (20) относительно величины  $R_1(f)$  дает, что для выполнения условия сжатия (18) достаточно, чтобы

$$R_1(f) = \frac{\varepsilon}{12} (f+a)^2 (f^2 - 2af + 3a^2) < 1.111 \dots \quad (21)$$

Решение неравенства (21) для всех значений угла  $\alpha$  и параметра  $S$  невозможно, так как в определении (10) функции  $f(S, \alpha)$  содержится неизвестная функция  $T(S, \alpha)$  (время пролета электрона между обкладками).

Время  $T(S, \alpha)$  будет максимальным в том случае, когда точка поворота пучка электронов лежит на второй обкладке, на которой в этой ситуации угловая скорость обращается в нуль. Из этого следует, что  $f(S, \alpha) = 0$ , а тогда максимальное время пролета  $T(S, \alpha) = aS\tau$  (см. (10)). Для того чтобы электрон долетел до второй обкладки, его кинетическая энергия должна быть не меньше по-

генциальной энергии задерживающего поля. Из обозначений (4) понятно, что при этом  $S \geq 2$ , а, следовательно,  $\varepsilon \geq 4 \operatorname{tg}^4 \alpha / a^2$ . Поэтому, учитывая, что  $a = a / \operatorname{tg} \alpha$ , условие сжатия (21) можно записать в виде

$$\operatorname{tg}^4 \alpha < 1.111 \alpha^2. \quad (22)$$

Условие (22) ограничивает значения величины  $\alpha$ , при которых применим метод итераций при решении уравнения (13)

$$\alpha < 40.98^\circ. \quad (23)$$

Понятно, что время пролета электрона между обкладками  $T(S, \alpha) \rightarrow 0$ , когда энергия электронов много больше энергии задерживающего поля, т. е.  $S \rightarrow \infty$ . Из обозначения (10) видно, что при этом  $f(S, \alpha) \rightarrow -a$ . Тогда при больших энергиях электронов условие (21) примет вид

$$\operatorname{tg}^4 \alpha < 2.222 \alpha^2, \quad (24)$$

откуда следует, что

$$\alpha < 48.21^\circ. \quad (25)$$

Из физических соображений ясно, что при увеличении начальной энергии электронов задерживающее поле должно меньше влиять на их движение в пространстве между обкладками. Поэтому с ростом параметра  $S$  диапазон углов, для которых выполняется условие сжатия (21), может только расширяться. Учитывая это и объединяя условия (23), (25), заключаем, что решение уравнения (13) можно искать методом итераций при  $\alpha$ , принадлежащем отрезку  $[0, 40.98^\circ]$ . При этом справедлива оценка решения

$$0 \leq R(x) \leq R_1(x) = \varepsilon \left( \frac{x^4}{12} + \frac{a^3}{3} x + \frac{a^4}{4} \right) < 1 \quad (26)$$

при  $x \in [-a; 0]$ .

Тогда, воспользовавшись тем, что при  $R(x) < 1$

$$\frac{1}{(1+R(x))^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2+n)!}{2^n n!} R^n(x), \quad (27)$$

интегральное уравнение (13) можно записать в виде

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varepsilon \int_{-a}^x t^2 (x-t) R^n(t) dt, \quad (28)$$

где  $A_n$  — коэффициент, не зависящий от  $t$  и  $x$ .

Из (28) видно, что в итерациях будут присутствовать только целые степени  $\varepsilon$ . Тогда решение задачи (13) можно искать в виде ряда по степеням  $\varepsilon$

$$R(x) = r_1(x) \varepsilon + r_2(x) \varepsilon^2 + r_3(x) \varepsilon^3 + \dots \quad (29)$$

При этом оказывается, что  $r_1(x) = R_1(x) / \varepsilon$ .

Таким образом, если принять  $R(x) \approx R_1(x)$ , то ошибка составит величину  $o(\varepsilon^2)$ . В методе СПТ относительная ошибка  $(\Delta \rho / \rho) = O(\varepsilon^2)$  и равна примерно 0.01 % при  $\alpha = 10^\circ$ . Такая ошибка приводит к погрешности в определении координаты  $\rho$  электрона при подлете ко второй обкладке, равной примерно 0.05 см. Эта точность вполне удовлетворительна, если учесть, что диаметр пучка электронов вблизи образца равен примерно 0.2 см.

Таким образом, приближенно явную зависимость  $\dot{\rho}(t)$  можно записать в виде

$$\dot{\rho}(t) = \frac{\hbar}{\operatorname{tg} \alpha} \dot{R}_1(x(t)) = \frac{\hbar}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\varepsilon}{S\tau} \left( \frac{x^3 + a^3}{3} \right), \quad (30)$$

где  $x = (t/S\tau) - a$ .

Для того чтобы найти время полета электрона между обкладками, надо решить уравнение (5), в котором, как следует из (7), (14),  $\rho(t)$  надо подставить в виде

$$\rho(t) = \frac{h}{\text{tg } \alpha} (1 + R_1(x(t))). \quad (31)$$

Тогда для величины  $f(S, \alpha)$  получим уравнение

$$\int_{-a}^{f(S, \alpha)} \frac{tdt}{[1 + R_1(x(t))]^2} = -\frac{1}{S}. \quad (32)$$

Величина  $S$ , равная удвоенному отношению кинетической энергии электрона к энергии задерживающего поля конденсатора, и величина  $\alpha$  являются двумя независимыми параметрами. Видно, что в (32) правая часть стремится к нулю при  $S \rightarrow \infty$ , следовательно,  $f(S, \alpha) \rightarrow -a$ .

Уравнение (32) является условием того, что электрон долетает до второй обкладки за время  $T(S, \alpha)$ . Взяв интеграл в левой части уравнения (32), получим

$$\frac{f^2 - a^2}{2} - \frac{2S^2 a}{a^4} \int_{-a}^f \left( \frac{x^5}{12} + \frac{a^3}{3} x^2 + \frac{a^4}{4} x \right) dx = -\frac{1}{S}. \quad (33)$$

Найдем минимальное значение параметра  $S$ , при котором точка поворота пучка электронов лежит на второй обкладке, т. е.  $f(S, \alpha) = 0$ . Тогда, учитывая в (33)  $\alpha^2$  как малый параметр, найдем

$$S|_{f=0} = \frac{2}{a^2} \left( 1 + \frac{4}{9} \frac{a^2}{a^2} \right). \quad (34)$$

Понятно, что при меньших энергиях электронов (а следовательно, и при меньших  $S$ ) они не будут долетать до второй обкладки. Таким образом, нас будет интересовать решение при

$$S \geq \frac{2}{a^2} \left( 1 + \frac{4}{9} \frac{a^2}{a^2} \right). \quad (35)$$

Из (35) можно получить, что если при некотором значении угла раствора  $\alpha'$  точка поворота пучка находилась на второй обкладке, то после увеличения угла раствора пластин на некоторый угол  $\delta\alpha$  пучок не будет достигать второй обкладки, если не увеличить начальную энергию электронов  $E_0$  на величину  $\delta E$ . При этом из (34) следует

$$\delta E = E_0 \frac{10}{a} (\delta\alpha)^2. \quad (36)$$

Эта зависимость хорошо согласуется с экспериментом по сдвигу первичного максимума спектров ПТ при изменении угла  $\alpha$ .

Так как  $\alpha^2$  в уравнении (33) является малым параметром, то это уравнение можно решить относительно  $f$  с точностью до  $\alpha^2$ , ограничившись не содержащими  $\alpha^2$  членами

$$f(S, \alpha) = -\sqrt{a^2 - \frac{2}{S}}, \quad T(S, \alpha) = S\tau \left( a - \sqrt{a^2 - \frac{2}{S}} \right). \quad (37)$$

Тогда для искомой величины  $v_{II} = \dot{\rho}(T)$  можно записать

$$v_{II} = \frac{v_0}{\text{tg } \alpha} \frac{e}{3S} [a - (a^2 - 2/S)^{1/2}]. \quad (38)$$

Рассмотрим предельные случаи. При малых энергиях  $S \rightarrow 2$ , а  $v_{II} \rightarrow 2v_0 a/3$ . При больших энергиях электронов  $S \rightarrow \infty$ , а  $v_{II} \rightarrow v_0 \alpha$ , при этом  $\alpha$  мал. Видно, что в последнем случае решение имеет вполне естественную физическую асимптотику.

В рамках сделанных приближений можно утверждать, что при повороте образца и после того, как электронный пучок коснулся образца,  $v_{\parallel}$  непрерывно увеличивается при увеличении начальной энергии электронов и в пределе стремится к  $v_0\alpha$ .

Тем самым поставленная в работе задача об исследовании зависимости  $v_{\parallel}(S, \alpha)$  решена в первом приближении. Предложенный метод расчета можно использовать и для нахождения приближений более высокого порядка. При стремлении  $\alpha$  к 0 все уравнения и формулы непрерывно переходят в уравнения и формулы для плоского конденсатора.

### Литература

- [1] Комолов С. А. Поверхность, 1985, № 5, с. 5—21.
- [2] Комолов С. А., Штанько А. В., Строков В. Н., Шалаев М. А. Вестник ЛГУ. Сер. физ. хим., 1986, № 4, с. 88—91.
- [3] Ди Стефано Т. Х., Пирс Д. Т. ПНИ, 1970, № 2, с. 19—28.
- [4] Забрейко П. П., Кошгелев А. И., Красносельский М. А. и др. Интегральные уравнения. Сер. СМБ. М.: Наука, 1968. 369 с.

Ленинградский государственный  
университет им. А. А. Жданова

Поступило в Редакцию  
18 декабря 1987 г.

---