01

ОБ ИЗМЕНЕНИИ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ИЛИ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА ПРИ МГНОВЕННОМ СНЯТИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

А. С. Зильберглейт

Рассматриваются степенные моменты $M_k(t)$ изменения прогиба поверхности $w(r, t)$ упругого (вязкоупругого) полупространства

$$M_k(t) = 2\pi \int_0^\infty w(r, t)\, r^k dr, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(при $k=0$ и 1 имеем изменение поверхности и объема чаши прогиба соответственно). В отсутствие диссипации найдены явно $M_{2m+1}(t)$ $(m=0, 1, 2, \ldots)$ в виде нечетных полиномов от t степени $(2m+1)$, установлена асимптотика $M_k(t) \backsim a_k t$ для малых времен. Результаты распространены на случай произвольного изотропного вязкоупругого тела.

1. Пусть полупространство $z > 0$ (r, θ, z — цилиндрические координаты) занято линейно-упругой средой с плотностью ρ, модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν. К поверхности $z=0$ приложена нормальная статическая нагрузка

$$\sigma_z^0(r, 0) = -\sigma_0(r) = -Gf(r), \quad f(r) = 0, \quad r > a, \tag{1.1}$$

создающая в полупространстве смещение $\mathbf{u}^0(r, z)$, прогиб поверхности $u_z^0(r, 0) = w_0(r)$.

Пусть в момент времени $t=0$ нагрузка внезапно снимается и начинается нестационарный процесс изменения деформированного состояния, в частности восстановление плоской формы поверхности. Представив искомый вектор перемещений $\mathbf{v}(r, z, t)$ в виде статической части и нестационарной добавки

$$\mathbf{v}(r, z, t) = \mathbf{u}^0(r, z) - \mathbf{u}(r, z, t), \tag{1.2}$$

получаем, что $\mathbf{u}(r, z, t)$ удовлетворяет при $z > 0$ однородным уравнениям движения, нулевым начальным условиям и следующим условиям на границе:

$$\sigma_{zr}(r, 0, t) = 0; \quad \sigma_z(r, 0, t) = -\sigma_0(r), \quad r \geqslant 0, \quad t > 0. \tag{1.3}$$

Естественным методом решения сформулированной задачи является использование интегральных преобразований Лапласа по времени (параметр преобразования p) и Ханкеля по радиальной переменной (параметр λ) (см., например, [1, 2]). Представляя ненулевые компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}$

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\psi) \tag{1.4}$$

через потенциалы $\varphi(r, z, t)$ и $\psi(r, z, t)$, удовлетворяющие волновым уравнениям, для изображений по Лапласу $\bar{\varphi}(r, z, p)$ и $\bar{\psi}(r, z, p)$ с учетом начальных условий имеем

$$\Delta\bar{\varphi} - \frac{p^2}{c_1^2}\bar{\varphi} = 0, \quad \Delta\bar{\psi} - \left(\frac{p^2}{c_2^2} + \frac{1}{r^2}\right)\bar{\psi} = 0, \tag{1.5}$$

где $0 < c_2 < c_1$ — скорости объемных упругих волн. Эти уравнения вместе с условиями при $z \to +\infty$ выполняются, коль скоро

$$\bar{\varphi}(r, z, p) = \int_0^\infty \bar{\varphi}^*(\lambda, z, p) J_0(\lambda r)\lambda d\lambda,$$

$$\bar{\psi}(r, z, p) = \int_0^\infty \bar{\psi}^*(\lambda, z, p) J_1(\lambda r)\lambda d\lambda,$$

$$\bar{\varphi}^*(\lambda, z, p) = A_1(\lambda, p)e^{-\gamma_1 z}, \quad \bar{\psi}^*(\lambda, z, p) = A_2(\lambda, p)e^{-\gamma_2 z}, \tag{1.6}$$

причем

$$\gamma_i = \gamma_i(\lambda, p) = \sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{c_i^2}}, \quad \operatorname{Re}\gamma_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \tag{1.7}$$

где $J_s(\xi)$ — функции Бесселя.

Коэффициенты $A_i(\lambda, p)$, а вслед за ними и двойные изображения всех перемещений и напряжений определяются из дважды преобразованных граничных условий (1.3). В частности, если $w(r, t) = u_z(r, 0, t)$ — разность между мгновенным и начальным статическими прогибами поверхности и

$$\bar{w}^*(\lambda, p) = \int_0^\infty \bar{w}(r, p) J_0(\lambda r) r dr = \int_0^\infty J_0(\lambda r) r dr \int_0^\infty e^{-pt} w(r, t) dt, \tag{1.8}$$

то

$$\bar{w}^*(\lambda, p) = \frac{(\gamma_2^2 - \lambda^2)\gamma_1}{p\mathscr{R}} \frac{\sigma_0^*(\lambda)}{G} = \frac{p\gamma_1}{c_2^2\mathscr{R}} f^*(\lambda). \tag{1.9}$$

Здесь

$$\mathscr{R}(\lambda, p) = (\lambda^2 + \gamma_2^2)^2 - 4\lambda^2\gamma_1\gamma_2 = \left(2\lambda^2 + \frac{p^2}{c_2^2}\right)^2 - 4\lambda^2\gamma_1\gamma_2 \tag{1.10}$$

— известный знаменатель Рэлея,

$$\sigma_0^*(\lambda) = \int_0^\infty \sigma_0(r) J_0(\lambda r) r dr = G\int_0^a f(r) J_0(\lambda r) r dr = Gf^*(\lambda). \tag{1.11}$$

Заметим, что из (1. 11) и разложения функции Бесселя в ряд следует равенство

$$f^*(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty f_k \lambda^{2k}, \quad f_k = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}\int_0^a f(r) r^{2k+1} dr. \tag{1.12}$$

2. Приведенное решение является по существу стандартным; трудность же заключается в том, что кажущийся простым вид двойных изображений искомых величин, в частности (1. 9), практически исключает явное аналитическое вычисление оригиналов. Весьма непростым оказывается даже отыскание различных асимптотик (дальнее поле, малые или большие времена) и проведение численных расчетов, поскольку речь идет о двойных несобственных интегралах, один из которых берется по контуру в комплексной плоскости (интеграл Римана—Меллина, обращающий преобразование Лапласа). Все это отражает реальную сложность [1-3] физической картины возбуждаемого на границе бес-

конечного набора отдельных волн, формирующих в целом нестационарный процесс.

Ввиду сказанного представляется заманчивым отыскание достаточно простых аналитических формул для тех или иных величин, относящихся к данной (или подобной) задаче и имеющих практический интерес. Цель данной работы состоит в получении такого рода выражений, описывающих изменение формы поверхности, и распространении результатов на случай вязкоупругого тела.

Введем степенные моменты $M_k(t)$ функции $w(r, t)$ изменения прогиба поверхности согласно равенствам

$$M_k(t) = 2\pi \int_0^\infty w(r, t)\, r^k dr, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.1}$$

Эти величины существуют, поскольку в силу конечности скорости распространения упругих волн для любого $t > 0$ заведомо $w(r, t) = 0$ при $r > a + c_1 t$. Для $k=0, 1$

$$M_0 = \delta S(t), \quad M_1 = \delta V(t),$$

где $\delta S(t)$ и $\delta V(t)$ — изменения площади поверхности и объема чаши прогиба за время t (площадь и объем в каждый момент времени бесконечны).

Покажем, что любой нечетный момент $M_{2m+1}(t)$ $(m=0, 1, 2, \ldots)$ может быть найден без отыскания функции $w(r, t)$ и представляет собой нечетный многочлен степени $2m+1$ относительно t. Начнем со случая $m=0$. Из (1. 8), (1. 9) имеем

$$\bar{w}^*(\lambda, p) = \frac{p\gamma_1(\lambda, p)}{c_2^2 \mathscr{R}(\lambda, p)} f^*(\lambda) = \int_0^\infty \bar{w}(r, p)\, J_0(\lambda r)\, r dr. \tag{2.2}$$

Полагая здесь $\lambda = 0$ и принимая во внимание (1. 10) и (2. 1), получаем

$$\overline{\delta V(p)} = \overline{M_1}(p) = 2\pi \int_0^\infty \bar{w}(r, p)\, r dr = 2\pi \frac{c_2^2}{c_1 p^2} f^*(0)$$

или после обращения преобразования Лапласа с учетом (1. 12), (1. 1)

$$\delta V(t) = M_1(t) = 2\pi f_0 \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 c_1 t = \frac{F}{G}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 c_1 t, \tag{2.3}$$

где F — результирующая сила, приложенная к полупространству при $t < 0$.

Итак, объем чаши прогиба меняется линейно со временем.

Для получения $M_{2m+1}(t)$ применим к обеим частям (2. 2) операцию

$$\left(\frac{d}{\lambda d\lambda}\right)^m = 2^m \frac{d^m}{d(\lambda^2)^m},$$

используя известные формулы повторного дифференцирования бесселевых функций ([4], с. 133), найдем

$$\frac{d^m \bar{w}^*(\lambda, p)}{d(\lambda^2)^m} = \frac{(-1)^m}{2^m} \int_0^\infty \bar{w}(r, p) \frac{J_m(\lambda r)}{\lambda^m} r^{m+1} dr. \tag{2.4}$$

Устремляя $\lambda \to 0$ согласно (2. 1) и равенству

$$J_m(\xi) \backsim 2^{-m}(m!)^{-1}\xi^m, \quad \xi \to 0,$$

получаем

$$\overline{M}_{2m+1}(p) = 2\pi(-1)^m 2^{2m} m! \left.\frac{d^m \bar{w}^*(\lambda, p)}{d(\lambda^2)^m}\right|_{\lambda=0}. \tag{2.5}$$

Стоящая здесь справа величина вычисляется с помощью (1. 9), (1. 10) и (1. 12), что приводит к соотношениям $(m = 0, 1, 2, \ldots)$

$$\bar{M}_{2m+1}(p) = 2\pi(-1)^m 2^{2m}(m!)^2 \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{m} f_{m-k} T_k \left(\frac{c_2}{p}\right)^{2k+1},$$

$$T_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)_n}{n!} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{2n-1} Q_{k-n}, \tag{2.6}$$

где $(\xi)_0 = 1$, $(\xi)_n = \xi(\xi+1)\ldots(\xi+n-1)$, $n \geqslant 1$, а безразмерные коэффициенты Q_i определяются рекуррентными формулами

$$Q_0 = 1,$$

$$Q_i = 4\sum_{j=1}^{i} (-1)^j Q_{i-j} \sum_{s=0}^{i} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_s \left(-\frac{1}{2}\right)_{j-s}}{s!\,(j-s)!} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{2s-1}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.7}$$

Обращая (2. 6), приходим к окончательному результату

$$M_{2m+1}(t) = 2\pi(-1)^m 2^{2m}(m!)^2 \sum_{k=0}^{m} \frac{f_{m-k} T_k}{(2k+1)!} (c_2 t)^{2k+1}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.8}$$

из которого, в частности, следует (2. 3) при $m=0$.

3. Величины $\bar{M}_{2m}(p)$ тоже выражаются через $\bar{w}^*(\lambda, p)$. Однако в отличие от (2. 5) эта связь оказывается нелокальной и не приводит к замкнутым выражениям для $M_{2m}(t)$ ($m=0, 1, 2, \ldots$). Этого и следовало ожидать, так как в противном случае $w(r, t)$ можно было бы выразить через $M_k(t)$ ($k=0, 1, 2, \ldots$) по известным формулам классической проблемы моментов (см. [5] и литературу в ней) вопреки сказанному в разделе 2.

Выражение $\bar{M}_{2m}(p)$ получается с помощью известного равенства ([4], с. 183)

$$\int_0^\infty \frac{J_m(\xi)}{\xi^m} d\xi = \frac{1}{2^m \left(\frac{1}{2}\right)_m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

путем интегрирования обеих частей (2. 4) по λ

$$\bar{M}_{2m}(p) = 2\pi(-1)^m 2^{2m} \left(\frac{1}{2}\right)_m \int_0^\infty \frac{d^m \bar{w}^*(\lambda, p)}{d(\lambda^2)^m} d\lambda. \tag{3.2}$$

Из приведенных формул можно вывести главный член асимптотики $M_{2m}(t)$ при малых временах. Из (1. 9), (1. 10) следует

$$\frac{d^m \bar{w}^*(\lambda, p)}{d(\lambda^2)^m} \backsim \frac{c_2^2}{c_1 p^2} \frac{d^m f^*(\lambda)}{d(\lambda^2)^m}, \quad p \to \infty. \tag{3.3}$$

Подобно (2. 4) из (1. 11) находим

$$\frac{d^m f^*(\lambda)}{d(\lambda^2)^m} = \frac{(-1)^m}{2^m} \int_0^a f(r) \frac{J_m(\lambda r)}{\lambda^m} r^{m+1} dr,$$

так что в силу (3. 1)

$$\int_0^\infty \frac{d^m f^*(\lambda)}{d(\lambda^2)^m} d\lambda = \frac{(-1)^m}{2^{2m}\left(\frac{1}{2}\right)_m} \int_0^a f(r) r^{2m} dr \equiv \frac{(-1)^m}{2^{2m}\left(\frac{1}{2}\right)_m} g_m. \tag{3.4}$$

Внося (3. 3) в (3. 2) с учетом (3. 4), получаем

$$\bar{M}_{2m}(p) \backsim 2\pi g_m \frac{c_2^3}{c_1 p}, \quad p \to \infty. \tag{3.5}$$

Из (2. 8) и (3. 5) видно, что на начальной стадии процесса все моменты $M_k(t)$ растут пропорционально времени согласно общей формуле

$$M_k(t) \backsim 2\pi \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \int_0^a f(r) r^k dr\, (c_1 t), \quad t \to 0, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots . \tag{3.6}$$

4. Полученные результаты полностью переносятся на случай произвольной изотропной вязкоупругой среды, которую будем характеризовать с помощью функций $K_{1,2}(p)$, заменяющих $p^2/c_{1,2}^2$ в уравнениях (1.5) для лапласовских трансформант

$$\Delta\bar{\varphi} - K_1(p)\bar{\varphi} = 0, \quad \Delta\bar{\psi} - \left[K_2(p) + \frac{1}{r^2}\right]\bar{\psi} = 0. \tag{4.1}$$

Соответственно всюду в решении под $\gamma_i(\lambda, p)$ следует теперь понимать выражения

$$\gamma_i(\lambda,\ p) = \sqrt{K_i(p) + \lambda^2}, \quad \operatorname{Re}\gamma_i \geqslant 0, \quad i = 1,\ 2, \tag{4.2}$$

так что, в частности,

$$\bar{w}^*(\lambda,\ p) = \frac{K_2(p)\,\gamma_1(\lambda,\ p)}{p\mathscr{R}(\lambda,\ p)} f^*(\lambda), \tag{4.3}$$

где $\mathscr{R}(\lambda, p)$ дается первым из выражений (1. 10) с учетом (4. 2). Поэтому буквальное повторение предыдущих рассуждений приводит к формулам для $\bar{M}_{2m+1}(p)$, аналогичным (2. 6), (2. 7) $(m = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$

$$\bar{M}_{2m+1}(p) = 2\pi(-1)^m 2^{2m}(m\,!)^2 \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{m} \frac{f_{m-k} T_k(p)}{[K_2(p)]^{k+1/2}},$$

$$T_k(p) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)_n}{n\,!} Q_{k-n}(p) \left[\frac{K_2(p)}{K_1(p)}\right]^{n-1/2},$$

$$Q_i(p) = 4\sum_{j=1}^{i} (-1)^j Q_{i-j}(p) \sum_{s=0}^{j} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_s \left(-\frac{1}{2}\right)_{j-s}}{s\,!\,(j-s)\,!} \left[\frac{K_2(p)}{K_1(p)}\right]^{s-1/2},$$

$$i = 1,\ 2, \ldots, \quad Q_0 = 1. \tag{4.4}$$

Общее выражение (3. 2) для $\bar{M}_{2m}(p)$ сохраняет свой вид, а асимптотика (3. 5) записывается в форме

$$\bar{M}_{2m}(p) \backsim 2\pi g_m 2^m \sqrt{\frac{K_1(p)}{K_2(p)}}, \quad p \to \infty, \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{4.5}$$

при условии, что $K_i(p) \to \infty$; $i = 1,\ 2$; $\sqrt{K_1(p)}/K_2(p) \to 0$, когда $p \to \infty$ (g_m определено в (3. 4)).

Подчеркнем, что здесь по-прежнему предполагался справедливым закон Гука с возможной заменой упругих модулей на лапласовские свертки по времени и добавлением линейных по скорости диссипативных слагаемых в уравнения движения. В случае же, когда в тензор напряжений добавляются, например, линейные функции от тензора скоростей деформаций, изменяется, помимо (4. 1) и (4. 2), и вид знаменателя $\mathscr{R}(\lambda, p)$, так что формулы (4. 4)—(4. 5) перестают быть верными. Однако общие результаты (2. 5), (3. 2) справедливы всегда, получение явных формул типа (4. 4), (4. 5) может доставлять лишь технические трудности.

5. В заключение рассмотрим простейший пример вязкоупругой среды с внутренним трением, пропорциональным скорости (слагаемое $\mu\ \partial u/\partial t$ в уравнениях движения). Здесь

$$K_i(p)=\frac{p^2}{c_i^2}+\mu p, \quad i=1,\ 2; \quad \frac{K_2(p)}{K_1(p)}=\frac{p+c_2^2\mu}{p+c_1^2\mu}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2. \tag{5.1}$$

Выражения (4. 4) допускают явное обращение в виде интегралов типа свертки от модифицированных функций Бесселя. Эти формулы очень громоздки, поэтому рассмотрим лишь поведение $M_k(t)$ на малых и $M_{2m+1}(t)$ на больших временах.

При $p\to\infty$ $K_i(p)\backsim p^2/c_i^2$, поэтому поведение на малых временах такое же, как и в отсутствие трения,[1] и дается равенством (3. 6). Промежуток пригодности (3. 6) при $\nu>0$ определяется неравенством

$$t\ll 4\mu^{-1}(c_1^2-2c_2^2)^{-1}, \tag{5.2}$$

а при нулевом коэффициенте Пуассона еще увеличивается.

При малых же значениях p

$$K_i(p)\backsim\mu p, \quad i=1,\ 2; \quad \frac{K_2(p)}{K_1(p)}\backsim 1, \quad p\to 0, \tag{5.3}$$

и влияние вязкости на больших временах доминирует. Таким образом, из (4. 4), (5. 3) следует

$$M_{2m+1}(t)\backsim\frac{(-1)^m\,2^{m+1}\,(m\,!)^2}{\sqrt{\pi}\left(\frac{3}{2}\right)_m}\,T_m(0)\,\frac{F}{G}\left(\frac{t}{\mu}\right)^{m+1/2}, \quad t\to+\infty \tag{5.4}$$

вместо $M_{2m+1}(t)\backsim a_{2m+1}t^{2m+1}$, вытекающего из (2. 8). Благодаря диссипации рост $M_k(t)$ существенно замедляется. При $m=0$ для изменения объема имеем

$$M_1(t)=\delta V(t)\backsim\frac{2F}{G}\sqrt{\frac{t}{\pi\mu}}, \quad t\to\infty \tag{5.5}$$

вместо (2. 3). Асимптотические формулы (5. 4), (5. 5) работают на временах

$$t\gg\frac{1}{2c_1^2\mu}\left(1-\frac{c_2^2}{2c_1^2}\right).$$

Литература

[1] *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 337 с.
[2] *Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids. Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1976. 425 p.
[3] *Гринченко В. Т.*, *Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
[4] *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Наука, 1963. 358 с.
[5] *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М., МФМЛ, 1961. 310 с.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР
Ленинград

Поступило в Редакцию
16 апреля 1988 г.

---

[1] Этот результат вполне понятен из физических соображений.