01; 09; 10

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ЭФФЕКТА КАНАЛИЗАЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЛЕНТОЧНЫМ РЕЛЯТИВИСТСКИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ В ЛАЗЕРЕ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ

Н. С. Гинзбург, А. С. Сергеев

В линейном приближении исследована канализация излучения релятивистским ленточным электронным пучком в ЛСЭ с плоским ондулятором. Рассмотрены режимы малого и большого пространственного заряда (комптоновский и рамановский режимы). Для этих режимов найдены собственные волны системы ленточный пучок электронов-осцилляторов — электромагнитное поле. Показано, что среди собственных волн существуют волны, нарастающие в продольном направлении, спадающие в поперечном и переносящие энергию излучения от пучка к периферии. В рамках параболического уравнения решена задача о дифракции плоской волны на слое электронов-осцилляторов. Показано, что асимптотическое поведение поля при больших длинах пространства взаимодействия определяется возбуждением нарастающей, канализируемой электронным пучком собственной волны.

Введение

В последнее время значительное внимание уделяется исследованию эффектов канализации электромагнитного излучения интенсивными электронными пучками в рабочем пространстве релятивистских высокочастотных приборов [1-15]. Использование таких эффектов привлекательно в силу ряда причин: а) селекция мод по поперечному индексу в приборах с пространственно развитыми электродинамическими системами, в частности возможность получения пространственно когерентного излучения на «горячих» модах, представляющих собой совокупность большого числа мод холодной электродинамической системы; б) увеличение инкрементов и снижение стартовых токов вследствие концентрации излучения в области электронного потока и уменьшения полного объема занятого электромагнитным полем; в) снижение опасности возникновения ВЧ пробоев из-за ослабления напряженности электромагнитного поля на боковых стенках электродинамической системы.

Настоящая работа посвящена линейной теории эффекта канализации излучения ленточным электронным пучком в ЛСЭ с плоским ондулятором. Рассмотрены случаи, когда электромагнитная волна взаимодействует непосредственно с электронами (комптоновский режим) и волнами пространственного заряда (рамановский режим).

Основные уравнения

Поле магнитного ондулятора (индекс u) и электромагнитной волны (индекс s) будем задавать вектор-потенциалами

$$\mathbf{A}_u = \mathrm{Re}\,[\mathbf{y}_0 \hat{A}_u \operatorname{ch} h_u x e^{ih_u z}], \tag{1}$$

$$\mathbf{A}_s = \mathrm{Re}\,[\mathbf{y}_0 \hat{A}_s (z,\ x)\, e^{i(\omega_s t - h_s z)}], \tag{2}$$

где $h_u=2\pi/d$, d — период ондулятора, $h_s=\omega_s/c$, A_s (z, x) — медленно меняющаяся амплитуда сигнальной волны ТЕ-поляризации с отличными от нуля компонентами E_y, H_x и H_z электрических и магнитных полей. Допустим, что бесконечно тонкий ленточный релятивистский электронный пучок инжектируется в сечении $x=0$, поступательная скорость частиц направлена вдоль оси z (рис. 1).

В полях (1), (2) электроны будут осциллировать в поперечном направлении со скоростями

$$v_y^u=\mathrm{Re}\left[\frac{e\hat{A}_u}{mc\gamma}e^{ih_uz}\right],\quad v_y^s=\mathrm{Re}\left[\frac{e\hat{A}_s}{mc\gamma}e^{i(\omega_st-h_sz)}\right], \tag{3}$$

где $\gamma=\mathcal{E}/mc^2$ — релятивистский масс-фактор, $\mathcal{E}$ — энергия электронов.

При выполнении условия комбинационного синхронизма $\omega_s-h_sv_\parallel=h_uv_\parallel$ под действием усредненной пондеромоторной силы

$$F_z=\frac{e^2}{2\mathcal{E}}\mathrm{Re}\left[ih_c\hat{A}_u^*\hat{A}_se^{i(\omega_st-h_cz)}\right] \tag{4}$$

будет развиваться продольная группировка электронного пучка, в результате чего его плотность окажется промодулированной с временной частотой ω_s и

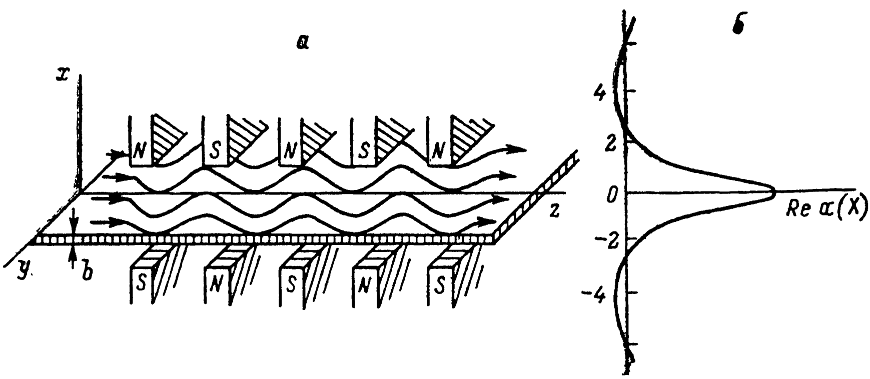

Рис. 1. Схема убитрона ЛСЭ с плоским ондулятором и ленточным электронным пучком (*а*) и поперечная структура канализируемой электронным пучком собственной моды (*б*).

волновым числом $h_c=h_s+h_u$. Модуляция пучка приведет к возбуждению дополнительного поля высокочастотного пространственного заряда (индекс b), которое имеет следующие компоненты:[1]

$$E_{x,z}^b,\ H_y^b=\mathrm{Re}\left[\hat{E}_{x,z}^b(z,\ x),\ \hat{H}_y^b(z.\ x)\,e^{i(\omega_st-h_cz)}\right]. \tag{5}$$

Линеаризованные уравнения движения частиц в полях (4), (5) могут быть представлены в виде

$$m\gamma_0^3\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_{\parallel 0}\frac{\partial}{\partial z}\right)v_z=\frac{e^2}{2mc^2\gamma_0}\mathrm{Re}\left[ih_c\hat{A}_u\hat{A}_se^{i(\omega_st-h_cz)}\right]+e\,\mathrm{Re}\left[\hat{E}_z^be^{i(\omega_st-h_cz)}\right],$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{\partial j_z}{\partial z}=0, \tag{6), (7}$$

где σ и $j_z=\sigma v_z$ — поверхностные плотности заряда и тока, индекс «0» здесь и далее соответствует начальным невозмущенным значениям величин.

Представляя входящие в (6), (7) величины в виде

$$v_z,\ \sigma,\ j_z=\mathrm{Re}\left[\hat{v}_z,\ \hat{\sigma},\ \hat{j}_ze^{i(\omega_st-h_cz)}\right],$$

[1] Поле пространственного заряда имеет структуру *TM*-волны и в отличие от поля излучаемой сигнальной волны (*2*) является не собственным, а вынужденным решением уравнений Максвелла (величины ω и h_c не удовлетворяют дисперсионному уравнению для электромагнитных волн в вакууме).

приведем эти уравнения к форме

$$i(\omega_s - h_c v_{\parallel 0})\hat{v}_z + v_{\parallel 0}\frac{\partial \hat{v}_z}{\partial z} = \frac{e^2}{2m^2c^2\gamma_0^4} i h_c \hat{A}_s \hat{A}_u + \frac{e\hat{E}_z^b}{m\gamma_0^3}, \quad (8)$$

$$i(\omega_s - h_c v_{\parallel 0})\hat{\sigma} + v_{\parallel 0}\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial z} - i h_c \sigma_0 \hat{v}_z + \sigma_0 \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

или после исключения $\hat{v}_z$ имеем

$$\left[\omega_s - h_c v_{\parallel 0} - i v_{\parallel 0}\frac{\partial}{\partial z}\right]^2 \hat{\sigma} = \frac{e^2 h_c^2 \sigma_0 \hat{A}_u \hat{A}_s}{2m^2c^2\gamma_0^4} - \frac{i e h_c \sigma_0 \hat{E}_z^b}{m\gamma_0^3}. \quad (10)$$

Эволюция амплитуды электромагнитной волны описывается уравнением параболического типа [1, 3, 5]

$$\frac{\partial^2 \hat{A}_s}{\partial x^2} - 2ih_s \frac{\partial \hat{A}_s}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c}\hat{j}_y \delta(x), \quad (11)$$

где $\delta(x)$ — дельта функция Дирака,[2] $\hat{j}_y$ — амплитуда поверхностной плотности поперечного тока на частоте сигнала.

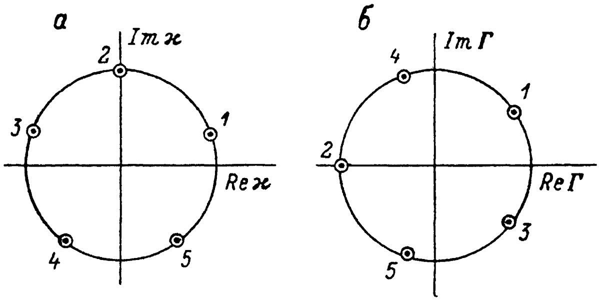

Рис. 2. Расположение на комплексной плоскости поперечных (*а*) и продольных (*б*) волновых чисел собственных волн в комптоновском режиме взаимодействия $q \ll 1$, $\Delta = 0$. Нарастающей локализованной является волна с $n = 5$.

Комбинационная компонента этого тока выражается через амплитуду колебаний электронов в поле ондулятора (3) и амплитуду возмущений плотности заряда

$$\hat{j}_y = -\frac{e\hat{A}_u}{2mc\gamma_0}\hat{\sigma}. \quad (12)$$

За возбуждение поля пространственного заряда (5) ответственна продольная компонента высокочастотного тока $\hat{j}_z = \omega/h_c \hat{\sigma}$. На электронном пучке испытывает разрыв $\hat{H}_y^b$ компонента магнитного поля

$$\{\hat{H}_y^b\}|_{x=0} \equiv \hat{H}_y^b|_{x=+0} - \hat{H}_y^b|_{x=-0} = \frac{4\pi}{c}\hat{j}_z.$$

Принимая во внимание, что $\hat{H}_y^b = i\omega_s/gc\hat{E}_z^b \operatorname{sign} x$, для амплитуды продольной компоненты электрического поля в плоскости пучка ($x=0$) имеем (ср. [16, 17])

$$\hat{E}_z^b = \frac{2\pi i g}{h_c}\hat{\sigma}, \quad (13)$$

где $g = \sqrt{h_c^2 - \omega_s^2/c^2} = \sqrt{h_u^2 + 2h_u\,\omega_s/c}$ — поперечное волновое число поля пространственного заряда (зависимость поля пространственного заряда от поперечной координаты имеет вид $e^{-g|x|}$, т. е. это поле экспоненциально спадает при удалении от пучка).

---

[2] Для исследования процессов в слое конечной толщины под $\delta(x)$ следует понимать функцию, описывающую поперечное распределение плотности пучка.

Объединяя уравнения (10)—(13), приходим к самосогласованной системе уравнений, описывающей взаимодействие электромагнитной волны с ленточным пучком электронов-осцилляторов

$$i\frac{\partial^2 a}{\partial X^2}+\frac{\partial a}{\partial Z}=2i\sigma\delta(X), \tag{14}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial Z}+i\Delta\right)^2\sigma+q^2\sigma=-a, \tag{15}$$

где $Z=(\omega_s/c)\,zC$, $X=(\omega_s/c)\,x\sqrt{2C}$, $a=h_c^2\bar{\omega}_{b\parallel}^2\alpha_u/8\pi\omega_s^2\hat{A}_s C^{-2}$, $\alpha_u=e\hat{A}_u/mc^2\gamma_0$, $\Delta=(1/\beta_{\parallel 0}-h_c c/\omega_s)\,C^{-1}$ — начальная расстройка синхронизма, $\beta_\parallel=v_\parallel/c$, $q^2=\bar{\omega}_{b\parallel}^2 g/2\beta_{\parallel 0}^2\omega_s^2 C^2$ — параметр пространственного заряда, $\bar{\omega}_{b\parallel}=\sqrt{4\pi e\sigma_0/m\gamma_0^3}$ — продольная плазменная частота

$$C=\left(\frac{ch_c^2\bar{\omega}_{b\parallel}^2\alpha_u^2}{8\sqrt{2}\,\omega_s^3\beta_{\parallel 0}^2}\right)^{2/5} \tag{16}$$

— параметр усиления.

Собственные волны системы ленточный пучок—электромагнитное поле

Исследуем сначала собственные волны, распространяющиеся в системе, безграничной в продольном направлении, электронный пучок — электромагнитное поле. Представляя решение (14), (15) в виде $a=\tilde{a}e^{i\Gamma Z}$, $\sigma=\tilde{\sigma}e^{i\Gamma Z}$, приведем указанную систему к одному уравнению

$$\frac{d^2\tilde{a}}{dX^2}+\Gamma\tilde{a}=\frac{2i\delta(X)\,\tilde{a}}{(\Delta+\Gamma)^2-q^2}. \tag{17}$$

Вне пучка ($X\neq 0$) решение (17) дается соотношением

$$\tilde{a}=\tilde{a}(0)\,e^{-i\varkappa|X|}, \tag{18}$$

где $\varkappa=\sqrt{\Gamma}$ — нормированное поперечное волновое число электромагнитной волны.

Сшивая эти решения на пучке с учетом вытекающего из (17) граничного условия

$$\left\{\frac{d\tilde{a}}{dX}\right\}\Big|_{X=0}=\frac{\tilde{a}(0)}{(\Delta+\Gamma)^2-q^2}, \tag{19}$$

приходим к дисперсионному уравнению [15]

$$\sqrt{\Gamma}\,[(\Gamma+\Delta)^2-q^2]=i \quad \text{или} \quad \varkappa[(\varkappa^2+\Delta)^2-q^2]=i. \tag{20}$$

В режиме исчезающе малого влияния пространственного заряда ($g\ll 1$) решения дисперсионного уравнения (20) находятся в условиях точного начального синхронизма $\Delta=0$

$$\varkappa_n=e^{i(\pi/10+2\pi(n-1)5)}, \tag{21}$$

$$\Gamma_n=e^{i(\pi/5+4\pi(n-1)/5)}, \tag{22}$$

где $n=1$—5.

Согласно (21), (22), в рассматриваемом случае в системе существуют 5 нормальных волн (рис. 2), две из которых нарастают вдоль оси Z ($\mathrm{Im}\,\Gamma_{3,5}<0$), две затухают $\mathrm{Im}\,\Gamma_{1,4}>0$, а одна распространяется без изменения амплитуды $\mathrm{Im}\,\Gamma_2=0$. Волны с номерами $n=1$—3 нарастают при удалении от пучка $\mathrm{Im}\,\varkappa>0$, а волны с номерами $n=4$, 5 затухают $\mathrm{Im}\,\varkappa<0$. Заметим, что для волн с номерами $n=1$, 5 поток энергии (поперечная компонента вектора Пойнтинга) направлен от пучка к периферии $\mathrm{Re}\,\varkappa>0$, а для волн с $n=3$, 4 — в противоположном направлении $\mathrm{Re}\,\varkappa<0$. Для волны с $n=2$ указанный поток отсутствует $\mathrm{Re}\,\varkappa=0$. Из двух нарастающих в продольном направлении волн следует особо выделить волну с $n=5$, поскольку эта волна является локализованной вблизи поверхности пучка и переносящей энергию от пучка к периферии.

Рассмотрим теперь режим большого пространственного заряда $q \gg 1$, когда можно разделить взаимодействие электромагнитной волны с быстрой и медленной волнами пространственного заряда. Предполагая, что в синхронизме находится медленная волна пространственного заряда $\Delta = -q + \delta$, где $|\delta| \ll q$, приведем дисперсионное уравнение к виду

$$\sqrt{\Gamma}\,(\Gamma + \delta) = -i/2q \quad \text{или} \quad \varkappa\,(\varkappa^2 + \delta) = -i/2q. \tag{23}$$

Решения (23) при $\delta = 0$ даются соотношениями

$$\varkappa_n = \frac{1}{(2q)^{1/3}}\, e^{i(-\pi/\sigma + 2\pi(n-1)/3)}, \tag{24}$$

$$\Gamma_n = \frac{1}{(2q)^{2/3}}\, e^{i(-\pi/3 + 4\pi(n-1)/3)}, \tag{25}$$

где $n = 1-3$.

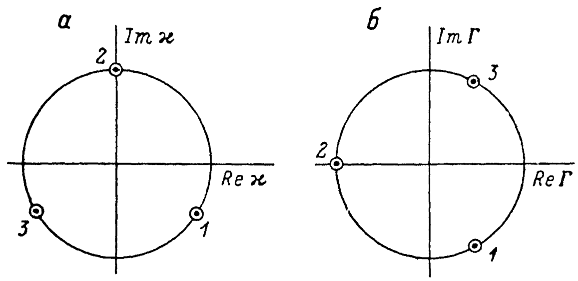

Рис. 3. Расположение на комплексной плоскости поперечных (*а*) и продольных (*б*) волновых чисел собственных волн в рамановском режиме взаимодействия $q \gg 1$, $\Delta = -q$. Нарастающей локализованной является волна с $n = 1$.

Расположение корней на комплексной плоскости показано на рис. 3. Очевидно, что в рассматриваемом режиме взаимодействия среди нормальных волн также существует волна ($n = 1$), нарастающая в продольном направлении и спадающая в поперечном направлении. Заметим, что в случае синхронизма с быстрой волной пространственного заряда $\Delta = q$ подобные волны отсутствуют. Как будет показано в следующем разделе, из анализа граничной задачи усиление и канализация излучения оказываются возможными при наличии локализованной нарастающей нормальной волны, причем асимптотическое поведение поля при больших длинах пространства взаимодействия определяется возбуждением этой волны.

Дифракция плоской волны на слое электронов-осцилляторов

Рассмотрим с помощью системы уравнений (14), (15) полубезграничную задачу о дифракции плоской волны,[3] падающей в сечении $Z = 0$ на слой осциллирующих в поле ондулятора электронов. Предполагая, что начальная модуляция электронного пучка в указанном сечении отсутствует, представим граничные условия к уравнениям (14), (15) в виде

$$\sigma|_{Z=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\sigma}{\partial Z}\right|_{Z=0} = 0, \quad a|_{Z=0} = a_0. \tag{26}$$

Будем искать решение уравнений (14), (15), (26), используя преобразование Лапласа по координате Z. Совершая прямое преобразование

$$a_p \equiv L(a) = \int_0^\infty a e^{-pZ} dZ, \quad \sigma_p = \int_0^\infty \sigma e^{-pZ} dZ, \qquad (27),\ (28)$$

[3] Эволюция произвольного возмущения поля рассмотрена в Приложении.

для образов функций получим систему уравнений

$$i \frac{d^2 a_p}{dX^2} + p a_p - a_0 = 2i\delta(X)\sigma_p, \tag{29}$$

$$\sigma_p[(p + i\Delta)^2 + q^2] = -a_p. \tag{30}$$

С учетом граничного условия $\{da_p/dX\}|_{X=0} = \sigma_p$, аналогичного (19), решение системы уравнений (29), (30) для образа излучаемого поля может быть представлено в виде

$$a_p = \frac{a_0}{p}\left[1 + \frac{e^{-\sqrt{ip}\,|X|}}{\sqrt{ip}\,((p + i\Delta)^2 + q^2) - 1}\right]. \tag{31}$$

Рассмотрим сначала случай пренебрежимо малого влияния пространственного заряда $q \ll i$ и точного начального синхронизма $\Delta = 0$. Производя обратное преобразование Лапласа, для поля волны получим

$$a(Z, X) = L^{-1}(a_p) = \frac{a_0}{2\pi i}\int\limits_{\Omega - i\infty}^{\Omega + i\infty}\left[\frac{1}{p} + \frac{e^{-\sqrt{ip}\,|X|}}{p\,(\sqrt{i}\,p^{5/2} - 1)}\right] e^{pZ} dp. \tag{32}$$

Используя разложение подынтегрального выражения на элементарные дроби, будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{i}\,p^{5/2} - 1} = \frac{1}{5\sqrt{i}}\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{p_n^4(\sqrt{p} - p_n)}, \tag{33}$$

где $p_n = \sqrt{i}\,\varkappa_n = e^{i(7\pi/20 + 2\pi(n-1)/5)}$.

Сведем интеграл (32) к сумме интегралов стандартного вида [18]. Вычисление интегралов дает

$$a(Z, X) = a_0\left[\Phi\left(\frac{\sqrt{i}\,|X|}{2\sqrt{Z}}\right) + \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{5} e^{-i\varkappa_n|X| + i\Gamma_n Z}\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{i}\,|X|}{2\sqrt{Z}} - \varkappa_n\sqrt{iZ}\right)\right)\right], \tag{34}$$

где величины $\varkappa_n$ и Γ_n определяются соотношениями (21), (22); $\Phi(u) = 2/\sqrt{\pi}\int\limits_0^u e^{-t^2}dt$ — интеграл вероятности.

Основываясь на асимптотических представлениях интеграла вероятностей при больших значениях аргумента

$$\Phi(u) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-u^2}}{u}\left(1 - \frac{1}{2u^2} + \frac{3}{4u^4}\right), \tag{35}$$

$$|u| \to \infty, \ |\arg u| < 3\pi/4, \tag{36}$$

найдем приближенные выражения для излучаемого поля при $X \to \infty$ и $Z \to \infty$.

В случае $X \to \infty$ $(X \gg \sqrt{Z})$ имеем

$$a(Z, X) = a_0\left[1 - 2\sqrt{\frac{i}{\pi}}\,\frac{Z^{1/2}}{X^6}\,e^{-iX^2/4Z}\right]. \tag{37}$$

Таким образом, на большом удалении от плоскости пучка поле можно представить в виде суммы начального поля a_0 и добавки, обусловленной влиянием электронного пучка, которая убывает по закону X^6.

Рассмотрим теперь асимптотику больших длин пространства взаимодействия $Z \to \infty$ $(X \ll \sqrt{Z})$. В такой ситуации аргументы функции $\Phi(u)$ для членов ряда с номерами $n=1-4$ удовлетворяют условию (29). Для члена с $n=5$ это условие будет выполнено, если предварительно воспользоваться соотношением

$\Phi(u)=-\Phi(-u)$. В результате излучаемое поле в приосевой области вдали от входного сечения может быть представлено в виде

$$a(Z,\ X)=a_0\left[\sqrt{\frac{i}{\pi}}\left(\frac{|X|}{2\sqrt{Z}}+\frac{3}{4Z^{5/2}}\right)e^{-iX^2/4Z}+\frac{2}{5}\,e^{-i\varkappa_5|X|+i\Gamma_5 Z}\right]\simeq\frac{2a_0}{5}\,e^{-i\varkappa_5|X|+i\Gamma_5 Z}. \quad (38)$$

Как и следовало ожидать, при достаточно больших длинах пространства взаимодействия излучаемое электронным пучком поле имеет структуру нарастающей, локализованной вблизи поверхности пучка собственной волны ($n=5$).

Аналогичный результат получается и в режиме взаимодействия электромагнитной волны с медленной волной пространственного заряда. Предполагая $q \gg 1$ и $\Delta=-q$, после пренебрежения взаимодействием с быстрой пучковой волной представим образ поля (31) в приближенном виде

$$a_p=\frac{a_0}{p}\left[1-\frac{e^{-\sqrt{ip}\,|X|}}{1+2iqp\sqrt{ip}}\right]. \quad (39)$$

Совершая обратное преобразование, имеем

$$a(Z,\ X)=a_0\left[\Phi\left(\frac{\sqrt{i}\,|X|}{2\sqrt{Z}}\right)-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{3}e^{-i\varkappa_n|X|+i\Gamma_n Z}\left(1-\Phi\left(\frac{\sqrt{i}\,|X|}{2\sqrt{Z}}-\varkappa_n\sqrt{iZ}\right)\right)\right], \quad (40)$$

где величины $\varkappa_n$ и Γ_n определяются соотношениями (26), (27).

При $Z\to\infty$ из (39) получаем

$$a(Z,\ X)=-\frac{2a_0}{3}\,e^{-i\varkappa_1|X|+i\Gamma_1 Z}. \quad (41)$$

Сделаем оценку инкремента и масштаба поперечной локализации поля. Пусть погонная плотность тока пучка $I_0=1$ кА/см, энергия электронов $\mathscr{E}_0=2$ МэВ ($\gamma_0=5$), период ондулятора $d=3$ см, отношение скорости осцилляций электронов в поле ондулятора к скорости света $\alpha_u=1/5$, длина волны излучения $\lambda=0.12$ см. При таких значениях параметров $C=0.85\cdot 10^{-2}$, $q^2=0.5$ и в пренебрежении влиянием пространственного заряда $|\,\mathrm{Im}\,\Gamma_5\,|=0.42$ см$^{-1}$, $|\,\mathrm{Im}\,\varkappa_5\,|=3.9$ см$^{-1}$. Например, на расстоянии 1.5 см от пучка напряженность поля спадает (по отношению к напряженности на оси) в e^6 раз. Для транспортировки электронного пучка через пространство взаимодействия может быть необходимо наличие металлических плоскостей, компенсирующих пространственный заряд пучка. Очевидно, установка таких плоскостей на расстоянии r от пучка, превышающем 1.5 см, существенно не скажется на характере процесса излучения. Заметим также, что инкремент возбуждения электронным пучком с описанными выше параметрами собственной объемной моды образованного металлическими плоскостями полоскового волновода $\mathrm{Im}\,\Gamma=\sqrt{3}/2\ \omega_s/c\ (1/8\pi\ eI_0/mc^3\ \lambda^2/r\ \alpha_u^2/\gamma_0^3)^{1/3}=0.07$ см$^{-1}$ будет заметно ниже, чем инкремент возбуждения локализованной (квазиповерхностной) моды.

Рассмотрим в заключение вопрос о применимости полученных результатов к слою электронов конечной ширины b. Для волн в таком слое из уравнений (10), (11), представляя их решение в виде $e^{i\omega_s/ck\Gamma' z}$, получим дисперсионное уравнение (ср. [19])

$$\mathrm{tg}\,fB=i\varkappa'/f, \quad (42)$$

где $f=\sqrt{\Gamma'-c^2h_c^2\alpha_u^2\omega_{b\parallel}^2/8\omega_s^4\,(\Delta+\Gamma')^2\,\beta_{\parallel 0}^2}$, $\varkappa'=\sqrt{\Gamma}$ — поперечные волновые числа внутри и вне слоя; $B=\omega_s/c\ b\,\sqrt{2}$; $\omega_{b\parallel}^2=\bar{\omega}_{b\parallel}^2/b$.

Из (42) следует дисперсионное уравнение для тонкого слоя (20) при выполнении условия $|\,fB\,|\simeq|\,\varkappa'/f\,|\ll 1$. Это условие с учетом соотношений (16), (22) можно представить в виде

$$B\ll\left(\frac{\omega_s^2\beta_{\parallel 0}}{\omega_{b\parallel}\alpha_u h_c c}\right)^{1/3} \quad \text{или} \quad \frac{b^2}{L\lambda}\ll 1, \quad (43)$$

где $L\sim\frac{c}{\omega_s}|\,\mathrm{Im}\,\Gamma'\,|^{-1}$ — характерная длина области усиления.

Для рассмотренного выше примера $L \sim 2.5$ см и $b \ll 0.5$ см.

Авторы признательны Н. А. Завольскому, Н. Ф. Ковалеву и М. И. Петелину за полезные обсуждения.

Приложение

На основе системы уравнений (14), (15) рассмотрим дифракцию на электронном пучке произвольного начального распределения поля $a_0(X)$. Первоначально получим интегральное представление решения неоднородного параболического уравнения (14). С этой целью произведем преобразование Фурье по поперечной координате X

$$a_\varkappa = \mathscr{F}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varkappa X} a(X, Z)\, dX,$$

$$a(X, Z) = \mathscr{F}^{-1}(a_\varkappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\varkappa X} a_\varkappa d\varkappa. \tag{П. 1}$$

Для образа Фурье из исходного уравнения (14) имеем

$$-i\varkappa^2 a_\varkappa + \frac{da_\varkappa}{dZ} = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma \tag{П. 2}$$

или

$$a_\varkappa = a_{0\varkappa} e^{i\varkappa^2 Z} + i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^Z e^{i\varkappa^2 (Z-Z')} \sigma(Z')\, dZ'. \tag{П. 3}$$

Совершая обратное преобразование Фурье, используя теорему о свертке и соотношение

$$\mathscr{F}^{-1}(e^{i\varkappa^2 Z}) = \frac{1+i}{2\sqrt{Z}}\, e^{-iX^2/4Z},$$

получим

$$a(Z, X) = \frac{\sqrt{i}}{2\sqrt{\pi Z}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a_0(X-Y)\, e^{-iY^2/4Z} dY - \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int\limits_0^Z \frac{\sigma(Z')\, e^{\frac{-iX^2}{4(Z-Z')}}}{\sqrt{Z-Z'}}\, dZ'. \tag{П. 4}$$

Находя из (П. 4) значение поля в плоскости пучка ($X=0$) и подставляя его в уравнение для возмущений плотности пучка (15), приходим к интегрально-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial Z^2} = -\frac{\sqrt{i}}{2\sqrt{\pi Z}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a_0(-Y)\, e^{-iY^2/4Z} dY + \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int\limits_0^Z \frac{\sigma(Z')}{\sqrt{Z-Z'}}\, dZ'. \tag{П. 5}$$

Решение (П 5) может быть найдено с помощью преобразования Лапласа по координате Z. Используя теорему о свертке и соотношение

$$L\left(\frac{e^{-iY^2/4Z}}{\sqrt{Z}}\right) = \sqrt{\pi/p}\, e^{-\sqrt{ip}Y},$$

из (П. 5) получим

$$p^2 \sigma_p = -\frac{\sqrt{i}}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{a_0(-Y)\, e^{-\sqrt{ip}\,|Y|} dY}{\sqrt{p}} + \frac{\sigma_p}{\sqrt{ip}} \tag{П. 6}$$

или

$$\sigma_p = -\frac{i}{2}\, \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} a_0(-Y)\, e^{-\sqrt{ip}\,|Y|} dY}{\sqrt{i}\, p^{5/2} - 1}. \tag{П. 7}$$

Соответственно для образа Лапласа поля из (П. 4) с учетом (П. 7) имеем

$$a_p = \frac{\sqrt{i}}{2\sqrt{p}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a_0(X-Y)\, e^{-\sqrt{ip}|Y|} dY + \frac{\sqrt{i}}{2\sqrt{p}\,(\sqrt{i}\, p^{5/2}-1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a_0(-Y)\, e^{-\sqrt{ip}\,(|X|+|Y|)}\, dY.$$

Производя обратное преобразование Лапласа, используя при этом разложение (33), получим

$$a(Z,\ X) = \frac{\sqrt{i}}{2\sqrt{\pi Z}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a_0(X-Y)\, e^{-iY^2/4Z} dY +$$

$$+ \frac{i}{10} \sum_{n=1}^{5} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varkappa_n a_0(-Y)\, e^{-i\varkappa_n(|X|+|Y|)+i\Gamma_n Z}\, \mathrm{erfc}\left(\frac{\sqrt{i}}{2\sqrt{Z}}(|X|+|Y|) - \varkappa_n \sqrt{iZ}\right) dY, \quad (\text{П. } 8)$$

где $\mathrm{erfc}\, u = 1 - \Phi(u)$.

Как нетрудно видеть, при $a_0 = \mathrm{const}$ выражение (П. 8) переходит в (34).

Литература

[1] *Ковалев Н. Ф., Петелин М. И.* // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, 1981. Вып. 2. С. 63—100.
[2] *Кондратенко А. М., Салдин Е. Л.* // ЖТФ. 1981. Т. 51. Вып. 8. С. 1633—1642.
[3] *Tang C. M., Sprangle P.* // Phys. Quant. Electron. 1982. Vol. 9. P. 627—651.
[4] *Prosnits D., Haass R. A., Doss S. Gelinas R.* // Phys. Quant. Electron. 1982. Vol. 9. P. 1047—1069.
[5] *Ginzburg N. S.* // Opt. Commun. 1982. Vol. 43. N 3. P. 203—206.
[6] *Ginzburg N. S., Kovalev N. F., Rusov N. Yu.* // Opt. Commun. 1983. Vol. 46. N 5, 6. P. 300—304.
[7] *Канавец В. И., Корженевский А. В., Черепенин В. А.* // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 3. С. 541—550.
[8] *Канавец В. И., Корженевский А. В., Черепенин В. А.* // РиЭ. 1985. Т. 30. № 11. С. 2202—2211.
[9] *Scharlemann E. T., Sessler A. M., Wurtele J. S.* // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 54. N 17. P. 1925—1929.
[10] *Moore G. T.* // Nucl. Instr. and Meth. Phys. Res. 1986. N 250. P. 381—388.
[11] *La Sala J. E., Deacon D. A. G., Scharlemann E. T.* // Nucl. Instr. and Meth. Phys. Res. Vol. 54. N 17. P. 389—395.
[12] *Amir A., Greenzwey Y.* // Nucl. Instr. and Meth. Phys. Res. Vol. 54. N 17, P. 404—412.
[13] *Luchine P., Solimeno Y.* // Nucl. Instr. and Meth. Phys. Res. Vol. 54. N 17. P. 413—417.
[14] *McVey B. D.* // Nucl. Instr. and Meth. Phys. Res. Vol. 54. N 17. P. 449—455.
[15] *Гинзбург Н. С., Ковалев Н. Ф.* // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. Вып. 5. С. 234—238.
[16] *Ковалев Н. Ф.* и др. // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, 1979. Вып. 1. С. 76—113.
[17] *Гинзбург Н. С., Новожилова Ю. В.* // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 9. С. 1681—1689.
[18] *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука. 1969. Т. 1. 344 с.
[19] *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1957. 581 с.

Институт прикладной физики
АН СССР
Горький

Поступило в Редакцию
17 февраля 1988 г.