

01;09

## ИЗЛУЧЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ И ФЛУКТИРУЮЩИХ СРЕДАХ

Ю. С. Кившарь, В. В. Конотов

Исследовано излучение, генерируемое динамическими солитонами, которые описываются возмущенным уравнением Кортевега де Вриза и нелинейным уравнением Шредингера со случайно-неоднородными и флуктуирующими параметрами. Для возмущения произвольного вида найдена спектральная плотность средней мощности излучения и проанализированы конкретные примеры, представляющие физический интерес. Показано, что излучение солитона характеризуется существенно немонотонной зависимостью спектральной плотности средней мощности от волнового числа.

### Введение

В настоящее время динамика нелинейных уединенных волн (солитонов) достаточно хорошо изучена для точно интегрируемых моделей (см., например, [1]). Однако рассмотрение конкретных физических задач приводит к необходимости изучать динамику нелинейных волн в рамках уравнений, отличающихся от точно интегрируемых. В случаях, когда это отличие мало, можно использовать теорию возмущений для солитонов [2, 3].

Действие возмущений на одиночные солитоны приводит, во-первых, к изменению их параметров во времени, а во-вторых, к эффектам, связанным с искажением формы солитонов и излучением линейных волн. Если внешние регулярные возмущения зависят явно от «быстрых» пространственных координат или времени, то существенными оказываются радиационные эффекты (см., например, [4-6]). В случае стохастических возмущений, характеризующихся случайной функцией  $\epsilon f(x, t)$  ( $\epsilon$  — малая амплитуда) с нулевым средним, роль радиационных эффектов становится более важной. Действительно, из-за того, что  $\langle f(x, t) \rangle = 0$  ( $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по всем реализациям случайной функции), основной вклад в усредненные величины, характеризующие динамику солитона, дают поправки порядка  $\epsilon^2$  [7], т. е. в любом случае поправки к параметрам солитона и радиационные поправки имеют один и тот же порядок малости. Поэтому учет радиационных эффектов при описании динамики солитонов особенно необходим, когда действие внешних возмущений носит случайный характер.

Полное статистическое описание динамики солитонов в рамках даже низшего приближения теории возмущений ( $\sim \epsilon^2$ ), которое включает учет флуктуаций солитонных параметров, расчет корреляционной функции, описывающей форму солитона и его излучение, представляет собой весьма сложную проблему. Наиболее просто решается задача об описании флуктуаций параметров солитона, которое проводилось ранее в адиабатическом приближении [7, 8]. В рамках «прямых» приближенных методов (см., например, [3, 5, 9, 10]) возможно также вычисление поправок к адиабатическому приближению, описывающих искажение формы солитона и генерацию линейных по амплитуде возмущения волн. Однако для расчета мощности  $P$  генерируемого возмущением излучения оказывается более эффективным использовать теорию возмущений, основанную на методе обратной задачи рассеяния, которая позволяет получить ряд средних

величин, важных с физической точки зрения, без непосредственного восстановления волнового поля излучения путем использования модифицированных законов сохранения [2]. Например, усредняя закон сохранения энергии, получим уравнение

$$\frac{d}{dt} \langle E_S \rangle = - \langle P \rangle \quad (1.1)$$

( $E_S$  — энергия солитона), из которого вытекает закон изменения усредненных параметров солитона. Техника обратной задачи дает возможность непосредственно рассчитывать величину  $\langle P \rangle$  и ее спектральную плотность.

Анализ спектральной плотности средней мощности излучения топологического солитона — кинка уравнения sine-Gordon — был проведен в работе [11]. В настоящей работе анализируется излучение солитонов качественно иного типа — динамических солитонов уравнения Кортевега де Вриза (КдВ) и нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). Выбор модельных нелинейных уравнений обусловлен их чрезвычайно широким применением в физике плазмы, нелинейной оптике, гидродинамике, физике твердого тела и т. д. (см., например, [9, 12, 13]). Основным результатом работы является вывод общих формул для вычисления средней мощности (и спектральной плотности) излучения солитона, которые применяются для анализа простых, но важных с физической точки зрения возмущений. В частности, обсуждается вопрос о статистически точном описании динамики солитона в рамках адиабатического приближения и показано, что такое описание согласуется с результатом расчета средней мощности излучения.

### 1. Излучение солитона уравнения КдВ

Рассмотрим уравнение КдВ со случайным возмущением общего вида

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = \epsilon f(x, t) R[u], \quad (2.1)$$

где  $u(x, t)$  — вещественное поле,  $R[u]$  — оператор возмущения, а  $f(x, t)$  — случайная функция ( $\epsilon \ll 1$ )

$$\langle f(x, t) \rangle = 0, \quad \langle f(x, t) f(x', t') \rangle = D_T(t-t') B_L(x-x'), \quad (2.2)$$

$D_T(t)$  и  $B_L(x)$  — корреляционные функции, а индексы  $T$  и  $L$  введены для обозначения соответствующих корреляционных радиусов.

Для простоты полагаем, что  $R[u] \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . В противном случае необходимо делать перенормировку, которая зависит от конкретного вида асимптотики неубывающего возмущения [14]. Фурье-образы корреляторов  $d_T(\omega)$  и  $b_L(x)$  обладают свойствами

$$d_T(\omega) = d_T^*(-\omega), \quad b_L(x) = b_L^*(-x). \quad (2.3)$$

Для вычисления средней энергии, излученной в единицу времени  $P$ , используем формулу метода обратной задачи рассеяния

$$P = \frac{d}{dt} \langle E_{\text{н.л.}} \rangle = \int_0^{\infty} \langle p(k) \rangle dk = \frac{32}{\pi} \int_0^{\infty} k^4 \operatorname{Re} \left\langle b(k, t) \frac{\partial b^*(k, t)}{\partial t} \right\rangle dk. \quad (2.4)$$

Здесь  $\langle p(k) \rangle$  имеет смысл усредненной спектральной плотности, а  $b(k, t)$  — так называемый коэффициент Йоста, используемый в методе обратной задачи [1]. Рассматриваем ситуацию, когда в системе имеется одиночный солитон, т. е. решение основного приближения выбираем в виде

$$u_S(x, t) = -2x^2 \operatorname{sech}^2 z, \\ z = x(x - \zeta), \quad \zeta = 4x^2 t + x_0. \quad (2.5)$$

Тогда уравнение, описывающее эволюцию коэффициента Йоста  $b(k, t)$ , может быть записано в виде [2]

$$\frac{\partial b(k, t)}{\partial t} = 8ik^3 b(k, t) - \frac{i\varepsilon \exp(-2ix\xi)}{2kx(k^2 + x^2)} \int_{-\infty}^{\infty} dz R[u_S(z)] (k - ix \operatorname{th} z)^2 e^{-2i \frac{kz}{x}}. \quad (2.6)$$

С помощью (2.6) находим  $b(k, t)$  при  $t \gg t_S \sim 1$  [2] и затем с учетом (2.2) вычисляем коррелятор  $\langle b(k, t) \partial b^*(k, t) / \partial t \rangle$  (см. аналогичную процедуру в [11]). В результате имеем

$$J(k) = \operatorname{Re} \left\langle b(k, t) \frac{\partial b^*(k, t)}{\partial t} \right\rangle = \frac{\varepsilon^2}{16k^2 x^2 (k^2 + x^2)^2 \pi} \int_0^{\infty} dy |A(y)|^2 b_L(y) d_T[\omega_0(y)], \quad (2.7)$$

где

$$A(y) = \int_0^{\infty} dz R[u_S(z)] (k - ix \operatorname{th} z)^2 e^{\frac{ix}{x} (y-2k)},$$

$$\omega_0(y) = 4yx^2 - 8k^3 - 8kx^2.$$

При получении формулы (2.7) не учитывалось, что солитонный параметр  $x$  является, вообще говоря, функционалом случайного поля  $f(x, t)$ . Такое допущение справедливо в основном (борновском) приближении, когда отклонение  $x$  от своего первоначального значения мало. Конкретные границы применимости этого приближения будут установлены ниже.

Коррелятор  $J(k)$  определяет в основном приближении, помимо энергии, изменение других физически важных величин: массы  $M = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx$  и импульса

$\Pi = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x) dx$ . Изменения средних значений этих величин имеют вид

$$\frac{d}{dt} \langle M \rangle = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} J(k) dk, \quad \frac{d}{dt} \langle \Pi \rangle = \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} k^2 J(k) dk.$$

Рассмотрим предельные случаи общей формулы (2.7). Полагая  $b_L(x) = 2\pi \delta(x)$ , получаем результат для пространственно однородных возмущений

$$J(k) = \frac{\varepsilon^2 x^2}{8k^2 (k^2 + x^2)^2} \left| Q\left(\frac{k}{x}\right) \right|^2 d_T(8k^3 + 8kx^2), \quad (2.8)$$

где

$$Q(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dz R[u_S(z)] (a - i \operatorname{th} z)^2 e^{-2iaz}.$$

Таким образом, спектральная плотность средней энергии, излученной солитоном в единицу времени при его движении в однородной среде, имеет вид

$$\langle p(k) \rangle = \frac{4\varepsilon^2 x^2 k^2}{\pi (k^2 + x^2)^2} \left| Q\left(\frac{k}{x}\right) \right|^2 d_T(8k^3 + 8kx^2). \quad (2.9)$$

Структура полученной формулы достаточно проста. Излучение линейных волн происходит в результате взаимодействия солитона (который имеет вид «пакета волн» шириной  $\sim x^{-1}$ ) с флуктуациями среды. Спектр последних характеризуется наличием частоты  $\omega_*(k)$ , которая удовлетворяет соотношению  $\max d_T(\omega) = d_T(\omega_*)$ , и шириной  $\sim T^{-1}$ . Следовательно, основной вклад в спектральную плотность (2.9) дают две области в пространстве волновых чисел, определенные соответственно первыми двумя и последним сомножителями в (2.9). Полная мощность (2.4) зависит от взаимного перекрытия указанных областей. Так, если  $x \gg T^{1/3}$ , что выполняется, например, для дельта-коррелированного во времени процесса, функция  $p(k)$  «не чувствительна» к конкретному значению  $\omega_*$ . Если же справедливо противоположное соотношение, т. е.

$x \ll T^{1/2}$ , то наблюдается существенная зависимость спектральной плотности  $\langle p(k) \rangle$  и, как следствие, полной мощности  $P$  от величины  $\omega_*$ . В частности, максимальное значение  $P$  достигается при  $\omega_* = 0$  и убывает при  $\omega_* \rightarrow \infty$ . Подобная зависимость спектральной плотности излучения от параметров системы имеет резонансный характер.

Следует отметить, что в силу неконсервативности рассматриваемой системы результат (2.9) не позволяет с помощью (1.1) определить изменение средних параметров солитона. Полученная формула описывает только спектральный состав излучения в системе. Расчет флуктуаций параметров солитона в данном случае необходимо проводить непосредственно с помощью уравнений адиабатического приближения и радиационных поправок к ним (см., например, [4, 5]).

Для того чтобы рассмотреть случай стационарной случайно-неоднородной среды, подставим в (2.7) вместо  $d_T(\omega)$  величину  $2\pi\delta(\omega)$ . После упрощений имеем

$$J(k) = \frac{\varepsilon^2}{32k^2(k^2 + z^2)^2} \left| W\left(\frac{k}{z}\right) \right|^2 b_L\left(2k + 2\frac{k^3}{z^2}\right), \quad (2.10)$$

где

$$W(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dz R[u_S(z)] (a - i \operatorname{th} z)^2 e^{-2ia^2 z},$$

а спектральная плотность средней энергии, излучаемой в единицу времени, получается умножением (2.10) на  $(32/\pi)k^4$ .

Как и в случае однородных флуктуаций, спектральный состав излучения описывается тремя факторами: шириной солитона ( $\sim x^{-1}$ ), характерным волновым числом неоднородностей  $k_*$  ( $\max b_L(k) = b_L(k_*)$ ) и шириной спектра пространственных неоднородностей ( $\sim L^{-1}$ ).

Перейдем к обсуждению некоторых конкретных примеров, представляющих физический интерес (см., например, [13])<sup>1</sup>

$$\varepsilon f(x, t) R[u] \equiv \varepsilon f(t) u u_x, \quad (2.11a)$$

$$\varepsilon f(x, t) R[u] \equiv \varepsilon f(x) u_x, \quad (2.11б)$$

$$\varepsilon f(x, t) R[u] \equiv \varepsilon f(t) u_x. \quad (2.11в)$$

Рассмотрим случай (2.11a). Как следует из уравнений адиабатического приближения [2], амплитуда солитона  $x^2$  остается постоянной, а его скорость удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx}{dt} = 4x^2 + \frac{8}{9} \varepsilon x^2 \int f(t') dt',$$

т. е. солитон совершает броуновское движение в пространстве скоростей. В частности, на больших временах ( $t \gg T$ ) дисперсия флуктуаций его скорости имеет вид

$$\sigma \approx 2Dt, \quad D = \frac{32}{81} \varepsilon^2 x^4 \int_0^{\infty} D_T(t) dt.$$

Спектральная плотность излучения в случае (2.11a) находится с помощью (2.9)

$$\langle p(k) \rangle = \frac{2^{10} \varepsilon^2 \pi}{3^4 5^2} x^{10} \Phi\left(\frac{k}{z}\right) d_T \left\{ 8k^3 \left( 1 + \frac{k^2}{z^2} \right) \right\}, \quad (2.12)$$

где

$$\Phi(a) = \frac{a^6 (13a^2 + 7)^2}{\operatorname{sh}^2(\pi a)}.$$

Пусть  $f(t)$  — дельта-коррелированная случайная функция ( $d_T=1$ ). Тогда из (2.12) следует, что спектр средней мощности излучения имеет максимум

<sup>1</sup> Отметим, что в случае медленно меняющихся функций  $f(t)$  или  $f(x)$  уравнение КдВ с возмущениями (2.11) приводится к каноническому виду (см., например, [9, 10]).

при  $k = k_{\max} \sim \chi$  (рис. 1), причем  $p_{\max}$  легко оценить как  $p_{\max} \sim \varepsilon^2 \chi^{10}$ . При  $k \ll k_{\max}$  спектральная плотность растет по степенному закону ( $\sim \varepsilon^2 k^4 \chi^6$ ), а при  $k \gg k_{\max}$  спектр излучения резко спадает, так как  $\langle p(k) \rangle \sim \varepsilon^2 k^{10} \exp(-2\pi k/\chi)$ . Полная мощность оценивается как  $P \sim p_{\max} k_{\max} \sim \varepsilon^2 \chi^{11}$ , а ее точное значение получается интегрированием (2. 12) по всем  $k$

$$P = \frac{2^{10}}{3^{45} \pi^2} (169B_5 + 182B_4 + 49B_3) \varepsilon^2 \chi^{11} \approx 10.13 \varepsilon^2 \chi^{11}, \quad (2. 13)$$

где  $B_n$  — числа Бернулли.

Из (2. 12) видно, что при отличном от нуля радиусе корреляции  $T$  спектральная мощность уменьшается. Таким образом, (2. 13) описывает максимальное значение  $P$ .

В случае (2. 11б) аналогичные вычисления с помощью (2. 10) дают

$$\langle p(k) \rangle = \frac{2^6 \pi \varepsilon^2}{9} \chi^4 F\left(\frac{k}{\chi}\right) b_L \left\{ 2k \left( 1 + \frac{k^2}{\chi^2} \right) \right\}, \quad (2. 14)$$

где

$$F(a) = \frac{a^{10} (1 - a^2) (2 + 3a^4 - a^6)^2}{(a^2 + 1)^2 \operatorname{sh}^2(\pi a^3)}.$$

В предельных случаях имеем

$$\langle p(k) \rangle \approx \begin{cases} \frac{(4k)^4}{9\pi} \varepsilon^2 b_L(2k), & k \ll k_{\max} \sim \chi, \\ \frac{2^6 \pi}{9} \varepsilon^2 \frac{k^{22}}{\chi^{18}} e^{-2\pi(k/\chi)^3} b_L(2k^3/\chi^2), & k \gg k_{\max} \sim \chi. \end{cases}$$

При  $L \rightarrow 0$  (когда  $b_L(\chi) \rightarrow 1$ ) полная излученная энергия максимальна. Отметим более сложное устройство спектра излучения солитона в случае (2. 11б). В частности, при двух отличных от нуля значениях волнового числа излучение вообще отсутствует.

Эволюция среднего значения амплитуды солитона может быть получена из закона изменения средней массы  $\langle M \rangle$

$$\langle \chi \rangle = \chi_0 - \frac{4}{9} \varepsilon^2 \pi \chi_0 I_1 t, \quad I_1 = \text{const} \sim 1. \quad (2. 15)$$

Согласно (2. 15), солитон затухает за времена  $\sim \varepsilon^{-2}$ .

Проводя все необходимые вычисления для возмущения (2. 11в), находим, что  $Q(a) \equiv 0$ , т. е. линейные волны в системе не возбуждаются. Полученный результат допускает простую интерпретацию. Действительно, произведем

в уравнениях (2. 1), (2. 11в) замену переменных  $\chi = x - \varepsilon \int f(t') dt'$ , после чего исходная задача сводится к невозмущенному уравнению КдВ. Следовательно, точное решение задачи Коши для уравнений (2. 1), (2. 11в) с начальным условием  $u_S(t=0) = -2\chi^2 \operatorname{sech}^2(\chi x)$  совпадает с (2. 5), где вместо  $x$  следует подставить  $\chi$ . Таким образом, решение представляет собой солитон, совершающий броуновское движение, причем без флуктуаций его формы и излучения. Этот факт находит также отражение и в том, что описание солитона в адиабатическом приближении полностью совпадает с точным решением задачи. Так, нетрудно

убедиться, что  $\zeta$  меняется по закону  $\zeta = 4\chi^2 t + \varepsilon \int f(t') dt'$  и при подстановке в (2. 5) дает точное решение задачи (2. 1), (2. 11в).

## 2. Излучение солитона НУШ

Рассматривая излучение солитона НУШ в случайно-неоднородной или флуктуирующей среде, вычислим спектральную плотность  $\langle p(\lambda) \rangle$  средней энергии  $\langle E \rangle$ , излученной солитоном в единицу времени. Спектральный параметр  $\lambda$  непо-

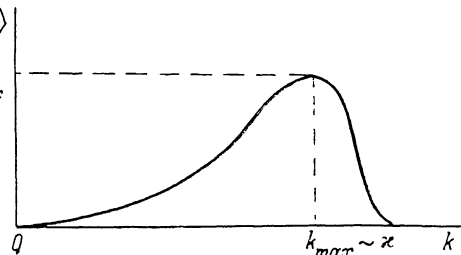


Рис. 1. Спектральная плотность средней мощности излучения солитона КдВ для дельта-коррелированного возмущения (2.11а).

средственно связан с волновым числом  $k$  излучаемых линейных волн ( $\lambda = k/2$ ), поэтому среднее значение полной мощности излучения определяется непосредственно через  $\langle p(\lambda) \rangle$

$$\langle P \rangle = \frac{d}{dt} \langle E \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \langle p(\lambda) \rangle. \quad (3.1)$$

Функция  $\langle p(\lambda) \rangle$  позволяет вычислить также изменение других величин: среднего импульса и среднего «числа частиц» [1].

Существенное отличие структуры и характера излучения солитона НУШ от солитона КдВ определяется в основном качественными отличиями самих уединенных волн, так как солитон НУШ является двухпараметрическим и соответственно имеет два временных масштаба: один из них определяет движение огибающей солитона  $\rho_s(z)$ , а второй — динамику его высокочастотного заполнения, т. е. фазы  $\Phi(z, t)$ . Как следствие, зависимость средней мощности излучения и ее спектральной плотности от двух параметров.

Рассмотрим НУШ для комплексного поля  $r(x, t)$  со случайным возмущением

$$ir_t + r_{xx} + 2|r|^2 r = \varepsilon f(x, t) R[r], \quad (3.2)$$

где оператор  $R[r]$  определяет структуру возмущения, причем предполагается, что  $R[r] \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ , а комплексная функция  $f(x, t)$  характеризует случайное возмущающее поле, статистические характеристики которого полагаются заданными

$$\langle f(x, t) \rangle = 0,$$

$$\langle f(x, t) f(x', t') \rangle = \sigma_1^2 B_1(x - x') D_1(t - t'), \quad (3.3)$$

$$\langle f(x, t) f^*(x', t') \rangle = \sigma_2^2 B_2(x - x') D_2(t - t'). \quad (3.4)$$

Параметр  $\varepsilon$  (теперь, вообще говоря комплексный) считается малым ( $|\varepsilon| \ll 1$ ). Будем также дополнительно полагать, что оператор  $R[r]$  таков, что выполняется соотношение (см. [2], где сделано подобное предположение)

$$R[re^{i\delta}] = e^{i\delta} R[r]. \quad (3.5)$$

Кроме того, для удобства записи последующих формул представим решение НУШ (см., например, [1]) в виде

$$r_s(x, t) = \rho_s(z) e^{-i\Phi(x, t)},$$

$$\rho_s(z) = \frac{2\eta}{\operatorname{ch} z}, \quad \Phi(z, t) = \frac{\xi}{\eta} z + \delta(t) + \frac{\pi}{2}, \quad \delta(t) = -4(\xi^2 - \eta^2)t, \quad (3.6)$$

где параметр  $z = 2\eta(x + 4\xi t)$  характеризует фазу огибающей солитона.

Введем обозначение для фурье-образов корреляторов из (3.3), (3.4)  $b_{1,2}(x)$  и  $d_{1,2}(\omega)$ . Нетрудно проверить, что они обладают свойствами

$$b_1(x) = b_1(-x), \quad b_2(x) = b_2^*(x), \quad d_1(\omega) = d_1(-\omega), \quad d_2(\omega) = d_2^*(\omega).$$

Спектральную плотность средней энергии, излученной в единицу времени НУШ солитоном, представим в виде (ср. (2.4))

$$\langle p(\lambda) \rangle = \frac{8i^2}{\pi} \operatorname{Re} \left\langle b(\lambda, t) \frac{\partial b^*(\lambda, t)}{\partial t} \right\rangle, \quad (3.7)$$

где  $b(\lambda, t)$  — коэффициент Йоста, который при записи (3.7) полагается малым ( $|b(\lambda, t)|^2 \ll 1$ ).

В основном по  $\varepsilon$  приближении коэффициент Йоста удовлетворяет возмущенному уравнению [2]

$$\frac{\partial b(\lambda, t)}{\partial t} = -2i\lambda^2 b(\lambda, t) + \frac{i\varepsilon e^{i\delta(t) - 2i\lambda\xi}}{2\eta|(\lambda - \xi)^2 + \eta^2} A(\lambda; \xi, \eta), \quad (3.8)$$

где

$$A(\lambda; \xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{\eta}(\lambda-\xi)z} \left\{ (\lambda - \xi - i\eta \operatorname{th} z)^2 R[r_S] e^{-i\Phi(z, t)} - \frac{\eta^2}{\operatorname{ch}^2 z} R^*[r_S] e^{i\Phi(z, t)} \right\} dz.$$

После прямых, но достаточнo громоздких вычислений с помощью (3.8), (3.5) и (3.6) получаем окончательный результат

$$J(\lambda) = \operatorname{Re} \left\langle b(\lambda, t) \frac{\partial b^*(\lambda, t)}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t \gg 1} = \\ = \frac{1}{8\eta^2 |(\lambda - \xi)^2 + \eta^2|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \{ \sigma_2^2 |\varepsilon|^2 \eta^4 |A_1(x)|^2 b_2(x) d_2(\omega_0^-) + \\ + \sigma_2^2 |\varepsilon|^2 |A_2(x)|^2 b_2(x) d_2(\omega_0^+) - 2\eta^2 \sigma_1^2 \operatorname{Re} [\varepsilon^2 b_1(x) d_1(\omega_0^+) A_1(-x) A_2^*(x)] \}, \quad (3.9)$$

где

$$\omega_0^\pm = \pm 4 [(\lambda - \xi)^2 + \eta^2] - 4\xi x, \\ A_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i\frac{\lambda}{\eta}z} e^{i\frac{\xi}{\eta}z} e^{i\frac{xz}{2\eta}} \frac{R[\rho_S(z)]}{\operatorname{ch}^2 z}, \\ A_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i\frac{\lambda}{\eta}z} e^{i\frac{\xi}{\eta}z} e^{-\frac{ixz}{2\eta}} R^*[\rho_S(z)] (\lambda - \xi - i\eta \operatorname{th} z)^2.$$

Полученные формулы полностью описывают излучение солитона НУШ в случайно-неоднородной и флуктуирующей среде с точностью до  $\varepsilon^2$ . Однако их громоздкий вид затрудняет непосредственный анализ структуры излучения. В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть некоторые частные случаи.

В качестве простейшего примера применения общей формулы (3.9) рассмотрим возмущение, в котором случайное поле  $f(x, t)$  является стационарным, т. е.  $f(x, t) = f(x)$ , а также вещественным  $\varepsilon = \varepsilon^*$ ,  $f^*(x) = f(x)$ . В этом случае имеем  $\sigma_1 = \sigma_2$ ,  $b_1(x) = b_2(x) = b(x)$ ,  $d_1(\omega) = d_2(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$ . Тогда (3.9) упрощается

$$J(\lambda) = \frac{\sigma_1^2 \varepsilon^2}{32\eta^2 \kappa_0^2} \xi^{-3} \{ \eta^4 |A_1(-x_0)|^2 b(-x_0) + |A_2(x_0)|^2 b(x_0) - \\ - 2\eta^2 \operatorname{Re} [b(x_0) A_1(-x_0) A_2^*(x_0)] \}, \quad (3.10)$$

где

$$x_0 = \frac{1}{\xi} [(\lambda - \xi)^2 + \eta^2].$$

Как и в случае уравнения КдВ, спектральная плотность излучения солитона НУШ определяется произведением спектральной плотности неоднородностей среды  $b(x)$  на характерные «солитонные» функции  $A_{1,2}(x)$ . Очевидно, что максимум излучения будет проявляться при совпадении максимумов указанных функций.

Ограничимся в дальнейшем анализом дельта-коррелированных случайных полей. Для возмущения  $R[r] = r$ , которое описывает флуктуации щели в спектре линейных волн, имеем

$$\langle p(\lambda) \rangle = \frac{\pi \varepsilon^2 \sigma_1^2 \lambda^2 [(\lambda - \xi)^2 + \eta^2]^2}{2^6 \xi^5 \operatorname{ch}^2 [\pi (\lambda^2 - \xi^2 + \eta^2)/4\eta\xi]}. \quad (3.11)$$

Спектральная плотность (3.11) представлена на рис. 2. При  $\eta \ll \xi$  она имеет два ярко выраженных максимума шириной  $\sim \eta$  в точках  $\lambda = \pm \lambda_m$ ,  $\lambda_m = \sqrt{\xi^2 - \eta^2} \sim \xi$ , причем

$$P_1 = \langle p(-\lambda_m) \rangle \sim \varepsilon^2 \sigma_1^2 \xi^2, \quad P_2 = \langle p(\lambda_m) \rangle \sim \frac{\varepsilon^2 \sigma_1^2 \eta^4}{\xi^3} \ll P_1.$$

Вне окрестностей точек  $\lambda = \pm \lambda_m$  функция  $\langle p(\lambda) \rangle$  резко спадает, так как при  $|\lambda \pm \lambda_m| \gg \eta$  ее асимптотика имеет вид

$$\langle p(\lambda) \rangle \sim \sigma_1^2 \frac{\varepsilon^2 \lambda^2 (\lambda^2 + \xi^2)^2}{\xi^6} \exp \left[ -\frac{\pi (\lambda^2 - \lambda_m^2)}{2\eta\xi} \right].$$

Средняя мощность излучения при  $\eta \ll \xi$  определяется вкладом области спектра вблизи точки  $\lambda = -\lambda_m$ , т. е. излучением назад  $P \sim p_1 \Delta\lambda \sim \varepsilon^2 \sigma_1^2 \eta \xi$ . Точный результат получаем интегрированием (3.11) по всем  $\lambda$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \langle p(\lambda) \rangle d\lambda = 4\varepsilon^2 \sigma_1^2 \eta \xi. \quad (3.12)$$

При  $\eta \gg \xi$  спектральная плотность  $\langle p(\lambda) \rangle$  симметрична и максимальна в двух точках спектра вблизи  $\lambda = 0$ , т. е.  $\lambda = \pm \lambda_0 \sim \pm \xi/\eta$ . Из (3.11) следует результат для полной средней мощности

$$P = \frac{\varepsilon^2 \sigma_1^2}{2\sqrt{2}} \xi^2 (\eta/\xi)^{1/2} \exp(-\pi\eta/2\xi). \quad (3.13)$$

Качественно иные результаты получаются в случае возмущения

$$\varepsilon f(x, t) R[r] = \varepsilon f(t)r, \quad (3.14)$$

где  $\varepsilon$  — вещественный параметр. При этом в формуле (3.9) следует положить  $b_1(x) = b_2(x) = 2\pi\delta(x)$ . После прямых вычислений коррелятора  $J(\lambda)$  для воз-

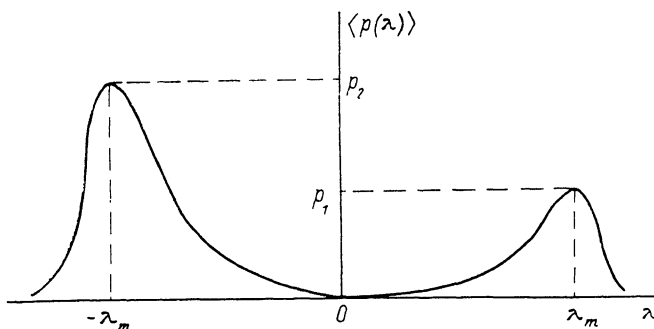


Рис. 2. Спектральная плотность (3.11) средней мощности излучения солитона НУШ.

мущения (3.14) получаем  $J(\lambda) = 0$ . Такой ответ допускает простую интерпретацию (см. аналогичную ситуацию в разделе 1). Действительно, уравнения (3.2), (3.14) заменой

$$\bar{r}(x, t) \rightarrow r(x, t) \exp \left[ i\varepsilon \int^t f(t') dt' \right]$$

сводятся к невозмущенному НУШ. Для одиночного солитона это означает, что стохастическое возмущение (3.14) приводит только к однородной фазовой модуляции, не сопровождающейся излучением линейных волн.

В заключение отметим, что мы ограничились лишь простым (борновским) приближением, когда флуктуации параметров солитона не учитываются. Их учет существенно усложняет рассматриваемую задачу, хотя в принципе может быть проведен в рамках теории возмущений.

#### Литература

- [1] Зиларов В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Пятаевский Л. П. Теория солитонов / Под ред. С. П. Новикова. М.: Наука, 1980. 320 с.
- [2] Карпман В. И., Маслов Е. М. // ЖЭТФ. 1977. Т. 73. Вып. 1. С. 537—559.
- [3] Gorshkov K. A., Ostrovsky L. A. // Physica D. 1981. Vol. 3. N 1/2. P. 428—438.
- [4] Кившарь Ю. С. Препринт ФТИНТ АН УССР, № 21-84. Харьков, 1984. 60 с.



- [5] Арансон И. С., Горшков К. А., Рабинович М. И. // ЖЭТФ. 1984. Т. 86. Вып. 3. С. 929—936.
- [6] Kivshar Yu. S., Malomed B. A. // Phys. Lett. A. 1985. Vol. 111. N 8/9. P. 427—429.
- [7] Басс Ф. Г., Конотоп В. В., Силицын Ю. А. // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. Вып. 2. С. 541—549.
- [8] Абдуллаев Ф. Х., Хикматов Н. А. // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 6. С. 1206—1207.
- [9] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 479 с.
- [10] Самсонов А. М. // ДАН. 1984. Т. 277. № 2. С. 332—335.
- [11] Кившарь Ю. С., Конотоп В. В., Силицын Ю. А. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 3. С. 374—382.
- [12] Нелинейные электромагнитные волны / Под ред. П. Усленгп. М.: Мир, 1983. 312 с.
- [13] Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 176 с.
- [14] Кившарь Ю. С., Маломед В. А. // ЖЭТФ. 1986. Т. 90. Вып. 6. С. 2162—2166.

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР  
Харьков

Поступило в Редакцию  
27 июня 1987.

В окончательной редакции  
6 января 1988 г.

