

01; 09

ОСОБЕННОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НЕСТАЦИОНАРНО ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА СРЕД

А. Г. Нерух

Отмечается, что при исследовании взаимодействия электромагнитной волны с движущейся границей раздела сред, кроме идеализации резкой границы, существенными являются также идеализации стационарности движения и бесконечной мощности источника движения.

Показано, что именно нестационарность движения границы как резкая, так и плавная может приводить к образованию распространяющихся разрывов поля и новых по сравнению со стационарным случаем волн. Показано также, что временная асимметрия, обусловленная нестационарностью, ответственна за образование отраженной волны при сверхсветовом движении границы.

Как известно, характер взаимодействия электромагнитной волны с движущейся границей раздела сред зависит от соотношения между скоростью волны и скоростью границы. Например, даже в простейшем случае нормального падения плоской монохроматической волны $E_0 = \exp \{i\omega(t - x/v)\}$ на плоскую границу раздела сред, движущуюся навстречу волне со скоростью u , образуются две прошедшие волны, если их фазовая скорость $v_1 < |u|$ [1, 2]. Если при этом и фазовая скорость с другой стороны границы $v < |u|$, то отраженной волны не будет, если же $v > |u|$, то существование отраженной волны возможно и приводит к возникновению «парадокса» [3], состоящего в несоответствии числа вторичных волн числу граничных условий. Для его разрешения в [3] предлагается рассматривать структуру переходного слоя движущейся границы, отказываясь таким образом, от идеализации «резкой границы».

Однако в постановке задач с движущейся границей присутствует еще одна идеализация, а именно стационарность движения границы, которая предполагает, что движение началось в бесконечно удаленном прошлом. Отказ от этой идеализации, т. е. перенос начала движения в конечный момент времени, приводит к появлению новых особенностей в преобразовании волн на движущейся границе. В данной работе рассмотрены такие особенности как при внезапном начале равномерного движения границы в нулевой момент времени, так и плавном «включении» движения границы, происходящем по релятивистскому равноускоренному закону. В последнем случае непрерывность изменения скорости границы позволяет исследовать эволюцию процесса преобразования волн. При решении этих задач идеализация «резкой границы» сохранена.

1. Как и в работе [4], описание взаимодействия электромагнитных волн с движущейся границей раздела сред производится с помощью эволюционной цепочки интегральных уравнений Вольтерра, вытекающей из уравнения, описывающего поле по обе стороны границы в произвольный момент времени

$$E = E_0 - \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \Theta \left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v} \right) \chi(t', x') E(t', x'), \quad (1)$$

где E_0 — поле падающей из полупространства $x < 0$ волны; $\lambda = (v^2 - v_1^2)/2vv_1^2$, $v = c/\sqrt{\varepsilon}$, $v_1 = c/\sqrt{\varepsilon_1}$ — фазовые скорости волн по обе стороны границы.

Положение границы задается характеристической функцией $\chi(t, x)$, равной единице в области со средой ε_1 и нулю вне ее. Ядро уравнения (1) отлично от нуля только внутри прошедшего светового конуса, который задается функцией Хевисайда $\Theta(\tau)$ и имеет вершину в точке наблюдения (t, x) . Таким образом, (1) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода [5].

Пусть до нулевого момента времени граница раздела сред неподвижна $\chi^{(-)} = \Theta(x)$. В этом случае решение уравнения (1) в области $x > 0$, определяющее прошедшее поле, хорошо известно и равно $E_1 = A \exp\{i\omega\tau^-\}$, где $A = 2/(n+1)$, $n = v/v_1$, $\tau^\pm = t \pm x/v_1$.

Пусть теперь в нулевой момент времени «включается» движение границы $\chi^{(+)} = \Theta(x - x_s(t))$ (рис. 1), причем среды по обе стороны остаются неподвижными. Тогда часть области интегрирования в уравнении (1) будет принадлежать полуплоскости $T = \{x = (t, x): 0 \leq t < \infty, -\infty < x < \infty\}$, уравнение для прошедшего поля в этой полуплоскости примет вид

$$E = F - \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_T dx' \chi^{(+)}(x') \times \Theta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v}\right) E(x'), \quad (2)$$

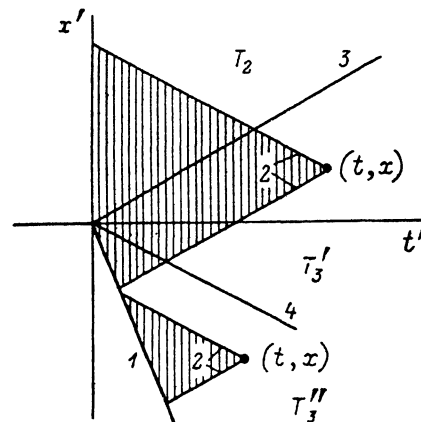


Рис. 1. Определение поля в случае начала равномерного движения в нулевой момент времени.

1 — $x' = ut'$ (мировая линия границы), 2 — $v_1(t - t') - |x - x'| = 0$ (характеристики резольвенты), 3 — $x' = v_1 t'$, 4 — $x' = -v_1 t'$.

где свободный член определяется «историей» поля до нулевого момента времени

$$F = E_0 - \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^0 dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \chi^{(-)}(x') \Theta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v}\right) E_1(t', x'). \quad (3)$$

Подставив в (3) выражение для E_1 , найдем, что свободный член равен

$$F = \Theta(x - vt) n e^{i\omega_0\left(t - \frac{x}{v}\right)} + n F_0 e^{-i\omega_0\left(t + \frac{x}{v}\right)} + \Theta(vt - x) e^{i\omega_0\left(t - \frac{x}{v}\right)}, \quad (4)$$

где $F_0 = (n-1)/(n+1)$, $\omega_0 = n\omega$.

Так как уравнение (2) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра, то это позволяет его решение строить с помощью резольвенты $\langle x | \hat{R} | x' \rangle$

$$E(x) = F(x) + \int_T dx' \langle x | \hat{R} | x' \rangle F(x'). \quad (5)$$

Здесь использованы скобочные обозначения Дирака.

В работе [4] резольвента уравнения (2) была построена для случая равномерного движения границы ($x_s(t) = ut$). Если $|u| < v_1$, то резольвента определяется выражением

$$\langle x | \hat{R} | x' \rangle = -\Theta(x - ut) \frac{\lambda}{n} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Theta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v_1}\right) + R_u \frac{\partial}{\partial t} \Theta\left(v_1 t - x - \frac{1 - \beta_1}{1 + \beta_1} (v_1 t' + x')\right) \right\} \Theta(x' - ut'). \quad (6)$$

Здесь $R_u = (n-1)/(n+1) (1-\beta_1)/(1+\beta_1)$ — коэффициент отражения плоской волны от движущейся границы, $\beta_1 = u/v_1$. Если $|u| > v_1$, то в выражении (6) необходимо положить $R_u = 0$.

Резольвента (6) определяет две области в полуплоскости T , в которых взаимодействие поля с границей имеет существенно разный характер. Область $T_2 (0 \leq t < x/v_1)$ характеризуется отсутствием влияния границы раздела сред в силу конечной скорости распространения сигнала. В области $T_3 (ut \leq x \leq v_1 t)$ имеется влияние краевых эффектов от границы.

2. Резольвента (6) позволяет получить выражения для полей и в стационарном случае, когда движение границы начинается в бесконечно удаленном прошлом. В этом случае уравнение (2) продолжается на полуплоскость отрицательных значений t , в силу чего его свободный член становится равным выражению для падающей волны $F = E_0$, а граница между областями T_2 и $T_3 (x = v_1 t)$, а вместе с нею и область T_2 уходят на бесконечность. Интегрируя в (5) по всей плоскости (t, x) , получим известные выражения [2] для прошедших волн. При встречном движении со скоростью $|u| < v_1$

$$E_t = \frac{\omega^\dagger}{\omega} A \exp\{i\omega_1^\dagger \tau^-\}, \quad (7)$$

где $\omega_1^\dagger = \omega/n (n - \beta_1)/(1 \mp \beta_1)$.

При встречном движении со сверхсветовой скоростью ($-u > v_1$) (две прошедшие волны)

$$E_t = \frac{\omega^\dagger}{\omega} A^+ \exp\{i\omega_1^\dagger \tau^-\} + \frac{\omega^-}{\omega} A \exp\{i\omega_1^- \tau^+\}, \quad (8)$$

где $A^\pm = (n \pm 1)/2n$.

Подставив найденные выражения для полей в интеграл (1) и полагая, что точка наблюдения находится в области $x < ut$, найдем отраженные волны. В полностью досветовом случае ($|u| < v, v_1$) отраженная волна определяется известным выражением

$$E_r = -\frac{n-1}{n+1} \frac{n-\beta_1}{n+\beta_1} \exp\left\{i\omega \frac{n-\beta_1}{n+\beta_1} \left(t + \frac{x}{v}\right)\right\}. \quad (9)$$

В сверхсветовых случаях $-u > v, v_1$ и $v < -u < v_1$ отраженные волны не могут «убежать» от перегоняющей их границы, и, действительно, интеграл в (1) равен нулю, так как пересечение области светового конуса и области $\chi = 1$ является пустым. Этот вывод согласуется с известными результатами [3]. Однако и в другом промежуточном случае $v > -u > v_1$, когда возможно существование отраженной волны, интеграл (1) равен нулю. В этом случае вклады от двух прошедших волн (8) взаимно компенсируются, так что в приближении «идеально резкой границы» отраженная волна отсутствует и в этом случае.

Нетрудно убедиться, что в этом случае удовлетворяются граничные условия, т. е. остаются непрерывными на границе величин $(E - (u/c) B)$ и $(H - (u/c) D)$ [6]. Действительно, значения этих величин соответственно по обе стороны границы равны

$$\left. \begin{aligned} E_t - \frac{u}{c} B_t &= E_0 - \frac{u}{c} B_0 = \frac{n-\beta_1}{n} e^{i\omega \frac{n-\beta_1}{n} t}, \\ B_t - \frac{u}{c} \epsilon_1 E_t &= B_0 - \frac{u}{c} \epsilon E_0 = \frac{c}{v} \frac{n-\beta_1}{n} e^{i\omega \frac{n-\beta_1}{n} t}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Здесь учтено, что среды немагнитные $H = B$.

Необходимо отметить еще одну особенность взаимодействия волны со стационарно движущейся границей. Выражения для полей имеют смысл как при досветовой, так и при сверхсветовой скорости движения границы. Однако при равенстве скорости границы фазовой скорости волн частота одной из вторичных волн, а вместе с нею и амплитуда обращаются в бесконечность. Это, конечно, является следствием идеализации бесконечно мощного источника движения границы и показывает, что реальное движение не может происходить с такой

костью. Как будет показано ниже, приближение бесконечно мощного источника движения границы при нестационарном ее движении приводит к образованию бесконечных разрывов электромагнитного поля.

3. Вернемся к резко нестационарной задаче, когда равномерное движение границы начинается в нулевой момент времени. В области T_2 ($v_1 t < x$) поле не «чувствует» изменения состояния границы и определяется тем же выражением, что и до нулевого момента времени, когда граница была неподвижной, т. е. $E_2 = E_1$.

Структура поля в области T_3 будет зависеть от соотношения между скоростью границы u и фазовой скоростью волн v_1 . Если $u > -v_1$, то выражение для поля находится по свободному члену (4) с помощью резольвенты (6) и совпадает с формулой (7) для стационарного случая. Если $u < -v_1$, то область T_3 разделяется на две подобласти T'_3 ($v_1 t \geq x \geq -v_1 t$) и T''_3 ($-v_1 t \geq x \geq ut$) (рис. 1). В подобласти T'_3 поле состоит из двух волн

$$E'_3 = F + \hat{R}F = \frac{\omega_1^+}{\omega} A^+ e^{i\omega_1^+ \tau^-} + F_0 \frac{n-1}{2n} \frac{v+u}{v_1-u} e^{-i\omega_2^+ \tau^-}, \quad (11)$$

где $\omega_2^{\pm} = \omega (v+u) (v_1 \mp u)^{-1}$.

Изменение по сравнению со стационарным случаем заключается в том, что к прямой волне, описываемой первым слагаемым в (8), добавляется еще одна прямая волна, обусловленная членом F_0 свободного члена (4). Частота этой волны ω_2^+ удовлетворяет условию равенства фаз на границе данной волны и волны F_0 : $-\omega_0 (t+x/v) = \omega_2^+ (t-x/v_1) |_{x=ut}$.

Механизм образования этой волны состоит в том, что скачок скорости границы приводит к такому же расщеплению прошедшей волны, как и в случае скачка диэлектрической проницаемости [7]. Однако поскольку расщепление происходит на границе, то возможность реализации существования нескольких волн в среде зависит от соотношения между скоростью границы и скоростью волн в среде. При $u > -v_1$ расщепления не может быть, так как невозможно существование в прошедшем поле волн, идущих в сторону границы. В этом случае при $-u < v$ будет существовать отраженная волна, определяемая выражением (9). При $u < -v_1$ возможность реализации расщепления существует, поэтому в среде ε_1 , кроме прямых прошедших волн, появятся еще и обратные. Действительно, вычисление поля в области T''_3 дает эти волны

$$E''_3 = \frac{\omega_1^+}{\omega} A^+ e^{i\omega_1^+ \tau^-} + \frac{\omega_1^-}{\omega} A^- e^{i\omega_1^- \tau^+} + F_0 \frac{n-1}{2n} \frac{\omega_2^+}{\omega} e^{-i\omega_2^+ \tau^-} + F_0 \frac{n+1}{2n} \frac{\omega_2^-}{\omega} e^{-i\omega_2^- \tau^+}. \quad (12)$$

Следует отметить, что, как и в стационарном случае, частоты и амплитуды обеих обратных волн обращаются в бесконечность при $u = -v_1$. Рассмотрим выполнение граничных условий в случае $u > -v_1$, когда возможно существование отраженных волн. Подставив (12) в (1), после вычислений найдем, что вклады первых двух волн, как и в стационарном случае, компенсируют друг друга, тогда как вторая пара волн, порожденная начальной волной F_0 свободного члена (4), определяет следующее отраженное поле:

$$E_r = \frac{n-1}{n+1} n e^{-i\omega n \left(t + \frac{x}{v} \right)}. \quad (13)$$

Частота этой волны совпадает с частотой волны F_0 .

Амплитуды полей на движущейся границе удовлетворяют граничным условиям, хотя их значение и отлично от стационарного случая, описываемого выражением (10)

$$E_3 - \frac{u}{c} B_3 = (E_0 + E_r) - \frac{u}{c} (B_0 + B_r) = \frac{n-\beta_1}{n} e^{i\omega \frac{n-\beta_1}{n} t} + \frac{n-1}{n+1} (n + \beta_1) e^{-i\omega(n+\beta_1)t},$$

$$B_3 - \frac{u}{c} \varepsilon_1 E_3 = (B_0 + B_r) - \frac{u}{c} \varepsilon (E_0 + E_r) =$$

$$= c \frac{n - \beta_1}{vn} e^{i\omega \frac{n - \beta_1}{n} t} - c \frac{n - 1}{n + 1} \frac{n + \beta_1}{v} e^{-i\omega(n + \beta_1)t}. \quad (14)$$

Таким образом, нестационарность движения нарушает баланс, который в стационарном случае при идеализации «резкой границы» обеспечивает отсутствие отраженного поля, даже если выполняются соотношения $v_1 < |u| < v$.

4. Особенности преобразования волн, возникающие в рассмотренном выше случае резко нестационарного движения границы, проявляются и в случае плавной нестационарности, как только скорость границы достигает значения фазовой скорости волны. Это хорошо видно на примере следующего по сложности за равномерным движением, а именно релятивистского равноускоренного движения. При таком движении скорость границы непрерывно меняется от нуля до релятивистских значений и, таким образом, непрерывно проходит через все

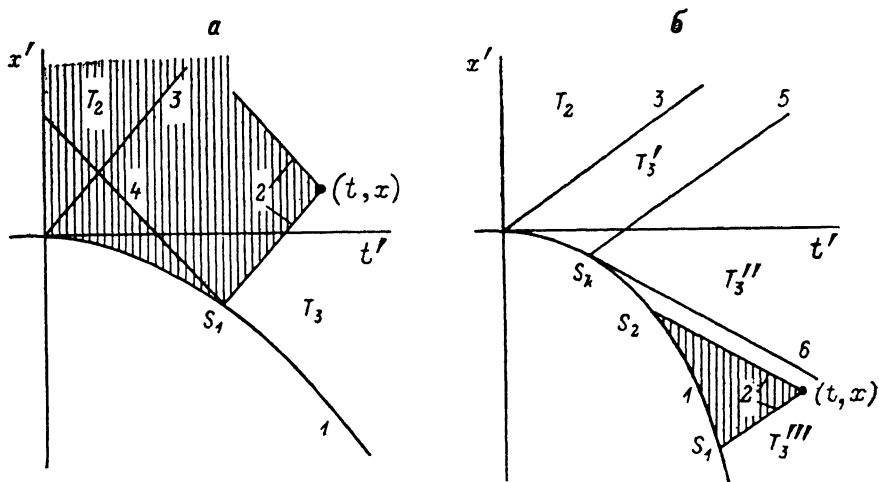


Рис. 2. Определение поля в случае равноускоренного движения границы.

1 - $x' = -v(\sqrt{\xi^2 + t'^2} - \xi)$ (мировая линия границы), 2 - $v_1(t - t') - |x - x'| = 0$ (характеристики резольвенты), 3 - $x' = v_1 t'$, 4 - $-t' + x'/v_1 = \varphi(\tau^-)$ (отраженная характеристика), 5 - $t' - (x'/v_1) = \tau_H$, 6 - $t' + x'/v_1 = \tau_K$; $S_1, 2$ - точки с абсциссами $t_{1,2}$, S_K - точка касания.

особые точки, связанные как с обращением амплитуд рассеянных волн в бесконечность, так и с неоднозначностью в определении количества рассеянных волн. Исследование такой задачи путем подбора вида решений было рассмотрено в работе [8], однако при этом оказались учтены не все решения.

Закон движения границы навстречу падающей волне имеет вид [9] $x_s(t) = -v(\sqrt{\xi^2 + t^2} - \xi)$, где $\xi = c/w$, w - величина ускорения в собственной системе отсчета границы. Скорость движения границы $u(t) = -vt(\xi^2 + t^2)^{-1/2}$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к своему предельному значению $-v$, т. е. к скорости волн в фоновой среде.

Так как свойства среды не меняются в нулевой момент времени, то в области T_2 ($x > v_1 t$) прошедшее поле, как и в случае равномерного движения, будет таким же, как и до нулевого момента времени, $E_2 = E_1$. В области $x < v_1 t$ резольвента и характер взаимодействия будут иными. Если $n = v/v_1 < 1$ (рис. 2, a), то отраженная от мировой линии границы характеристика резольвенты все время находится в мировой области $\chi^{\pm} = \Theta(x - x_s(t)) = 1$. Поэтому выраженные для резольвенты будет иметь вид

$$\langle \mathbf{x} | \hat{R} | \mathbf{x}' \rangle = -\Theta(x - x_s(t)) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\lambda}{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Theta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v_1}\right) + \right.$$

$$\left. + R_u(\tau^-) \frac{\partial}{\partial t} \Theta\left(\varphi(\tau^-) - t' - \frac{x'}{v_1}\right) \right\} \Theta(x' - x_s(t')), \quad (15)$$

где $\varphi(\tau) = 2t_1 - \tau$, t_1 — точка пересечения нижней характеристики резольвенты \tilde{R} с мировой линией границы $t_{1,2}(\tau) = n/(n^2 - 1) \{ \pm \xi - \tau/n + (\xi^2 \pm 2n\xi\tau + \tau^2)^{1/2} \}$. Коэффициент R_u в (15), являющийся теперь функцией точки наблюдения, определяется таким же выражением, как и в (6),

$$R_u(\tau) = \frac{n-1}{n+1} \frac{v_1 - u_1(\tau)}{v_1 + u_1(\tau)}, \quad (16)$$

где скорость границы берется в момент ее «встречи» с характеристикой резольвенты $u_1(\tau) = u(t_1)$.

Если $n > 1$ (рис. 2, б), то отраженная характеристика принадлежит области $\chi^+ = 1$ только до момента касания $t_k = \xi(n^2 - 1)^{-1/2}$. В этот момент скорость границы становится равной скорости волн v_1 . Луч $\tau^- = \tau_H = \xi[(n^2 + 1)(n^2 - 1)^{-1/2} - n]$ на рис. 2, б отделяет от области T_3 подобласть T_3'' , в которой отраженная характеристика уже не дает вклада в резольвенту. Касательный луч $\tau^+ = \tau_k = \xi(n - \sqrt{n^2 - 1})$ отделяет еще одну подобласть T_3'' , в которой обе характеристики резольвенты пересекаются с мировой линией границы. В подобластях T_3'' и T_3'' в выражении для резольвенты (15) следует положить $R_u = 0$.

Все эти различия проявятся в структуре прошедшего поля. При $n < 1$ во всей области T_3 , а при $n > 1$ только в подобласти T_3' поле состоит из одной прямой волны

$$E_3 = A \frac{1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial t} \exp[i\omega\Psi_1^+(\tau^-)], \quad (17)$$

где

$$\Psi_1^+(\tau) = \frac{1}{n \pm 1} \{ \tau - \xi \pm (n^2 \pm 2n\xi\tau + \tau^2)^{1/2} \}.$$

Частота этой волны является функцией точки наблюдения и выражается через скорость границы так же, как и в случае равномерного движения (формула (7))

$$\tilde{\omega}_1^+ = \frac{\partial}{\partial t} (\omega\Psi_1^+(\tau^-)) = \frac{\omega}{n} \frac{v - u_1(\tau^-)}{v_1 \pm u_1(\tau^-)}. \quad (18)$$

На линии $\tau^- = 0$, разделяющей области T_2 и T_3 и соответствующей нулевой скорости границы, эта частота равна частоте падающей волны.

При $n > 1$ в подобласти T_3'' ($\tau^- > \tau_H$, $\tau^+ > \tau_k$) прошедшее поле состоит из двух прямых волн

$$E_3'' = A^+ \frac{1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial t} \exp[i\omega\Psi_1^+(\tau^-)] - F_0 A^- \frac{1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial t} \exp[i\omega n\Psi_2^+(\tau^-)], \quad (19)$$

где

$$\Psi_2^+(\tau) = \frac{1}{n \mp 1} \{ \tau + \xi \mp \sqrt{\xi^2 \pm 2n\xi\tau + \tau^2} \}.$$

Частота второй волны в (19) равна

$$\tilde{\omega}_2^+ = \frac{\partial}{\partial t} [\omega n\Psi_2^+(\tau^-)] = -\omega \frac{v + u_1(\tau^-)}{v_1 - u_1(\tau^-)}, \quad (20)$$

т. е. имеет такую же зависимость от скорости границы, как и частота волны F_0 в (11). Как и в том случае, на границе происходит расщепление начальных волн, задаваемых свободным членом F . Это расщепление приводит к образованию обратных волн в подобласти T_3''

$$E_3'' = A^+ \frac{1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial t} \exp[i\omega\Psi_1^+(\tau^-)] - F_0 A^- \frac{1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial t} \exp[i\omega n\Psi_2^+(\tau^-)] + \\ + A^- \frac{1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial t} \exp[-i\omega\Psi_1^-(\tau^+)] - F_0 A^+ \frac{1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial t} \exp[-i\omega n\Psi_2^-(\tau^+)]. \quad (21)$$

Таким образом, в момент достижения границей скорости, равной скорости волн $u = -v_1$, на границе образуется два разрыва, распространяющихся затем

со скоростью v_1 в противоположных направлениях. Линия $\tau^- = \tau_H$ является линией разрыва конечной величины, тогда как на линии $\tau^+ = \tau_k$ амплитуды обратных волн испытывают бесконечный скачок, который имеет ту же природу, что и в случае стационарного равномерного движения.

Литература

- [1] *Островский Л. А., Степанов Н. С.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. С. 489—529.
- [2] *Столяров С. Н.* // Эйнштейновский сборник. 1975—1976. М.: Наука, 1978. С. 152—215.
- [3] *Островский Л. А.* // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. Вып. 2 (8). С. 551—561. УФН. 1975. Т. 116. Вып. 2. С. 315—326.
- [4] *Нерух А. Г.* // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 11. С. 2078—2087.
- [5] *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А.* и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. Гл. 1, 2. 448 с.
- [6] *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973. Т. 1. Гл. VII. 536 с.
- [7] *Morgenthaler F. R.* // Trans. IRE. 1957. Vol. MTT-6. P. 167—172.
- [8] *Нерух А. Г., Хижняк Н. А.* // ЖТФ. 1979. Т. 49. Вып. 2. С. 225—230.
- [9] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1967. § 7. 460 с.

Харьковский
институт радиозлектроники
им. акад. М. К. Янгеля

Поступило в Редакцию
3 февраля 1988 г.