1989 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 59, № 3

01; 10

РАДИАЛЬНО-ФАЗОВОЕ ДВИЖЕНИЕ В НАКОПИТЕЛЯХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

И. Н. Мондрус

Методом усреднения без учета радиационных потерь получены уравнения синхротронных и связанных синхробетатронных колебаний первого и второго приближения. Показано, что интервал применимости уравнений первого приближения не превосходит одного периода малых фазовых колебаний.

Исследованы стационарные точки уравнений второго приближения. Показано, что амплитуда фазовых колебаний может возрастать или уменьшаться со временем в зависимости от свойств магнитной системы и положения резонатора.

Показано также, что возможное изменение амплитуды фазовых колебаний не противоречит теореме Лиувилля: затухание фазовых колебаний сопровождается увеличением быстроменяющихся членов, и наоборот.

Используемые в настоящее время уравнения синхротронных колебаний являются результатом явного или неявного применения метода усреднения к уравнениям движения [1-3]. Однако при их выводе формализм метода использовался не в полной мере, что не позволяло указать область их применимости по независимой переменной.

В данной работе явно выделены малые параметры μ и ε, по которым производится равномерное асимптотическое разложение, и получены уравнения первого и второго приближения, справедливые в интервалах изменения независимой переменной порядка $1/(\mu+\varepsilon)$ и $1/(\mu+\varepsilon)^2$.

Уравнения, описывающие продольное и радиальное движение без учета потерь на синхротронное излучение, в натуральной системе координат нетрудно привести к такому виду [1]:

$$\frac{d\tilde{p}_x}{ds} = (1+\tilde{k}\tilde{x})\frac{e}{c}B_y + \tilde{k}\tilde{p}_\tau, \quad \frac{d\tilde{x}}{ds} = (1+\tilde{k}\tilde{x})\frac{\tilde{p}_x}{\tilde{p}_\tau},$$

$$\frac{d\tilde{\varepsilon}}{ds} = eE_\tau(1+\tilde{k}\tilde{x}), \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1+\tilde{k}\tilde{x}}{\tilde{p}_\tau}\frac{E}{c^2}. \tag{1}$$

В качестве независимой переменной выбрана длина дуги равновесной орбиты s; $\tilde{x}$ — радиальная координата частицы, t — время, $\tilde{k}=1/\tilde{R}$ — кривизна орбиты; $\tilde{p}_x$ и $\tilde{p}_\tau$ — радиальная и продольная составляющие импульса, причем $\tilde{p}_\tau=\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной к орбите; E — полная энергия частицы; B_y — вертикальная составляющая магнитного поля; e — элементарный заряд; c — скорость света. Система (1) получена в обычных предположениях $E_x=E_y=0$, $B_\tau=0$, $\tilde{p}_y=0$.

Перейдем к безразмерным переменным $\theta=s/R_0$, $x=\tilde{x}/R_0$, $k=\tilde{k}/k_0$, $\tau=\omega_0 t$, $p_x=\tilde{p}_x/p_0$, $E_\delta=E-E_0/E_0$, где $R_0=1/k_0$ — средний радиус равновесной орбиты; p_0, E_0 и ω_0 — соответственно импульс, энергия и частота обращения равновесной частицы. Разложив нелинейные члены в (1) в степенные ряды, получим

$$\frac{dp_x}{d\theta} + gx = \frac{kE_\delta}{\beta_s^2} - g_1x^2 - \frac{k}{2}p_\tau^2 - \frac{kE_\delta^2}{2\gamma_s^2\beta_s^4} - g_2x^3 + \frac{k\varepsilon Ep_x^2}{2\beta_s^2} + \frac{kE_\delta^3}{2\gamma_s^2\beta_s^6} + \dots,$$

$$\frac{dx}{d\theta}-p_x=kxp_x-\frac{p_xE_\delta}{\beta_s^2}+\frac{p_x^3}{2}+\left(1+\frac{1}{2\gamma_s^2}\right)\frac{p_xE_\delta^2}{\beta_s^4}-kxp_x\frac{E_\delta}{\beta_s^2}+\ldots,$$

$$\frac{dE_\delta}{d\theta}=\mu^2 f_1(\tau,\ \theta)(1+kx),$$

$$\frac{d\tau}{d\theta}=1+kx-\frac{E_\delta}{\beta_s^2\gamma_s^2}-\frac{kxE_\delta}{\beta_s^2\gamma_s^2}+\frac{p_x^2}{2}+\frac{3E_\delta^2}{2\gamma_s^2\beta_s^4}+\ldots \tag{2}$$

Мы представили электрическое поле в виде $E_\tau=E_{\max}f_{rf}(\tau,\ \theta)$ и обозначили $\mu^2=eE_{\max}d/E_0$, $\theta_d=d/R_0$, $f_1=\frac{1}{\theta_d}f_{rf}(\tau,\theta)$, d — длина резонатора, $\gamma_s=1/\sqrt{1-\beta_s^2}$ — релятивистский фактор равновесной частицы,

$$g=k^2\left(1+\frac{1}{kB_y(0)}\frac{\partial B_y}{\partial x}(0)\right),\ \ g_1=k^2\left(1-\frac{1}{2k^2}\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}(0)\right),$$

$$g_2=k^2\left(\frac{1}{2B}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}+\frac{1}{6kB}\frac{\partial^3 B}{\partial x^3}\right)_x=0.$$

Вначале мы не будем учитывать свободные бетатронные колебания, т. е. рассмотрим только те частицы, которые в отсутствие электрического поля движутся по равновесной орбите. Для решения системы (2) используем модификацию метода усреднения, весьма близкую по сути к методу многих масштабов и подробно описанную в [4].

Решение ищем в виде рядов по степеням малого параметра μ

$$p_x=\sum_m\mu^m p_{xm},\ \ x=\sum_m\mu^m x_m,\ \ E_\delta=\sum_m\mu^m E_{\delta m},\ \ \tau=\sum_m\mu^m\tau_m,$$

$$p_{xm}=p_{xm}(\theta,\ldots,\theta_m\ldots),\ldots,\ \theta_m=\mu^m\theta.$$

Подставляя эти ряды в (2) и приравнивая члены при одинаковых степенях μ, получим следующие системы уравнений для определения p_{xm}, x_m, $E_{\delta m}$, τ_m:

$$\frac{\partial p_{xm}}{\partial\theta}+gx_m=Q_{pm}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial x_m}{\partial\theta}-p_{xm}=Q_{xm}, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial E_{\delta m}}{\partial\theta}=Q_{Em}, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial\tau_m}{\partial\theta}=Q_{\tau m}, \tag{3.4}$$

$$Q_{pm}=\frac{kE_{\delta m}}{\beta_s^2}+\sum\nolimits_1\left(-\frac{\partial p_{xm_1}}{\partial\theta_{m_2}}-gx_{m_1}x_{m_2}-\frac{k}{2}p_{xm_1}p_{xm_2}-\frac{kE_{\delta m_1}E_{\delta m_2}}{2\gamma_s^2\beta_s^4}\right)+$$
$$+\sum\nolimits_2\left(-g_2x_{m_1}\ldots x_{m_3}+\frac{k}{2\beta_s^2}E_{\delta m_1}p_{xm_2}p_{xm_3}+\frac{k}{2\gamma_s^2\beta_s^6}E_{\delta m_1}\ldots E_{\delta m_3}\right),$$

$$Q_{xm}=\sum\nolimits_1\left(-\frac{\partial x_{m_1}}{\partial\theta_{m_2}}+kx_{m_1}p_{xm_2}-\frac{1}{\beta_s^2}p_{xm_1}E_{\delta m_2}\right)+\sum\nolimits_2\left(\frac{1}{2}p_{xm_1}\cdots p_{xm_3}\right)+$$
$$+\left(1+\frac{1}{2\gamma_s^2}\right)\frac{1}{\beta_s^4}p_{xm_1}E_{\delta m_2}E_{\delta m_3}-\frac{k}{\beta_s^2}x_{m_1}E_{\delta m_2}p_{xm_3}\Big).$$

$$Q_{Em}=-\sum\nolimits_1\frac{\partial E_{\delta m_1}}{\partial\theta_{m_2}}+\delta_m^2 f_1(\tau_0,\ \theta)+\frac{\partial f_1(\tau_0,\ \theta)}{\partial\tau}\tau_{m-2}+kf_1(\tau_0,\ \theta)\,x_{m-2},$$

$$Q_{\tau m}=\delta_m^0+kx_m-\frac{E_{\delta m}}{\beta_s^2\gamma_s^2}+\sum\nolimits_1\left(-\frac{\partial\tau_{m_1}}{\partial\theta_{m_2}}-\frac{kx_{m_1}E_{\delta m_2}}{\gamma_s^2\beta_s^2}+\frac{p_{xm_1}p_{xm_2}}{2}+\frac{3E_{\delta m_1}E_{\delta m_2}}{2\gamma_s^2\beta_s^4}\right).$$

Суммирование проводится по значениям индексов, удовлетворяющих условиям $m_1+m_2=m$ для Σ_1, и $m_1+m_2+m_3=m$ для Σ_2.

Коэффициенты разложения находим в следующей последовательности. В каждом порядке по μ находим сначала $E_{\delta m}$

$$E_{\delta m}=\int\limits_0^{\theta} Q_{Em}d\theta'+B_{1m}. \tag{4}$$

Условия отсутствия секулярных членов $\langle Q_{Em}\rangle=0$ определяют производные $\frac{\partial E_{\delta 01}}{\partial \theta_{m-1}}$. Угловые скобки означают усреднение по быстрой переменной

$$\langle f\rangle=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta')\,d\theta'.$$

Затем находятся периодические решения неоднородной системы (3. 1), (3. 2)

$$p_{xm}=-\frac{w_{21}}{\det w}\,\frac{1}{1-e^{-i\nu\theta_0}}\int\limits_{\theta}^{\theta+\theta_0}(w_{22}Q_{xm}-w_{12}Q_{pm})\,d\theta'+\text{к. с.}, \tag{5. 1}$$

$$x_m=-\frac{w_{11}}{\det w}\,\frac{1}{1-e^{-i\nu\theta_0}}\int\limits_{\theta}^{\theta+\theta_0}(w_{22}Q_{xm}-w_{12}Q_{pm})\,d\theta'+\text{к. с.}, \tag{5. 2}$$

где w — фундаментальная матрица однородной системы, элементы которой определяются соотношениями

$$w_{11}=f(\theta)\,e^{i\nu\theta},\quad w_{12}=w_{11}^{*},\quad w_{21}=\frac{dw_{11}}{d\theta},\quad w_{22}=w_{21}^{*},$$

θ_0 — период магнитной системы.

Подставив найденные $\varepsilon_{\delta m}$, x_m, p_{xm} в (3. 4), найдем τ_m

$$\tau_m=\int\limits_0^{\theta} Q_{\tau m}d\theta'+B_{2m}. \tag{6}$$

Из условия отсутствия секулярных членов $\langle\theta_{\tau m}\rangle=0$ найдем производные $\partial\tau_0/\partial\theta_m=\partial\tau_H/\partial\theta_m$.

Постоянные интегрирования B_{1m} и B_{2m}, за исключением B_{11} и B_{20}, определяются условиями $\langle\varepsilon_{\delta m}\rangle=0$, $\langle\tau_m\rangle=0$.

Объединив производные величин E_{δ_1} и τ_H с помощью соотношений $d/d\theta=\sum\limits_m \mu^m(\partial/\partial\theta_m)$, получим систему уравнений для нахождения этих величин.

Будем считать, что длина резонатора значительно меньше периода магнитной системы. В этом случае $f_1(\tau,\theta)=\cos h$ [illegible] $-\theta_2)$, где $\theta_r=2\pi n+\theta_R$, $0<\theta_R<2\pi$, θ_R — продольная координата резонатора, h — кратность частоты ускоряющего поля. Учитывая только члены первого порядка и вводя фазу $\varphi=h\tau_H+h\theta_R$ и коэффициент уплотнения орбит α, получим известную систему уравнений, описывающих в первом приближении фазовые колебания

$$\frac{dE_\delta}{d\theta}=\frac{\mu^2}{2\pi}\cos\varphi,\quad \frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{h}{\beta_s^2}\left(\alpha-\frac{1}{\gamma_s^2}\right)E_\delta,$$

Эти уравнения справедливы до значений $\theta\sim 1/\mu=\sqrt{h/\beta_s^2\,1/2\pi\,(\alpha-1/\gamma_s^2)}1/\nu_s$, где $\nu_s=\sqrt{h/2\pi 1/\beta_s^2\,(\alpha-1/\gamma_s^2)\mu^2}$ — относительная частота малых фазовых колебаний. Для магнитных систем с жесткой фокусировкой и релятивистских частиц $1/\beta_s^2\,(\alpha-1/\gamma_s^2)\ll 1$. Поэтому лишь при очень высоких значениях кратности интервал применимости уравнений первого приближения достигает величины, равной одному периоду малых фазовых колебаний. Отсюда следует желательность получения уравнений второго приближения.

Уравнения второго приближения, учитывающие члены второго порядка, имеют такой вид

$$\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{\mu^2 h}{\beta_s^2}\left(\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2\pi}\right)\cos\varphi+\frac{h}{\beta_s^2}\left(\alpha-\frac{1}{\gamma_s^2}\right)E_\delta+\frac{h\alpha_3}{\beta_s^4}E_\delta^2, \tag{7.1}$$

$$\frac{dE_\delta}{d\theta}=\frac{\mu^2}{2\pi}\cos\varphi-\frac{\mu^2}{2\pi}\frac{h\tau_{12}}{\beta_s^2}E_\delta\sin\varphi, \tag{7.2}$$

где τ_R определяется соотношением $\tau_1(\theta_R)=1/\beta_s^2 E_{\delta_1}\tau_R$, $\alpha_1=\langle k\psi_1\rangle$, $\alpha_2=\langle k\psi_2\rangle$, $\alpha_3=\langle k\psi_3\rangle+\frac{\alpha}{\gamma_s^2}+\frac{1}{2}\langle\psi'^2\rangle+\frac{3}{2\gamma_s^2}$, ψ — функция орбиты [1], $\alpha=\langle k\psi\rangle$,

$$\psi_i=\frac{w_{11}}{\det w}\frac{1}{1-e^{-i\nu 2\pi}}\int\limits_{\theta}^{\theta+2\pi}Q_i d\theta'+\text{к. с.},$$

$$Q_1=w_{12}kG,\ Q_2=-w_{12}\psi'+w_{22}\psi,\ Q_3=-\frac{1}{2}w_{12}\frac{k}{\gamma_s^2}-w_{22}\psi'(k\psi-\psi')-$$

$$-g_1 w_{12}\psi^2-\frac{1}{2}w_{12}k\psi'^2,$$

$$G=-\frac{1}{2}+\frac{\theta_R-\theta_i}{2\pi}\ \text{при}\ 0<\theta_i<\theta_R,$$

$$G=\frac{1}{2}+\frac{\theta_R-\theta_i}{2\pi}\ \text{при}\ \theta_R<\theta_i<2\pi,\ \theta=2\pi n+\theta_i.$$

Система (7) имеет две пары стационарных точек, одна из которых совпадает с точками уравнений первого приближения $\varepsilon_{\delta(1,2)}=0$, $\varphi_1=\pi/2$, $\varphi_2=-\pi/2$.

Линеаризовав уравнения (7) вблизи $\varepsilon_{\delta(1)}=0$, $\varphi_1=\pi/2$, получим уравнения малых колебаний

$$\frac{d(\varphi-\varphi_1)}{d\theta}=-\frac{\mu^2 h}{\beta_s^2}\left(\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2\pi}\right)(\varphi-\varphi_1)+\frac{h}{\beta_s^2}\left(\alpha-\frac{1}{\gamma_s^2}\right)E_\delta, \tag{8.1}$$

$$\frac{dE_\delta}{d\theta}=-\frac{\mu^2}{2\pi}(\varphi-\varphi_1)-\frac{\mu^2 h}{2\pi\beta_s^2}\tau_R E_\delta. \tag{8.2}$$

Наличие диагональных членов вносит поправку $\Delta\nu_s$ в частоту малых синхротронных колебаний и вызывает изменение их амплитуды с инкрементом λ_s

$$\begin{pmatrix}\varphi-\varphi_1\\ E_\delta\end{pmatrix}\sim\exp[\lambda_s\pm i(\nu_s+\Delta\nu_s)]\theta,$$

$$\lambda_s=\frac{1}{2}\frac{\mu^2 h}{\beta_s^2}\left(\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2\pi}+\frac{\tau_R}{2\pi}\right),\quad \Delta\nu_s=-\frac{1}{8}\frac{\mu^2 h}{\beta_s^2}\frac{\left(\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2\pi}-\frac{\tau_R}{2\pi}\right)^2}{\left(\alpha-\frac{1}{\gamma_s^2}\right)}.$$

Величина и знак инкремента определяются коэффициентами α_1, α_2, τ_R, причем α_2 зависит только от свойств магнитной системы, а α_1 и τ_R зависят от положения резонатора. Поэтому естественно, что в случае аксиально-симметричной магнитной системы все три коэффициента, как показывает непосредственное вычисление, обращаются в нуль. Для однородной ускоряющей системы, когда электрическое поле задается в виде бегущей волны $E\sim\cos h(\tau-\theta)$, равны нулю α и τ_R.

В общем случае все коэффициенты могут отличаться от нуля. Для сильной фокусировки можно получить их асимптотические оценки, интегрируя по частям выражения для соответствующих функций орбиты

$$\alpha_1=\frac{1}{\nu^2}\langle\chi G\rangle+0\left(\frac{1}{\nu^4}\right),\quad \alpha_2=0\left(\frac{1}{\nu^4}\right),$$

$$\tau_R = -\frac{1}{\nu^2}\left\langle \int\limits_{\theta_R}^{\theta} (\chi - \langle\chi\rangle)\, d\theta' \right\rangle + 0\left(\frac{1}{\nu^4}\right),$$

где $\chi = k^2 (2ff/^*\langle ff^*\rangle - 1)$, периодическая функция с периодом θ_0 и $\langle\chi\rangle \sim \alpha$. Видно, что τ_R изменяется в интервале $(-\tau_{R\,\max}, \tau_{R\,\max})$ и достигает минимального и максимального значений в точках, определяемых соответственно условиями $\chi(\theta) = \langle\chi\rangle$, $d\chi/d\theta > 0$; $\chi(\theta) = \langle\chi\rangle$, $d\chi/d\theta < 0$. Сумма $\alpha_1 + \tau_R/2\pi$ не равна тождественно нулю, так как при $2\pi/\theta_0 \gg 1$ $\langle\chi G\rangle \sim \alpha \sim \frac{1}{\nu^2}$ и $\alpha_1 \ll \frac{1}{2\pi}\tau_{R\,\max}$. Полагая $\tau_{R\,\max} \sim \theta_0$, получим для λ_s такую оценку: $\lambda_{s\,\max} \sim \frac{1}{2}\mu^2 h/\nu^2 \theta_0/2\pi$ или $\lambda_{s\,\max} \sim \Gamma h\alpha\theta_0$, где $\Gamma \sim \mu^2/2\pi$ — декремент радиационного затухания.

Таким образом, особая точка $\varepsilon_\delta = 0$, $\varphi_1 = \pi/2$ в зависимости от знака λ_s может быть устойчивым или неустойчивым фокусом. Изменение характера особой точки объясняется учетом во втором приближении высокочастотных составляющих, действующих на частицу сил.

Линеаризовав систему (7) вблизи $\varepsilon_\delta = 0$, $\varphi = -\pi/2$, нетрудно убедиться, что эта точка, как и в первом приближении, является седлом.

Использованное условие отсутствия свободных бетатронных колебаний не позволяет удовлетворить произвольным начальным условиям и ограничивает рассмотрение частицами, расположенными на двумерной поверхности шестимерного фазового пространства.

Чтобы учесть свободные бетатронные колебания, введем второй малый параметр ε, характеризующий малость их амплитуды, и будем искать решение в виде рядов по обоим малым параметрам

$$p_x = \sum_{l,\,m} \varepsilon^l \mu^m p_{xlm},\quad x = \sum_{l,\,m} \varepsilon^l \mu^m x_{lm},\quad E_\delta = \sum_{l,\,m} \varepsilon^l \mu^m E_{\delta lm},$$

$$\tau = \sum_{l,\,m} \varepsilon^l \mu^m \tau_{lm},\quad p_{xlm} = p_{xlm}(\theta, \ldots, \theta_{lm}, \ldots)\ldots,\quad \theta_{lm} = \varepsilon^l \mu^m \theta. \tag{9}$$

Применение похожих рядов для решения систем уравнений, содержащих несколько малых параметров, описано в [5]. После подстановки этих рядов в (2) получим системы уравнений, отличающиеся от системы (3) дополнительным индексом у переменных. Решение выполняется во всем аналогично предыдущему случаю, за исключением некоторых деталей. Так как теперь усредняемая функция не всегда является периодической, то среднее значение определяется следующим образом:

$$\langle f\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n} \int\limits_0^{2\pi n} f(\theta')\, d\theta'.$$

Постоянные интегрирования теперь выбираются так, чтобы начальные значения соответствующих величин обращались в нуль. При $l \neq 0$ вместо (5. 1) и (5. 2) имеем

$$p_{xlm} = \frac{w_{21}}{\det w} \int\limits_0^\theta (w_{22} Q_{xlm} - w_{12} Q_{plm})\, d\theta' + \text{к. с.},$$

$$x_{lm} = \frac{w_{11}}{\det w} \int\limits_0^\theta (w_{22} Q_{xlm} - w_{12} Q_{plm})\, d\theta' + \text{к. с.}$$

Условие отсутствия секулярных членов $\langle w_{22} Q_{xlm} - w_{12} Q_{plm}\rangle = 0$ определяет производные амплитуды свободных бетатронных колебаний $\partial C_1/\partial\theta_{l-1,\,m} = \partial C_1'/\partial\theta_{l-1,\,m} + i\partial C_1''/\partial\theta_{l-1,\,m}$. Мы ограничились рассмотрением нерезонансного случая, считая, что не выполняются следующие условия: $m\nu = k\nu_0 + s$

(k — целое; $m=2, 3, 4$), $\delta \ll 1$, $\nu_0=2\pi/\theta_0$. Уравнения первого приближения таковы:

$$\frac{dC'}{d\theta}=-\frac{\beta_1}{2\beta_s^2}C''E_\delta,\quad \frac{dC''}{d\theta}=\frac{\beta_1}{2\beta_s^2}C'E_\delta,$$

$$\frac{dE_\delta}{d\theta}=\frac{\mu^2}{2\pi}\cos\varphi,\quad \frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{h}{\beta_s^2}\left(\alpha-\frac{1}{\gamma_s^2}\right)E_\delta, \tag{10}$$

где обозначено $C=\varepsilon C_1$, $E_\delta=\mu E_{\delta 01}$, $\beta_1=\langle\psi_{11}\rangle$, $\psi_{11}=(k\psi-1)|\tilde{f}|^2+2g_1\psi|f|^2+k\psi'(f\tilde{f}^*+f^*\tilde{f})$, $\tilde{f}=f'(\theta)+i\nu f(\theta)$.

Таким образом, в первом приближении связь между колебаниями проявляется лишь в медленном периодическом изменении фазы бетатронных колебаний, что согласуется с получавшимися ранее, при совместном рассмотрении обоих колебаний, результатами [1].

Мы не приводим нелинейную систему уравнений второго приближения из-за ее громоздкости. После линеаризации вблизи стационарной точки $\varepsilon_\delta=0$, $\varphi_1=\pi/2$, $C'=C''=0$ она принимает такой вид:

$$\frac{dC'}{d\theta}=\lambda_1 C'',\quad \frac{dC''}{d\theta}=-\lambda_1 C',$$

$$\frac{dE_\delta}{d\theta}=2\mu^2h\chi''C'+2\mu^2h\chi'C''+\frac{\mu^2h}{\beta_s^2}\left[-\frac{\tau_R}{2\pi}+\langle G\rangle\left(\alpha-\frac{1}{\gamma_s^2}\right)\right]E_\delta-\frac{\mu^2}{2\pi}(\varphi-\varphi_1),$$

$$\frac{d(\varphi-\varphi_1)}{d\theta}=\frac{h}{\beta_s^2}\left(\alpha-\frac{1}{\gamma_s^2}\right)E_\delta-\frac{\mu^2h}{\beta_s^2}\left(\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2\pi}-\frac{\langle G\rangle}{\gamma_s^2}-\frac{\tau_\sigma}{2\pi}\right)(\varphi-\varphi_1),$$

где теперь $G=-\theta_i/2\pi$ при $0<\theta_i<\theta_R$; $G=(1-\theta_i/2\pi)$ при $\theta_R<\theta_i<2\pi$; $\tau_R=\int\limits_0^{\theta_R}(k\psi-\alpha)\,d\theta'$; $\tau_\sigma=\left\langle\int\limits_0^{\theta}(k\psi-\alpha)\,d\theta'\right\rangle$; λ_1, χ', χ'' — постоянные коэффициенты, определяемые свойствами магнитной и ускоряющей систем.

Первые два уравнения определяют изменение фазы бетатронных колебаний.

$$C'=B_1e^{i\lambda_1\theta}+B_2e^{-i\lambda_1\theta},\quad C''=iB_1e^{i\lambda_1\theta}-iB_2e^{-i\lambda_1\theta}.$$

Вторая пара уравнений является неоднородной с заданными C' и C''. Соответствующая им однородная система по виду такая же, как и полученная ранее без учета бетатронных колебаний. Ее характеристическое уравнение имеет корни, действительная часть которых

$$\operatorname{Re}(\lambda_{3,4})=\frac{1}{2}\frac{\mu^2h}{\beta_s^2}\left[\alpha_1-\alpha\langle G\rangle+\frac{\alpha_2}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}(\tau_R-\tau_\sigma)\right]$$

в точности совпадает с полученными ранее без учета бетатронных колебаний, так как $\alpha_1-\alpha\langle G\rangle$ и $\tau_R-\tau_\delta$ равны определенным там α_1 и τ_R.

Таким образом, учет бетатронных колебаний показал, что затухание или нарастание синхротронных колебаний не сопровождаются изменением в другую сторону амплитуды бетатронных колебаний.

Чтобы показать, что полученные результаты не противоречат теореме Лиувилля, представим их в инвариантной относительно произвольной замены переменных форме и найдем соответствующий интегральный инвариант.

Уравнения (1) следуют из уравнений движения, имеющих в гамильтоновой форме такой вид:

$$\frac{dP_x}{ds}=-\frac{\partial H^*}{\partial\tilde{x}},\quad \frac{d\tilde{x}}{ds}=\frac{\partial H^*}{dPx},\quad \frac{d(-H)}{ds}=-\frac{\partial H^*}{\partial t},\quad \frac{dt}{ds}=\frac{\partial H^*}{\partial(-H)},$$

$$H^*=-P_s=-\frac{e}{C}A_s-(1+\tilde{k}\tilde{x})\left[\frac{1}{C^2}(H-e\Phi)^2-m_0^2C^2\left(P_x-\frac{e}{C}A_x\right)^2\right]^{1/2}, \tag{11}$$

P_s, P_x — обобщенные продольный и радиальный импульсы, H — гамильтониан при использовании времени в качестве независимой переменной, **A** и Φ — векторный и скалярный потенциалы.

Обозначив $x^2=s$, $x^3=P_x$, $x^4=x$, $x^5=-H$, $x^6=z$, $\mathscr{H}=(H^*+x^1)\,R_0$ (x^1 — переменная, сопряженная x^2) и полагая $\mathscr{H}=0$, представим систему (11) в эквивалентном виде

$$\dot{x}^a=E^{ab}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x^b}, \tag{12}$$

где E^{ab} — антисимметричная 6×6 матрица, у которой $E^{a,\,a+1}=-1$; $E^{a-1,\,a}=1$; остальные элементы равны нулю [6]; точка означает дифференцирование по θ; $dx^2/d\theta=R_0$; по дважды повторяющимся индексам производится суммирование.

Будем рассматривать переход к механическим импульсам и безразмерным переменным как замену переменных $y^i=y^i\,(x^1,\ \ldots,\ x^6)$, а полученное решение системы (2) методом усреднения как переход к переменным $C_1'=v^3$, $C_1''=v^4$, $E_{\delta 01}=v^5$, $\varphi=v^6$, $y^i=y^i\,(v^1,\ \ldots,\ v^6)$. В результате последовательного выполнения этих замен переменной уравнение (12) примет вид

$$\dot{v}^i=G^{ij}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial v^j}. \tag{13}$$

Обратная к G^{ij} матрица G_{ij} дается выражением

$$G_{ij}=G^{(0)}_{aC}\frac{\partial y^a}{\partial v^i}\frac{\partial y^C}{\partial v^j},\ \text{а}\ G^{(0)\,ij}=E^{ab}\frac{\partial y^i}{\partial x^a}\frac{\partial y^j}{\partial x^b}.$$

Воспользуемся одним из интегральных инвариантов Картана, обобщенных для случая произвольной замены переменных [6]

$$I_4=\frac{1}{4}\int\limits_{M_4}G_{a_1a_2}G_{a_3a_4}dS^{a_1a_2a_3a_4}, \tag{14}$$

где $dS^{a_1a_2a_3a_4}$ — элемент 4-мерной гиперповерхности M^4, которую определим условиями $v^1=-H\,(C_\theta,\ v^{-3},\ \ldots,\ v^{-6})$, $v^2=C_\theta=\text{const}$.

Выражение (14) можно преобразовать к такому виду [6]:

$$I_4=2\int\limits_{M_4}\sqrt{|\tilde{G}_{ij}|}\,dv^3dv^4dv^5dv^6, \tag{15}$$

где $|\tilde{G}_{ij}|$ — определитель, составленный из элементов G_{ij} с $i>2$, $j>2$.

Фазовый объем $dv^3dv^4dv^5dv^6=dC_1'dC_1''dE_{\delta 01}d\varphi$ сохраняется, если $\sqrt{|\tilde{G}_{ij}|}=$ $=\text{const}$. Выразим $\sqrt{|\tilde{G}_{ij}|}$ через якобиан преобразования от переменных y^i к v^i

$$\sqrt{|\tilde{G}_{ij}|}=|D|\sqrt{|\tilde{G}^{(0)}_{ab}|},\ \sqrt{|\tilde{G}^{(0)}_{ab}|}=\frac{1}{\omega_0}R_0^2p_0E_0=\text{const},$$

$|D|$ можно представить в таком виде:

$$|D|=\varepsilon^2\mu\sum_{i,\,k}\varepsilon^i\mu^k\Delta_{ik}.$$

Как показывают непосредственные вычисления, появляющиеся во втором приближении члены с $i+k=2$ не являются постоянными, а зависят от θ и v^i. Изменение фазового объема $dv^3dv^4dv^5dv^6=dC_1'dC_1''dE_{\delta 01}d\varphi$ происходит в соответствии с изменением $|D|$. Сохранение фазового объема $dp_x\,dxdE_\delta\,d\tau$ при возможном затухании фазовых колебаний и уменьшении $dC_1'\,dC_1''d\varepsilon_{\delta 01}\,d\varphi$ обеспечивается появляющимися во втором улучшенном приближении членами в разложении (9), которые содержат $\sin v^6$, и, следовательно, затухание фазовых колебаний должно сопровождаться увеличением быстроменяющихся членов, и наоборот.

В заключение отметим, что учет реального распределения поля в резонаторе не изменит полученных результатов. Для симметричных типов колебания поперечные компоненты полей пропорциональны отклонению от оси. Возникающие благодаря им дополнительные члены в первом и третьем уравнениях системы (2) имеют порядок малости соответственно μ^3 и μ^4. Так как при получении уравнений фазовых колебаний во втором приближении используются уравнения, получающиеся приравниванием членов порядка μ^2 и μ^3 в указанных уравнениях, то наличие дополнительных членов не сказывается на результатах второго приближения.

Автор благодарен С. Г. Кононенко и Н. Н. Наугольному за полезные обсуждения.

Литература

[1] *Коломенский А. А., Лебедев А. Н.* Теория циклических ускорителей. М., 1962. 352 с.
[2] *Карлинер М. М.* Препринт ИАФ. № 74-105. Новосибирск, 1974. 47 с.
[3] *Suzuki J.* // Particle accelerators. 1982. Vol. 12. N 4. P. 237—246.
[4] *Островский Л. А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 4. С. 454—476.
[5] *Лейбович С., Сибасс А.* // Нелинейные волны / Под ред. С. Лейбовича и А. Сибасса. М.: Мир, 1977. С. 113—149.
[6] *Бакай А. С., Степановский Ю. П.* Адиабатические инварианты. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.

Поступило в Редакцию
16 сентября 1986 г.
В окончательной редакции
19 ноября 1987 г.