

# Влияние волновода на вынужденное движение цепочек джозефсоновских вихрей

© А.С. Малишевский, В.П. Силин, С.А. Урюпин

Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук,  
119991 Москва, Россия

E-mail: malish@lebedev.ru

(Поступила в Редакцию 16 октября 2006 г.)

Изучено вынужденное движение цепочек вихрей — спиральных волн — в системе, состоящей из магнитосвязанных джозефсоновского перехода и волновода. Установлена связь плотности транспортного тока со скоростью цепочки.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 17547), Роснауки (госконтракты № 02.442.11.7514 и 02.445.11.7331, НИР в рамках соглашения по теме „Теоретические и экспериментальные проблемы прикладной высокотемпературной сверхпроводимости“) и Фонда поддержки отечественной науки.

PACS: 74.50.+r, 74.78.Fk

## 1. Введение

Интерес к изучению движущихся цепочек вихрей в джозефсоновских переходах (ДП) возник сравнительно давно [1]. В настоящее время свойства цепочек вихрей привлекают внимание в связи со значительным числом экспериментальных работ, посвященных изучению ДП в кольцевой геометрии.

При исследовании цепочек вихрей в одиночных ДП значительное внимание уделялось изучению движения цепочек с ненулевым магнитным полем, имеющих скорости  $v$ , меньшие  $v_S$  — скорости Свихарта одиночного перехода (см., например, [2]). Согласно работе [3], в случае ДП, магнитосвязанного с волноводом, такие цепочки могут иметь скорости и большие  $V_S$  — скорости Свихарта перехода, перенормированной из-за взаимодействия ДП с волноводом. В частности, когда скорость Свихарта волновода  $V_{Sw}$  значительно превышает  $V_S$ , возможно движение цепочек вихрей со скоростями, значительно превосходящими  $V_S$ . Возможность движения цепочек быстрых вихрей подобна предсказанной недавно для случая уединенного быстрого вихря [4,5].

Согласно [3], тип цепочки зависит от того, к какой из четырех областей принадлежит скорость цепочки. Эти области определяются неравенствами:  $0 < v < v_1$ ,  $v_1 < v < v_{Sw}$ ,  $V_{Sw} < v < v_2$  и  $v > v_2$ , где скорости  $v_1$  и  $v_2$  являются известными функциями  $V_S$  и  $V_{Sw}$  [4,5]. Очевидно, что зависимость типа цепочки от ее скорости приведет к соответствующим зависимостям динамики цепочки при наличии внешнего воздействия на систему.

Содержание этого положения раскрыто в настоящей работе применительно к задаче о вынужденном движении цепочек вихрей — спиральных волн — под действием транспортного тока. Далее в предположении, что потери энергии цепочки вихрей обусловлены омической диссипацией в ДП и волновод, установлена

связь транспортного тока через переход со скоростью цепочки. Показано, что чем меньше период цепочки, тем больше величина транспортного тока, обеспечивающая равномерное движение цепочки. Если диссипация в волновод пренебрежимо мала, то устойчивое движение цепочки вихрей возможно в двух интервалах скоростей:  $0 < v < v_1$  и  $V_{Sw} < v < v_2$ . В каждом из этих двух интервалов плотность транспортного тока возрастает с увеличением скорости цепочки. При скоростях, удовлетворяющих неравенствам  $v_1 < v < V_{Sw}$  и  $v > v_2$ , плотность тока убывает с ростом скорости, что отвечает неустойчивому состоянию системы. Наличие конечной диссипации в волновод изменяет эти закономерности так, что внутри интервала  $v_1 < v < V_{Sw}$  появляется участок вблизи  $V_{Sw}$ , где движение устойчиво, а около левого края интервала  $V_{Sw} < v < v_2$  возникает область неустойчивости.

Закономерности вынужденного движения цепочки вихрей видоизменяются, если транспортный ток протекает через всю систему ДП–волновод. В этом случае существует интервал скоростей  $v_w < v < V_{Sw}$  (см. раздел 5), в котором реализуется вынужденное движение цепочки в направлении, противоположном направлению движения цепочек со скоростями  $v < v_w$  и  $v > V_{Sw}$ . Если  $v_w > v_1$ , то устойчивое движение имеет место при  $v < v_1$  и при скоростях, несколько меньших  $v_w$ ,  $V_{Sw}$  и  $v_2$ . Движение с иными скоростями неустойчиво. Если же  $v_w < v_1$ , что возможно при сравнительно большой величине константы связи  $S_w$ , то устойчивое движение имеет место при  $v < v_w$  и при скоростях, несколько меньших  $v_1$ ,  $V_{Sw}$  и  $v_2$ .

Реализовать вынужденное движение цепочки можно и при пропускании тока только через волновод. При этом медленные ( $v < V_{Sw}$ ) и быстрые ( $v > V_{Sw}$ ) цепочки движутся в разных направлениях. Области устойчивого и неустойчивого движения те же, что при пропускании тока лишь через ДП.

## 2. Общее выражение для транспортного тока

Ограничимся рассмотрением условий, в которых магнитные поля внутри ДП и волновода связаны с разностями фаз волновых функций сверхпроводников локальными соотношениями [6]

$$H = -\frac{\phi_0}{2\pi} \frac{\epsilon V_S^2}{2c^2 d} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + S \frac{\partial \varphi_w}{\partial z} \right), \quad (1)$$

$$H_w = -\frac{\phi_0}{2\pi} \frac{\epsilon_w V_{Sw}^2}{2c^2 d_w} \left( \frac{\partial \varphi_w}{\partial z} + S_w \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \quad (2)$$

где  $\varphi$  и  $\varphi_w$  — разности фаз на ДП и волноводе,  $\phi_0$  — квант магнитного потока,  $2d$  и  $2d_w$  — толщины, а  $\epsilon$  и  $\epsilon_w$  — диэлектрические проницаемости ДП и волновода,  $c$  — скорость света,  $S, S_w \leq 1$  — константы связи перехода и волновода. Тогда для разностей фаз имеет место следующая система уравнений [4,5]:

$$\omega_j^2 \sin \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \omega_j^2 \frac{j}{j_c} + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} = V_S^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + S V_S^2 \frac{\partial^2 \varphi_w}{\partial z^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_w}{\partial t^2} + \alpha_w \frac{\partial \varphi_w}{\partial t} = V_{Sw}^2 \frac{\partial^2 \varphi_w}{\partial z^2} + S_w V_{Sw}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (4)$$

где  $\omega_j$  — джозефсоновская частота,  $j$  — однородно распределенная по ДП плотность транспортного тока, величины  $\alpha$  и  $\alpha_w$  характеризуют омическую диссипацию в несверхпроводящих слоях. При записи (3), (4) принято, что поверхностные и черенковские потери отсутствуют.

Энергия системы дается выражением (ср. [5])

$$W = \frac{\phi_0^2}{32\pi^3 c^2} \int dz \left\{ \frac{\epsilon \omega_j^2}{d} (1 - \cos \varphi) + \frac{\epsilon}{2d} \left[ V_S^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{\epsilon_w}{2d_w} \left[ V_{Sw}^2 \left( \frac{\partial \varphi_w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_w}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{S \epsilon V_S^2}{d} + \frac{S_w \epsilon_w V_{Sw}^2}{d_w} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi_w}{\partial z} \right\}, \quad (5)$$

где последнее слагаемое обусловлено взаимодействием перехода и волновода. Используя уравнения (3), (4) и тождество  $\epsilon S V_S^2 / d \equiv \epsilon_w S_w V_{Sw}^2 / d_w$ , находим производную по времени от энергии системы (5)

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = & \frac{\phi_0^2}{32\pi^3 c^2} \int dz \left\{ -\frac{\epsilon}{d} \left( \omega_j^2 \frac{j}{j_c} + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right. \\ & - \frac{\epsilon_w}{d_w} \alpha_w \left( \frac{\partial \varphi_w}{\partial t} \right)^2 + \frac{\epsilon}{d} V_S^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\varphi + S \varphi_w)}{\partial z} \right] \\ & \left. + \frac{\epsilon_w}{d_w} V_{Sw}^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \varphi_w}{\partial t} \frac{\partial (S_w \varphi + \varphi_w)}{\partial z} \right] \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

Воспользуемся соотношением (6) для анализа установившегося движения вихревых структур, когда омические потери энергии в ДП и волноводе компенсируются вкладом в энергию из-за воздействия транспортного тока. При этом  $dW/dt = 0$ . Для движущейся с постоянной скоростью  $v$  вихревой структуры разности фаз зависят от  $\xi \equiv z - vt$ :  $\varphi(z, t) = \psi(\xi)$ ,  $\varphi_w(z, t) = \psi_w(\xi)$ . Далее ограничимся рассмотрением установившегося движения цепочек вихрей — вихревых структур, для которых  $\psi'(\xi)$  и  $\psi_w'(\xi)$  являются периодическими функциями от  $\xi$ . Для таких структур энергия, приходящаяся на один период, сохраняется. Тогда, переходя в (6) к переменной  $\xi$  и интегрируя по одному периоду, с учетом периодичности функций  $\psi'(\xi)$  и  $\psi_w'(\xi)$  из (6) находим связь плотности транспортного тока  $j$  со скоростью цепочки вихрей

$$\frac{j}{j_c} \int_{\text{period}} d\xi \psi' = \frac{v}{\omega_j^2} \int_{\text{period}} d\xi \left[ \alpha (\psi')^2 + \frac{\epsilon_w}{\epsilon} \frac{d}{d_w} \alpha_w (\psi_w')^2 \right]. \quad (7)$$

Если омические потери и транспортный ток сравнительно невелики, то в (7) приближенно можно использовать выражения для разностей фаз свободно движущихся бездиссипативных цепочек вихрей. Пренебрегая малыми потерями в волноводе, из (4) находим

$$\psi_w' = -\frac{S_w V_{Sw}^2}{V_{Sw}^2 - v^2} \psi'. \quad (8)$$

В формуле (8) принято, что в отсутствие разности фаз на ДП в системе нет магнитного поля. Принимая во внимание соотношение (8), для плотности тока из (7) получаем

$$\frac{j}{j_c} \int_{\text{period}} d\xi \psi' = \frac{v}{\omega_j^2} \alpha(v) \int_{\text{period}} d\xi (\psi')^2, \quad (9)$$

где

$$\alpha(v) \equiv \alpha + S S_w \frac{V_S^2 V_{Sw}^2}{(V_{Sw}^2 - v^2)^2} \alpha_w. \quad (10)$$

С целью применить соотношение (9) для анализа движения спиральных волн для  $\psi$  используем уравнение

$$\sin \psi = k_j^{-2}(v) \psi'', \quad (11)$$

где характерное волновое число  $k_j(v)$  является функцией скорости

$$k_j^2(v) \equiv \frac{V_{Sw}^2 - v^2}{(v_1^2 - v^2)(v_2^2 - v^2)} \omega_j^2.$$

Скорости  $v_1$  и  $v_2$  определяются скоростями Свихарта  $V_S$  и  $V_{Sw}$  и константами связи  $S$  и  $S_w$  [4,5], причем  $v_1 < V_S$ ,  $V_{Sw} < v_2$ .

### 3. Движение цепочки $2\pi$ -кинков

Рассмотрим сначала движение цепочки вихрей — спиральных волн — в условиях, когда скорость цепочки удовлетворяет неравенствам  $0 \leq v < v_1$  или  $V_{Sw} < v < v_2$ . Тогда  $k_j(v)$  — действительная величина и уравнение (11) имеет монотонно возрастающее решение [3], описывающее спиральные волны — цепочку элементарных вихрей ( $2\pi$ -кинков) [7]

$$\psi(\xi) = \pi + 2 \operatorname{am}(u, k), \quad (12)$$

где  $u \equiv k_j(v)\xi/k$ ,  $\operatorname{am}$  — амплитуда Якоби, параметр  $k$  характеризует период цепочки ( $0 < k < 1$ ). Используя разложение [8]

$$\operatorname{am}(u, k) = \frac{\pi u}{2K(k)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n(1+q^{2n})} \sin \frac{\pi n u}{K(k)},$$

где  $q \equiv \exp[-\pi K(\sqrt{1-k^2})/K(k)]$ ,

$$K(k) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} \quad (13)$$

— полный эллиптический интеграл первого рода, запишем решение (12) в виде

$$\psi(\xi) = \pi + \frac{2\pi\xi}{\Xi} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n(1+q^{2n})} \sin \frac{2\pi n \xi}{\Xi}, \quad (14)$$

где  $\Xi \equiv 2kK(k)k_j^{-1}(v)$  — период рассматриваемой структуры, зависящий от скорости цепочки и параметра  $k$ . С помощью (13) находим, что  $\partial\Xi/\partial k > 0$ , т.е. при фиксированной скорости вихревой цепочки ее период возрастает с увеличением параметра  $k$ . Отметим, что в кольцевой системе ДП–волновод параметр  $k$  связан с радиусом кольца  $R$  соотношением  $2\pi R = n\Xi = 2nkK(k)/k_j(v)$ , где  $n = 1, 2, \dots$  определяет число вихрей в кольце.

Из разложения (14) следует, что

$$\int_0^{\Xi} d\xi \psi' = 2\pi. \quad (15)$$

С учетом (15) для усредненных по периоду цепочки магнитных полей внутри ДП и волновода из (1) и (2) получаем

$$\bar{H} = -\frac{\phi_0}{4kK(k)} \frac{\epsilon V_S^2}{c^2 d} \left(1 - \frac{SS_w V_{Sw}^2}{V_{Sw}^2 - v^2}\right) k_j(v), \quad (16)$$

$$\bar{H}_w = \frac{\phi_0}{4kK(k)} \frac{\epsilon_w V_{Sw}^2}{c^2 d_w} \frac{S_w v^2}{V_{Sw}^2 - v^2} k_j(v). \quad (17)$$

Выражения (16) и (17) показывают, как параметр  $k$  определяет магнитное поле при заданной скорости цепочки.

С помощью разложения (14) находим

$$\begin{aligned} \int_0^{\Xi} d\xi (\psi')^2 &= \frac{4\pi^2}{\Xi} \left[1 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}\right] \\ &\equiv \frac{16K(k)E(k)}{\Xi} \equiv \frac{8E(k)k_j(v)}{k}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$E(k) \equiv \int_0^{\pi/2} dx \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} \quad (19)$$

— полный эллиптический интеграл второго рода. Подставляя (15) и (18) в (9), находим плотность транспортного тока

$$\frac{j}{j_c} = \frac{4E(k)}{\pi k} \frac{v k_j(v)}{\omega_j^2} \alpha(v). \quad (20)$$

Если волновода нет, то выражение (20) переходит в известный результат работы [2].

Используя определение (19), из (20) находим, что  $\partial j/\partial k < 0$ . Это означает, что если зафиксировать скорость движения цепочки, то при уменьшении параметра  $k$  возрастает плотность тока. Иными словами, при уменьшении периода цепочки возрастает транспортный ток ( $\partial j/\partial \Xi < 0$ ), т.е. чем меньше расстояние между отдельными вихрями в цепочке, тем больший ток требуется для поддержания ее равномерного движения.

Проанализируем выражение (20) для системы, в которой

$$V_S \ll V_{Sw}.$$

В этом случае в области скоростей

$$v < v_1 \simeq \left(1 - \frac{1}{2} SS_w\right) V_S$$

движутся медленные вихри, имеющие скорости, значительно меньшие скорости Свихарта волновода. В этой области скоростей

$$k_j(v) \simeq \frac{\omega_j}{\sqrt{v_1^2 - v^2}},$$

а выражение (20) с учетом (10) принимает вид

$$\frac{j(v)}{j_c} \simeq \frac{4E(k)}{\pi k} \left(\alpha + \frac{SS_w V_S^2}{V_{Sw}^2} \alpha_w\right) \frac{1}{\sqrt{v_1^2 - v^2}} \frac{v}{\omega_j}. \quad (21)$$

Зависимость вида (21) отвечает монотонно возрастающей плотности тока. При этом чем меньше значение параметра  $k$ , тем круче идет кривая  $j(v)$ .

В области скоростей, близких к скорости  $V_{Sw}$ ,

$$V_{Sw} < v < v_2 \simeq \left(1 + \frac{1}{2} S S_w \frac{V_S^2}{V_{Sw}^2}\right) V_{Sw}, \quad (22)$$

из (11) имеем

$$k_k(v) \simeq \frac{\omega_j}{V_{Sw}} \sqrt{\frac{v - V_{Sw}}{v_2 - v}}.$$

При этом выражение (20) с учетом (10) принимает вид

$$\frac{j(v)}{j_c} \simeq \frac{4E(k)}{\pi k} \left[ \alpha + \frac{S S_w V_S^2}{4(V_{Sw} - v)^2} \alpha_w \right] \sqrt{\frac{v - V_{Sw}}{v_2 - v}} \frac{1}{\omega_j}, \quad (23)$$

качественно отличный от (21). Внутри области (22) плотность тока как функция скорости цепочки вихрей имеет минимум и монотонно возрастает при приближении к границам области  $v = V_{Sw}$  и  $v = v_2 \gtrsim V_{Sw}$ . При этом чем меньше значение параметра  $k$ , тем больше минимальное значение  $j(v)$  в области скоростей быстрого вихря.

Если скорость находится в областях  $v_1 < v < V_{Sw}$  и  $v > v_2$ , что отвечает отрицательному значению  $k_j^2(v)$ , то вместо решения (12) имеем спиральные волны, описываемые выражением [3]

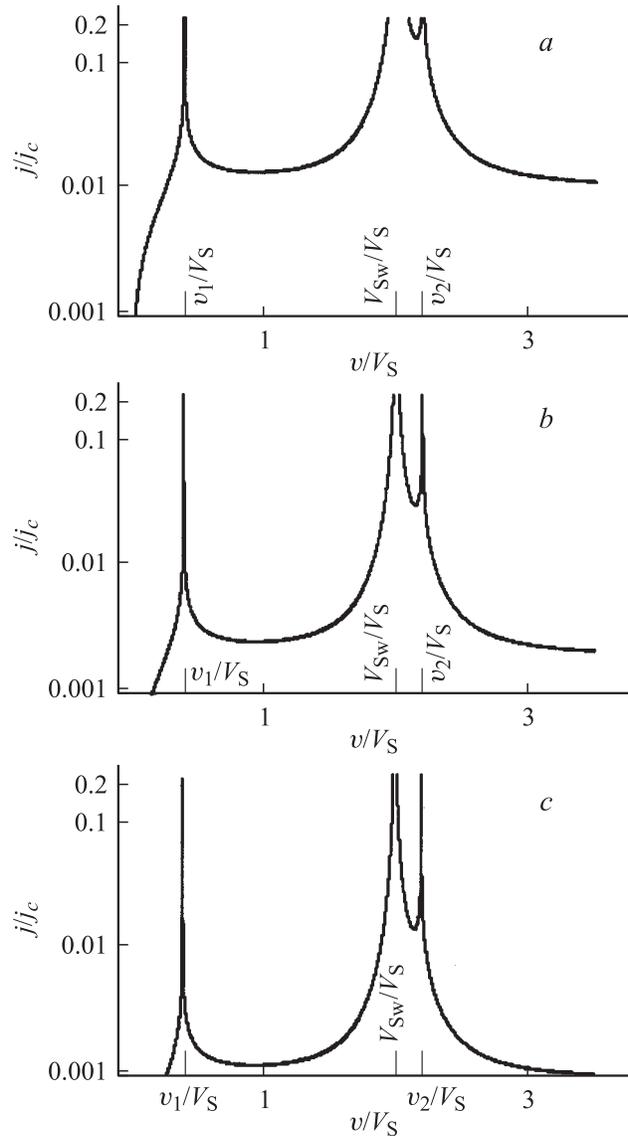
$$\psi(\xi) = 2 \operatorname{am}(|k_j(v)|\xi/k, k). \quad (24)$$

Для такой цепочки  $j(v)$  дается выражением (20), в котором  $k_j(v)$  следует заменить на  $|k_j(v)|$ . В области скоростей  $v_1 < v < V_{Sw}$  плотность тока имеет минимум, а при  $v > v_2$  функция  $j(v)$  с ростом  $v$  монотонно убывает до значения  $j(\infty) = [4E(k)/\pi k](\alpha/\omega_j)j_c$ .

#### 4. Обсуждение зависимостей тока от скорости и устойчивости цепочек вихрей

Зависимости  $j(v/V_S)$  для цепочек элементарных вихрей (12) и (24) изображены на рис. 1, *a–c* для разных значений параметра  $k$ . На каждом из рисунков видны области, отвечающие скоростям  $v < v_1$ ,  $v_1 < v < V_{Sw}$ ,  $V_{Sw} < v < v_2$  и  $v > v_2$ .

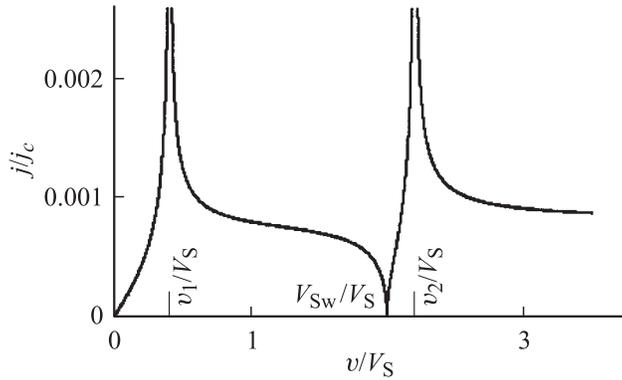
Согласно рис. 1, на кривой  $j(v)$  есть три участка, на которых  $\partial j/\partial v < 0$ . Так как среднее напряжение на ДП прямо пропорционально скорости цепочки, на этих участках дифференциальная проводимость системы отрицательна, что свидетельствует о неустойчивости. В случае одиночного перехода плотность тока зависит от скорости по закону  $\propto v/\sqrt{|v_S^2 - v^2|}$ , что отвечает устойчивости цепочек вихрей со скоростями, меньшими  $v_S$ , и неустойчивости цепочек, движущихся со скоростями, большими  $v_S$ . Как видно из рис. 1, *a–c*, влияние волновода приводит к расщеплению области неустойчивости.



**Рис. 1.** Зависимость плотности транспортного тока, протекающего через ДП, от скорости цепочки вихрей (в логарифмическом масштабе). Расчет выполнен для системы с параметрами:  $V_{Sw} = 2V_S$ ,  $S = S_w = 0.9$ ,  $\alpha = \alpha_w = 5 \cdot 10^{-4} \omega_j$ . Определяющий период цепочки параметр  $k$  равен 0.1 (*a*), 0.5 (*b*), 0.9 (*c*).

Характер устойчивости системы существенно меняется, если в волноводе нет потерь. Зависимость  $j(v)$  для такого случая приведена на рис. 2. Из сопоставления рис. 1 и 2 видно, что при скоростях, меньших  $v_1$  и больших  $v_2$ , характер устойчивости в случае  $\alpha_w = 0$  по сравнению со случаем  $\alpha_w \neq 0$  не изменился. В то же время область  $v_1 < v < V_{Sw}$  целиком стала областью неустойчивости, а область  $V_{Sw} < v < v_2$  — областью устойчивости. Иными словами, устойчивость системы вблизи скорости Свихарта волновода  $V_{Sw}$  определяется величиной диссипации в волноводе.

Легко видеть, что зависимости  $j(v)$  качественно подобны представленным на рис. 1 и 2 и для других



**Рис. 2.** Зависимости плотности транспортного тока, протекающего через ДП, от скорости цепочки вихрей. Расчет выполнен при  $\alpha_w = 0$ , остальные параметры те же, что и при построении рис. 1, с.

соотношений скоростей Свихарта  $V_S$  и  $V_{Sw}$ . Это означает, что сделанные выше выводы об областях устойчивости при протекании тока через ДП имеют универсальный характер.

## 5. Движение цепочек вихрей при протекании тока через всю систему либо только через волновод

Получим выражение для  $j$  в том случае, когда транспортный ток протекает через всю рассматриваемую систему. Согласно [9], в этом случае в левую часть уравнения (4) нужно добавить слагаемое

$$\frac{16\pi^2 c d_w}{\phi_0 \epsilon_w} j.$$

Тогда в подинтегральном выражении в правой части (6) добавится

$$-\frac{16\pi^2 c}{\phi_0} j \frac{\partial \varphi_w}{\partial t},$$

а в левой части (7) возникнет дополнительное слагаемое

$$(j/j_c) \int_{\text{period}} d\xi \psi'_w;$$

$$\begin{aligned} \frac{j}{j_c} \int_{\text{period}} d\xi (\psi' + \psi'_w) \\ = \frac{v}{\omega_j^2} \int_{\text{period}} d\xi \left[ \alpha(\psi')^2 + \frac{\epsilon_w}{\epsilon} \frac{d}{d_w} \alpha_w (\psi'_w)^2 \right]. \end{aligned}$$

В итоге вместо (9) имеем

$$\left( \frac{v_w^2 - v^2}{V_{Sw}^2 - v^2} \right) \frac{j}{j_c} \int_{\text{period}} d\xi \psi' = \alpha(v) \frac{v}{\omega_j^2} \int_{\text{period}} d\xi (\psi')^2,$$

где  $v_w \equiv V_{Sw} \sqrt{1 - S_w}$ .

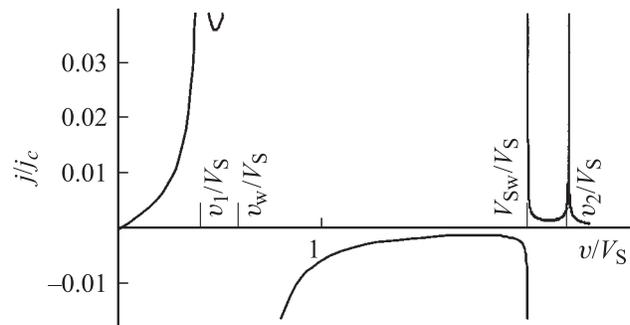
При решении (12) и (24) отсюда получаем связь плотности тока со скоростью цепочки элементарных вихрей

$$\frac{j}{j_c} = \frac{4E(k)}{\pi k} \left( \frac{V_{Sw}^2 - v^2}{v_w^2 - v^2} \right) \frac{v |k_j(v)|}{\omega_j^2} \alpha(v). \quad (25)$$

График функции (25) приведен на рис. 3. Для значений параметров, при которых построен график, выполнено условие  $v_w > v_1$ . Из сравнения рис. 3 и 1, с видно, что при пропускании тока через всю систему возникает область скоростей  $v_w < v < V_{Sw}$ , в которой равномерное движение цепочек вихрей в том же направлении, что и со скоростями  $v < v_w$  и  $v > V_{Sw}$ , поддерживается противоположно направленным током. Как и в случае движения одного вихря [10], появление такого эффекта обратного тока обусловлено тем, что при протекании тока через всю систему существенно его взаимодействие с магнитным полем цепочки во всей системе. Появление скорости  $v_w$ , при которой происходит изменение знака функции  $j(v)$ , приводит к изменению характера устойчивости системы при скоростях, несколько меньших  $v_w$ , а именно: при скоростях меньших, но близких к  $v_w$  появляется участок скоростей, где  $\partial j(v)/\partial v > 0$  и движение устойчиво. В остальных областях устойчивости и неустойчивости те же, что и в случае протекания тока только через ДП (рис. 1). Это утверждение основано на том, что в области устойчивости абсолютная величина тока должна возрастать с увеличением скорости и, наоборот, убывать в области неустойчивости.

Скорость  $v_w$  может быть меньше  $v_1$ , если  $S_w$  мало отличается от единицы. В этом случае движение цепочек устойчиво при  $v < v_w$ , неустойчиво при  $v$ , несколько больших  $v_w$  и  $v_1$ , устойчиво при  $v$ , несколько меньших  $v_1$ . В остальном диапазоне скоростей характер устойчивости тот же, что в случае  $v_w > v_1$  (см. выше).

Еще одна возможность поддержания вынужденного движения цепочек вихрей возникает при пропускании тока только через волновод. В этом случае цепочки со скоростями  $v < V_{Sw}$  и  $v > V_{Sw}$  движутся в одном направлении под действием противоположно-направленных то-



**Рис. 3.** Зависимость плотности транспортного тока, протекающего через всю систему ДП–волновод, от скорости цепочки вихрей. Расчет выполнен при тех же параметрах, что и при построении рис. 1, с.

ков. При этом области устойчивого и неустойчивого движения совпадают с приведенными на рис. 1 применительно к протеканию тока только через ДП.

## 6. Заключение

Изложенное выше содержит исчерпывающую информацию о зависимостях тока от скорости цепочек элементарных вихрей в условиях, когда потери энергии цепочки обусловлены малыми омическими потерями в ДП и волноводе. В рамках такого сравнительно простого подхода не учитываются обусловленные нормальными электронами поверхностные потери энергии в сверхпроводниках и потери энергии на черенковское излучение волн Свихарта. Пренебрежение поверхностными потерями в чистых сверхпроводниках оправдано при достаточно низких температурах, когда число нормальных электронов экспоненциально мало. В свою очередь, неучет черенковских потерь допустим в условиях малого отношения лондоновской длины к джозефсоновской и при скоростях цепочек, не слишком близких к предельным скоростям  $v_1$  и  $v_2$ . Вместе с тем, приведенные выше зависимости составляют основу для дальнейшего развития теории применительно к условиям, в которых необходим учет как черенковских, так и поверхностных потерь.

## Список литературы

- [1] P. Leubwohl, M.J. Stephen. Phys. Rev. **163**, 376 (1967).
- [2] P.M. Marcus, Y. Imry. Solid State Commun. **33**, 345 (1980).
- [3] А.С. Малишевский, В.П. Силин, С.А. Урюпин, С.Г. Успенский. КСФ ФИАН **5**, 21 (2005).
- [4] A.S. Malishevskii, V.P. Silin, S.A. Uryupin. Phys. Lett. A **306**, 153 (2002).
- [5] А.С. Малишевский, В.П. Силин, С.А. Урюпин. ЖЭТФ **125**, 673 (2004).
- [6] В.П. Силин, С.А. Урюпин. ЖЭТФ **108**, 2163 (1995).
- [7] Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. Мир, М. (1977). 624 с.
- [8] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. Физматлит, М. (2003). 632 с.
- [9] А.С. Малишевский, С.А. Урюпин. ФТТ **46**, 1165 (2004).
- [10] А.С. Малишевский, В.П. Силин, С.А. Урюпин, С.Г. Успенский. ФТТ **46**, 1544 (2004).