

01; 09

**ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
НА ТОНКИХ ПРОВОДЯЩИХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛАСТИНАХ**

Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская

Предлагается метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на системе полубесконечных параллельных проводящих пластин. Метод основывается на использовании представлений компонент поля через интегралы специального вида (сингулярные потенциалы). Задача приводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, допускающих эффективное асимптотическое решение для случая коротких волн.

Введение

Задача дифракции электромагнитных волн на тонких полубесконечных проводящих пластинах, параллельных друг другу, рассматривалась в ряде работ, и для ее решения были предложены различные точные и приближенные методы. Среди этих работ в первую очередь должны быть упомянуты исследования Вайнштейна [1-4], Хейнса [5-6], Нобла [7], Миттра и Ли [8]. Полученные в них результаты основываются на применении известного метода Винера—Хопфа—Фока [7-9], позволяющего в принципе построить точное решение краевых задач рассматриваемого типа или эквивалентных им интегральных уравнений для плотностей наведенных токов. Интегральные уравнения нашли также успешное применение в задачах дифракции на поставленных под углом пластинах. Из работ этого направления следует назвать исследования Г. А. Гринберга [10, 11], Миллара [12], Скальской [13], работу Пименова и Метрикина [14]. Недавно авторами настоящей статьи был предложен новый метод решения задачи дифракции на поставленных под углом непересекающихся пластинах, опирающийся на представлении компонент электромагнитного поля интегралами специального вида [15]. Этот метод приводит к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, отличных от ранее рассмотренных и удобных для получения асимптотического решения для случая коротких волн. Данный метод получил существенное развитие в работе Зильберглейта и Златиной [16].

Настоящая работа посвящена распространению метода на случай дифракции на параллельных пластинах. Особенности геометрии не позволяют получить решение для этого случая, как предельное в теории, предложенное в работах [15, 16]. Мы ограничимся решением задачи дифракции на двух пластинах, однако метод непосредственно переносится на задачи с произвольным числом параллельных пластин.

**Постановка задачи и сведение ее к системе
интегральных уравнений Фредгольма второго рода**

Рассмотрим волновод, образованный двумя тонкими полубесконечными параллельными проводящими пластинами, помещенными на расстоянии $2h$ друг от друга. Предположим, что на вход волновода поступает плоская элек-

тромагнитная волна с параллельным ребрам пластин вектором напряженности электрического поля E^0 , распространяющаяся в направлении, которое образует угол γ с плоскостью симметрии. Введем систему прямоугольных координат (x, y, z) , как показано на рисунке. Напряженность первичного поля тогда будет

$$E^0 = E_0 e^{-ik(x \cos \gamma + y \sin \gamma)}, \quad (1)$$

где $k = \omega/c$ — волновое число.¹

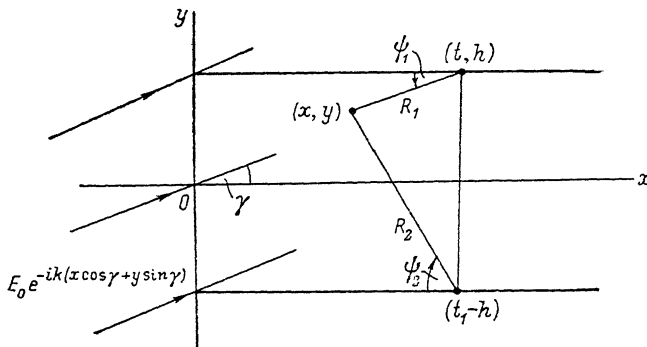
Вторичное поле создается токами, наведенными на поверхности пластин. Определение полного поля $E = E(x, y)$ приводится к решению уравнения Гельмгольца

$$\Delta E + k^2 E = 0 \quad (2)$$

при граничных условиях

$$E|_{x>0, y=\pm h} = 0. \quad (3)$$

Искомое поле должно удовлетворять также условиям Майкснера в окрестности ребер пластин и иметь определенное асимптотическое поведение на бесконечности.²



Следуя методу сигнулярных потенциалов [15], будем искать решение рассматриваемой задачи в форме

$$E = E_0 e^{-ik(x \cos \gamma + y \sin \gamma)} + E_0 \sqrt{i} ik \cos \frac{\gamma}{2} \int_0^{\infty} \varphi_1(t) H_{1/2}^{(2)}(kR_1) \cos \frac{\psi_1}{2} dt + \\ + E_0 \sqrt{i} ik \cos \frac{\gamma}{2} \int_0^{\infty} \varphi_2(t) H_{1/2}^{(2)}(kR_2) \cos \frac{\psi_2}{2} dt, \quad (4)$$

где

$$R_1 = \sqrt{(t-x)^2 + (h-y)^2}, \quad R_2 = \sqrt{(t-x)^2 + (h+y)^2}, \\ \cos \frac{\psi_1}{2} = \sqrt{\frac{t-x+R_1}{2R_1}}, \quad \cos \frac{\psi_2}{2} = \sqrt{\frac{t-x+R_2}{2R_2}}$$

($H_{1/2}^{(2)}(x)$ — функция Ханкеля).

В предположении, что $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ непрерывны на интервале $[0, \infty)$, выражение (4) представляет собой решение уравнения Гельмгольца, регулярное в плоскости (x, y) с разрезами вдоль пластин. При некоторых ограничениях, налагаемых на $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, выбранная форма решения обеспечивает также выполнение условий на бесконечности и вблизи ребер пластин. Для определения функций $\varphi_{1,2}(t)$ используются граничные условия (3). Принимая во внимание соотношения

¹ Предполагается, что зависимость поля от времени характеризуется множителем $e^{i\omega t}$.

² Чтобы обойти трудности, связанные с формулировкой этих условий, удобно рассматривать данную задачу как предельный случай соответствующей задачи для среды, обладающей небольшой проводимостью. Для такой среды $\text{Im } k < 0$ и вторичное поле экспоненциально затухает на бесконечности.

$$\begin{aligned}
H_{1/2}^{(2)}(kR_1) \cos \frac{\psi_1}{2} \Big|_{y=h} &= \begin{cases} 0, & t < x, \\ i \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \frac{e^{-ik(t-x)}}{\sqrt{t-x}}, & t > x, \end{cases} \\
H_{1/2}^{(2)}(kR_2) \cos \frac{\psi_2}{2} \Big|_{y=h} &= \frac{i}{\sqrt{2\pi k}} e^{-ik\sqrt{(t-x)^2+h^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{t-x+2ih}} + \frac{1}{\sqrt{t-x-2ih}} \right], \\
H_{1/2}^{(2)}(kR_1) \cos \frac{\psi_1}{2} \Big|_{y=-h} &= \frac{i}{\sqrt{2\pi k}} e^{-ik\sqrt{(t-x)^2+h^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{t-x+2ih}} + \frac{1}{\sqrt{t-x-2ih}} \right], \\
H_{1/2}^{(2)}(kR_2) \cos \frac{\psi_2}{2} \Big|_{y=-h} &= \begin{cases} 0, & t < x, \\ i \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \frac{e^{-ik(t-x)}}{\sqrt{t-x}}, & t > x, \end{cases}
\end{aligned}$$

где корень из комплексного числа обозначает главную ветвь функции, получаем

$$\begin{aligned}
&\int_x^\infty \varphi_1(t) \frac{e^{-ik(t-x)}}{\sqrt{t-x}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2ik}} \frac{e^{-ik(x \cos \gamma + h \sin \gamma)}}{\cos \frac{\gamma}{2}} - \\
&- \frac{1}{2} \int_0^\infty \varphi_2(s) e^{-ik\sqrt{(s-x)^2+h^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{s-x+2ih}} + \frac{1}{\sqrt{s-x-2ih}} \right] ds = F_1(x), \\
&\int_x^\infty \varphi_2(t) \frac{e^{-ik(t-x)}}{\sqrt{t-x}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2ik}} \frac{e^{-ik(x \cos \gamma - h \sin \gamma)}}{\cos \frac{\gamma}{2}} - \\
&- \frac{1}{2} \int_0^\infty \varphi_1(s) e^{-ik\sqrt{(s-x)^2+h^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{s-x+2ih}} + \frac{1}{\sqrt{s-x-2ih}} \right] ds = F_2(x).
\end{aligned}$$

Если воспользоваться формулами обращения Абеля

$$\int_x^\infty \varphi(t) \frac{e^{-ikt(t-x)}}{\sqrt{t-x}} dt = F(x), \quad \varphi(t) = -\frac{e^{ikt}}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^\infty \frac{F(x) e^{-ikc}}{\sqrt{x-t}} dx \quad (5)$$

и принять во внимание равенство

$$\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_t^\infty \frac{e^{-ik(1+\cos \gamma)x}}{\sqrt{x-t}} dx = -\sqrt{ik} \cos \frac{\gamma}{2} e^{-ikt \cos \gamma},$$

то приходим к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно функций $\varphi_{1,2}(t)$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= e^{-ikt \cos \gamma + h \sin \gamma} + \int_0^\infty \varphi_2(s) K(s, t) ds, \\
\varphi_2(t) &= e^{-ikt \cos \gamma - h \sin \gamma} + \int_0^\infty \varphi_1(s) K(s, t) ds, \\
0 &\leq t < \infty
\end{aligned} \quad (6)$$

с ядром

$$K(s, t) = \frac{e^{ikt}}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_t^\infty \frac{e^{-ik(x+\sqrt{(s-x)^2+h^2})}}{\sqrt{x-t}} \left[\frac{1}{\sqrt{s-x+2ih}} + \frac{1}{\sqrt{s-x-2ih}} \right] dx. \quad (7)$$

Важное значение для дальнейшего имеет то обстоятельство, что интеграл (7) может быть выражен в замкнутой форме через цилиндрические функции. Чтобы

выполнить соответствующее преобразование, введем новое переменное интегрирования, положив

$$s - x = h \left(\frac{1}{u} - u \right), \quad u = \frac{x - s}{2h} + \sqrt{\left(\frac{x - s}{2h} \right)^2 + 1}.$$

Тогда получим

$$K(s, t) = \frac{e^{ik(t-s)}}{\pi} \frac{d}{dt} \int_{u_1}^{\infty} \frac{e^{-2ikh u} du}{u \sqrt{(u - u_1)(u - u_2)}}, \quad (8)$$

где

$$u_{1,2} = \frac{t - s}{2h} \pm \sqrt{\left(\frac{t - s}{2h} \right)^2 + 1}, \quad u_2 < u_1 \leq u < \infty.$$

В дальнейшем удобно временно предположить, что $\text{Im } k < 0$. Тогда, принимая во внимание, что

$$d \arcsin \frac{\sqrt{-u_2} \sqrt{1 - \frac{u_1}{u}}}{\sqrt{u_1 - u_2}} = \frac{du}{2u \sqrt{(u - u_1)(u - u_2)}},$$

и интегрируя по частям, находим

$$K(s, t) = \frac{4ikh}{\pi} e^{ik(t-s)} \frac{d}{dt} \int_{u_1}^{\infty} e^{-2ikh u} \arcsin \frac{\sqrt{-u_2} \sqrt{1 - \frac{u_1}{u}}}{\sqrt{u_1 - u_2}} du,$$

откуда, выполнив дифференцирование по t , получаем

$$K(s, t) = \frac{2ike^{ik(t-s)}}{\pi (u_1 - u_2)^2} \int_{u_1}^{\infty} e^{-2ikh u} \frac{u_1 + u_2 - 2u}{\sqrt{(u - u_1)(u - u_2)}} du. \quad (9)$$

С помощью линейной подстановки

$$u = u_1 + (u_1 - u_2)v$$

последний интеграл преобразуется к виду

$$K(s, t) = -\frac{2ike^{-ikh(u_1 - u_2)}}{\pi (u_1 - u_2)} \int_0^{\infty} e^{-2ikh(u_1 - u_2)v} v^{-1/2} (1 + v)^{-1/2} (1 + 2v) dv. \quad (10)$$

Воспользовавшись известным интегральным представлением для функции Ханкеля

$$e^{iz} H_0^{(2)}(z) = \frac{2i}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2izv} v^{-1/2} (1 + v)^{-1/2} dv, \\ \text{Im } z < 0,$$

имеем

$$\frac{2i}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2izv} v^{-1/2} (1 + v)^{-1/2} (1 + 2v) dv = e^{iz} H_0^{(2)}(z) + i \frac{d}{dz} e^{iz} H_0^{(2)}(z) = -ie^{iz} H_1^{(2)}(z),$$

откуда окончательно

$$K(s, t) = ikh \frac{H_1^{(2)}(k \sqrt{(s - t)^2 + 4h^2})}{\sqrt{(s - t)^2 + 4h^2}}. \quad (11)$$

В силу принципа непрерывности полученный результат остается справедливым для вещественных положительных k . Найденное представление показывает, что ядро $K(s, t)$ симметрично относительно переменных s и t . Полученное для ядра выражение удобно для получения последующих приближений для больших

значений kh . Подставляя (11) в (6), приходим к системе интегральных уравнений Фредгольма относительно функций $\varphi_{1,2}(t)$

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{-ik(t \cos \gamma + h \sin \gamma)} + ikh \int_0^\infty \varphi_2(s) \frac{H_1^{(2)}(k \sqrt{(s-t)^2 + 4h^2})}{\sqrt{(s-t)^2 + 4h^2}} ds, \\ &0 \leq t < \infty, \\ \varphi_2(t) &= e^{-ik(t \cos \gamma - h \sin \gamma)} + ikh \int_0^\infty \varphi_1(s) \frac{H_1^{(2)}(k \sqrt{(s-t)^2 + 4h^2})}{\sqrt{(s-t)^2 + 4h^2}} ds, \\ &0 \leq t < \infty. \end{aligned} \quad (12)$$

Если положить

$$\varphi_+(t) = \frac{1}{2} [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)], \quad \varphi_-(t) = \frac{1}{2} [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)], \quad (13)$$

то система (12) распадается на два независимых уравнения, различающихся лишь свободными членами

$$\varphi_\pm(t) = f_\pm(t) + ikh \int_0^\infty \varphi_\pm(s) \frac{H_1^{(2)}(k \sqrt{(s-t)^2 + 4h^2})}{\sqrt{(s-t)^2 + 4h^2}} ds, \quad (14)$$

где

$$f_\pm(t) = \frac{1}{2} [e^{-ik(t \cos \gamma + h \sin \gamma)} \pm e^{-ik(t \cos \gamma - h \sin \gamma)}].$$

После определения функций $\varphi_{1,2}(t)$ электрическое поле выражается квадратурой (4). Значения компонент магнитного поля могут быть вычислены по формулам

$$H_x = -\frac{1}{ik} \frac{\partial E}{\partial y}, \quad H_y = \frac{1}{ik} \frac{\partial E}{\partial x}. \quad (15)$$

Для приложений представляет также интерес распределение плотности токов, наведенных на пластинах. Значения суммарных плотностей находятся следующим образом:

$$j_{1,2} = \frac{c}{4\pi ik} \left(\frac{\partial E}{\partial y} \Big|_{y=\pm h+0} - \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_{y=\pm h-0} \right). \quad (16)$$

После несложных вычислений приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} j_{1,2} &= \frac{E_0 c}{\pi \sqrt{\pi} \sqrt{2ik}} \cos \frac{\gamma}{2} \bar{e}^{ikt} \frac{d}{dx} \int_0^x e^{ikt} \varphi_{1,2}(t) \frac{dt}{\sqrt{x-t}} = \\ &= \frac{E_0 c}{\pi \sqrt{\pi} \sqrt{2ik}} \cos \frac{\gamma}{2} \bar{e}^{ikt} \left[\frac{\varphi_{1,2}(0)}{\sqrt{x}} + \int_0^x \frac{d}{dt} e^{ikt} \varphi_{1,2}(t) \frac{dt}{\sqrt{x-t}} \right], \end{aligned} \quad (17)$$

устанавливающим непосредственную связь искомых плотностей с функциями $\varphi_{1,2}(t)$. Из (17), в частности, следуют асимптотические формулы

$$j_{1,2} \underset{x \rightarrow 0}{\approx} \frac{E_0 c}{\pi \sqrt{\pi} \sqrt{2ik}} \cos \frac{\gamma}{2} \frac{\varphi_{1,2}(0)}{\sqrt{x}}, \quad (18)$$

находящиеся в согласии с известным поведением плотности тока вблизи ребра тонкой проводящей пластины.

Решение интегральных уравнений

Полученные выше интегральные уравнения с симметричными ядрами, зависящими от разности аргументов, и пределами $(0, \infty)$ принадлежат к классу уравнений, допускающих точное решение с помощью метода Винера—Хопфа—Фока [7-9].

Применение этого метода связано, однако, со сложными вычислениями, и использование найденных выражений для последующего анализа представляет определенные трудности. В настоящей работе мы воспользуемся методом итераций, удобным для больших значений произведения kh (случай коротких волн). Ограничимся в дальнейшем симметричным случаем, когда направление падающей волны совпадает с осью x . В этом случае $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi(t)$ и задача сводится к решению интегрального уравнения

$$\varphi(t) = e^{-ikt} + ikh \int_0^{\infty} \varphi(s) \frac{H_1^{(2)}(k\sqrt{(s-t)^2 + 4h^2})}{\sqrt{(s-t)^2 + 4h^2}} ds, \quad (19)$$

$$0 \leq t < \infty.$$

Последовательные приближения строятся по схеме

$$\varphi^{(0)}(t) = e^{-ikt},$$

$$\varphi^{(n)}(t) = e^{-ikt} + ikh \int_0^{\infty} \varphi^{(n-1)}(s) \frac{H_1^{(2)}(k\sqrt{(s-t)^2 + 4h^2})}{\sqrt{(s-t)^2 + 4h^2}} ds, \quad n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

В процессе вычислений ядро уравнения заменяется его асимптотическим представлением

$$\frac{H_1^{(2)}(k\sqrt{(s-t)^2 + 4h^2})}{\sqrt{(s-t)^2 + 4h^2}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-ik\sqrt{(s-t)^2 + 4h^2}}}{\sqrt{ik}((s-t)^2 + 4h^2)^{3/4}} \left[1 + \frac{3}{8ik\sqrt{(s-t)^2 + 4h^2}} + \dots \right], \quad (21)$$

и для определения итераций $\varphi^{(n)}(t)$, начиная с $n = 2$, для асимптотического вычисления интегралов вида

$$\int_0^{\infty} f(s) e^{-ikg(s)} ds$$

используется метод стационарной фазы [17, 18]. Степень приближения при этом должна соответствовать числу членов, учитываемых при аппроксимации ядра формулой (21). Поступая таким образом, последовательно находим

$$\varphi^{(1)}(t) = e^{-ikt} - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}h} \frac{\sqrt{t^2 + 4h^2} + t}{(t^2 + 4h^2)^{1/4}} \frac{e^{-ik\sqrt{t^2 + 4h^2}}}{\sqrt{ik}} + \dots,$$

$$\varphi^{(2)}(t) = e^{-ikt} - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}h} \frac{\sqrt{t^2 + 4h^2} + t}{(t^2 + 4h^2)^{1/4}} \frac{e^{-ik\sqrt{t^2 + 4h^2}}}{\sqrt{ik}} +$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{2\pi}h} \frac{\sqrt{t^2 + 16h^2} + t}{(t^2 + 16h^2)^{1/4}} \frac{e^{-ik\sqrt{t^2 + 16h^2}}}{\sqrt{ik}} + \dots,$$

$$\varphi^{(N)}(t) = e^{-ikt} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}h\sqrt{ik}} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n} \frac{\sqrt{t^2 + 4h^2 n^2} + t}{(t^2 + 4h^2 n^2)^{1/4}} e^{-ik\sqrt{t^2 + 4h^2 n^2}} + \dots$$

Переходя к пределу $N \rightarrow \infty$, получаем искомое решение интегрального уравнения

$$\varphi(t) = e^{-ikt} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}h\sqrt{ik}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{\sqrt{t^2 + 4h^2 n^2} + t}{(t^2 + 4h^2 n^2)^{1/4}} e^{-ik\sqrt{t^2 + 4h^2 n^2}} + \dots \quad (22)$$

(t — конечное положительное число), где невыписанные члены представляют собой величины более высокого порядка малости при больших kh . Предложенный метод решения интегрального уравнения (19) легко переносится на случай системы (12).

В соответствии со сказанным выше напряженность электрического поля для случая нормального падения плоской волны выражается формулой

$$E = E_0 e^{-ikx} - E_0 \frac{\sqrt{ik}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(t) \left\{ e^{-ik\sqrt{(t-x)^2+(h-y)^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{t-x+i(h-y)}} + \frac{1}{\sqrt{t-x-i(h-y)}} \right] + e^{-ik\sqrt{(t-x)^2+(h+y)^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{t-x+i(h+y)}} + \frac{1}{\sqrt{t-x-i(h+y)}} \right] \right\}, \quad (23)$$

где $\varphi(t)$ — решение интегрального уравнения (19).

Если воспользоваться равенством (22) и ограничиться главным членом разложения, то получаем в первом приближении

$$E = E_0 e^{-ikx} - E_0 e^{-ikx} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{ik(\sqrt{x^2+(h-y)^2}-x)} \right) \right] - E_0 e^{-ikx} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{ik(\sqrt{x^2+(h+y)^2}-x)} \right) \right] + \dots, \quad (24)$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности.³

Найденное выражение можно рассматривать как приближенное решение задачи дифракции для достаточно больших значений параметра kh , когда можно пренебречь взаимным влиянием пластин друг на друга. Дальнейшие уточнения получаются путем учета следующих членов разложения.

Для обеспечения формальной сходимости удобно временно предположить $\text{Im } k < 0$. При вычислении интегралов используются асимптотические методы [17, 18], причем ход вычислений зависит от выбора положения точки (x, y) . Приведем окончательное выражение для поля в области, расположенной внутри волновода ($0 \leq x < \infty$, $-h < y < h$)

$$E = E_0 e^{-ikx} - E_0 e^{-ikx} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{ik(\sqrt{x^2+(h-y)^2}-x)} \right) \right] - E_0 e^{-ikx} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{ik(\sqrt{x^2+(h+y)^2}-x)} \right) \right] - \frac{E_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{ik}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{\sqrt{x^2+(2hn+h-y)^2}+x}}{2hn+h-y} e^{-ik\sqrt{x^2+(2hn+h-y)^2}} - \frac{E_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{ik}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{\sqrt{x^2+(2hn+h+y)^2}+x}}{2hn+h+y} e^{-ik\sqrt{x^2+(2hn+h+y)^2}} + \dots \quad (25)$$

(x — фиксированное положительное число).

Полученная формула сохраняет смысл при вещественных k и дает асимптотическое выражение поля для достаточно больших значений kh . Если точка (x, y) расположена не слишком близко к стенкам волновода, то интегралы вероятности в (25) можно заменить их асимптотическими представлениями. В частности, поле на оси волновода будет

$$E|_{y=0} = E_0 e^{-ikx} - \frac{2E_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{ik}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{\sqrt{x^2+(2n+1)^2 h^2}+x}}{2n+1} e^{-ik\sqrt{x^2+(2n+1)^2 h^2}} + \dots \quad (26)$$

Члены ряда в этой формуле могут быть интерпретированы как асимптотические представления ($kh \rightarrow \infty$) дифракционных волн, поступающих в точку $(x, 0)$ от кромок волновода. Первый член ряда $n=0$ соответствует волнам, распространяющимся вдоль прямолинейных лучей, соединяющих кромки с точкой $(x, 0)$, последующие члены представляют волны, попадающие в рассматриваемую

³ При вычислении интегралов используется подстановка

$$t - x + \sqrt{(t-x)^2 + (h \pm y)^2} = z^2.$$

мую точку после кратных n отражений от стенок волновода.⁴ Вклад других точек стенок волновода учитывается опущенными членами более высокого порядка малости.

Поле внутри волновода на большом расстоянии от входа

Для приложений представляет интерес определение поля внутри волновода при $x \rightarrow \infty$. Общая формула (25) не годится для этой цели, так как в ней предполагается, что x конечно. Чтобы обойти эту трудность, получим другое выражение для поля в виде разложения по собственным модам данного волновода

$$E|_{x>0} = E_0 \sum_{m=0}^{\infty} M_m e^{-i\sqrt{k^2 - k_m^2} x} \cos k_m y, \quad (27)$$

$$\text{Im} \sqrt{k^2 - k_m^2} \leq 0,$$

где $k_m = (2m + 1)\pi/2h$ — значения волнового числа, соответствующие собственным частотам волновода. Здесь предполагается, что k вещественно и не совпадает с k_m .⁵ Возможность представления поля в форме ряда (27) следует из полноты системы функций

$$\varphi_m(x, y) = e^{-i\sqrt{k^2 - k_m^2} x} \cos k_m y \quad (x > 0, \quad -h < y < h), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Коэффициенты M_m определяются по формулам

$$M_m = \frac{1}{h} \int_{-h}^h \frac{E|_{x=0}}{E_0} \cos k_m y dy, \quad (28)$$

где значения поля на входе волновода могут быть найдены из разложения (25).

Полагая $x=0$, имеем

$$E|_{x=0} = E_0 - E_0 [1 - \Phi(\sqrt{ik}(h-y))] - E_0 [1 - \Phi(\sqrt{ik}(h+y))] -$$

$$- \frac{E_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{ik}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2hn+h-y}} e^{-ik(2hn+h-y)} -$$

$$- \frac{E_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{ik}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2hn+h+y}} e^{-ik(2hn+h+y)} + \dots \quad (29)$$

Подставляя (29) в (28), получаем после соответствующих вычислений

$$M_m = \frac{(-1)^m \sqrt{k}}{k_m h} \left(\frac{1}{\sqrt{k} - k_m} + \frac{1}{\sqrt{k} + k_m} \right) + \dots \quad (30)$$

с точностью до малых величин более высокого порядка. Таким образом, выражение поля внутри волновода для больших kh представляется формулой

$$E = E_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \sqrt{k}}{k_m h} \left(\frac{1}{\sqrt{k} - k_m} + \frac{1}{\sqrt{k} + k_m} \right) e^{-i\sqrt{k^2 - k_m^2} x} \cos k_m y + \dots \quad (31)$$

При фиксированном k , начиная с достаточно больших m , $\text{Im} \sqrt{k^2 - k_m^2} < 0$ и соответствующие члены ряда экспоненциально затухают с возрастанием x . Поэтому

⁴ Длина пути, соединяющего точки $(0, h)$ и $(x, 0)$ при n -кратном отражении,

$$l_n = \frac{2}{2n+1} \sum_{m=1}^n \sqrt{x^2 + (2n+1)^2 h^2} + \frac{1}{2n+1} \sqrt{x^2 + (2n+1)^2 h^2} = \sqrt{x^2 + (2n+1)^2 h^2}, \quad n=1, 2, \dots$$

поэтому волна поступает в рассматриваемую точку с фазой

$$\theta_n = kl_n = k \sqrt{x^2 + (2n+1)^2 h^2}.$$

⁵ При $k=k_m$ мы имеем дело со случаем резонанса на данной частоте и установившегося периодического во времени решения не существует.

вдоль волновода может распространяться при заданном k лишь конечное число волн $N = [kh/\pi + 1/2]$.

Асимптотическое выражение поля при фиксированном k и $x \rightarrow \infty$ будет

$$E = E_0 \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(-1)^m \sqrt{k}}{k_m h} \left(\frac{1}{\sqrt{k} - k_m} + \frac{1}{\sqrt{k} + k_m} \right) e^{-i\sqrt{k^2 - k_m^2} x} \cos k_m y, \quad k \neq k_m. \quad (32)$$

Полученный результат находится в соответствии с физическими представлениями о распространении электромагнитных волн в волноводе при отсутствии сопротивления. В частности, из (32) следует, что пропускная способность волновода растет вместе с ростом kh . Вычислим средний за период поток энергии, переносимый распространяющимися волнами. Этот поток выражается формулой⁶

$$P = -\frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_{-h}^h E H_y^* dy = \frac{E_0^2 c}{8\pi k} \operatorname{Re} \int_{-h}^h \left[\sum_{m=0}^{N-1} M_m e^{-i\sqrt{k^2 - k_m^2} x} \cos k_m y \right] \times \\ \times \left[\sum_{n=0}^{N-1} \bar{M}_n \sqrt{k^2 - k_n^2} e^{i\sqrt{k^2 - k_n^2} x} \cos k_n y \right] dy = \frac{E_0^2 c h}{8\pi k} \sum_{m=0}^{N-1} |M_m|^2 \sqrt{k^2 - k_m^2},$$

откуда

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{2k} \sum_{m=0}^{N-1} |M_m|^2 \sqrt{k^2 - k_m^2}, \quad (33)$$

где P_0 — поток энергии падающей плоской волны, поступающий на вход волновода.

Подставляя найденное выше асимптотическое значение коэффициентов M_m , имеем

$$\frac{P}{P_0} = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{(k_m h)^2} \left(1 + \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_m^2}} \right) + \dots \quad k \neq k_m. \quad (34)$$

В диапазонах $k_{n-1} < k < k_n$ формулой (34) можно пользоваться для значений k , не слишком близких к концам промежутка.

Заключение

Предложенный в данной работе метод непосредственно распространяется на случай, когда первичное поле создается источником произвольного вида. Метод применим также для решения плоских задач дифракции с граничными условиями различных типов для области с двумя полубесконечными параллельными разрезами. Соответствующие задачи для областей с произвольным числом различно расположенных параллельных разрезов сводятся к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, допускающих асимптотическое решение для случая коротких волн.

Литература

- [1] Вайнштейн Л. А. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1948. Т. 12. № 2. С. 144—165.
- [2] Вайнштейн Л. А. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1948. Т. 12. № 2. С. 166—180.
- [3] Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966. 432 с.
- [4] Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио. 1966. 475 с.
- [5] Heins A. E. // Quart. Appl. Math. 1948. Vol. 6. N 2. P. 157—166.
- [6] Heins A. E. Quart. Appl. Math. 1948. Vol. 6. N 3. P. 215—220.
- [7] Нобль Б. Метод Винера—Хофа. М., 1962.
- [8] Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 327 с.

⁶ Звездочка обозначает комплексно-сопряженную величину.

- [9] Фок В. А. // Математический сборник. 1944. Т. 14 (56). № 1. С. 3—48.
- [10] Гринберг Г. А. // ЖТФ. 1957. Т. 27. Вып. 11. С. 2595—2605.
- [11] Гринберг Г. А. // ЖТФ. 1958. Т. 28. Вып. 3. С. 542—554.
- [12] Millar R. F. // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1958. Vol. 54. N 4. P. 479—496, 497—511.
- [13] Скальская И. П. // ЖТФ. 1963. Т. 33. Вып. 2. С. 248—251.
- [14] Пименов Ю. В., Метрикин Р. А. Вопросы математической физики. Л.: Наука, 1976. С. 126—143.
- [15] Лебедев Н. Н., Скальская И. П. // ЖТФ. 1977. Т. 47. Вып. 12. С. 2457—2463.
- [16] Зильбергейт А. С., Златина И. Н. Препринт ФТИ. № 645. Л., 1980. 59 с.
- [17] Эрдейн А. Асимптотические разложения. М., 1962. 127 с.
- [18] Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 376 с.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР
Ленинград

Поступило в Редакцию
28 января 1988 г.
