

01; 03

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ МОДУЛЯЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН, ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ ОДНОРОДНЫМ ПОЛЕМ

А. Б. Езерский, В. Г. Шехов

Теоретически и экспериментально изучены модуляционные неустойчивости в системе волн, параметрически возбуждаемых на поверхности жидкости переменным во времени полем силы тяжести. Показано, что типичными (по ориентации и величине волнового вектора возмущений) являются три вида модуляции: продольная, поперечная и пространственно-однородная.

Экспериментально изучены пространственные спектры в системе двух взаимно перпендикулярных пар встречных капиллярных волн. Обнаружено, что в такой системе переход к турбулентности осуществляется через развитие поперечной модуляции в каждой из возбужденных пар.

Изучение параметрической генерации волн однородными осциллирующими полями интересно для различных областей физики: генерации ленгмюровских волн в плазме, спиновых волн в ферромагнетике, поверхностных волн в жидкости [1-4]. К настоящему времени имеется много работ, которые в основном посвящены определению порога генерации и нахождению амплитуд стационарных колебаний в различных физических системах [5].

В последнее время параметрическое возбуждение волн на поверхности жидкости в переменном поле силы тяжести (наиболее наглядное среди упомянутых и давно исследуемое явление) изучается с целью определения путей перехода к турбулентности в системе взаимодействующих волн. В работах [6, 7] было установлено, что переход от регулярного режима к стохастическому происходит через последовательное развитие пространственно-временных модуляций. Однако в известных нам работах такие режимы исследованы лишь в отдельных случаях и не проводилось детального изучения всех возможных типов модуляции для различных частот накачки. В связи с этим в настоящей работе теоретически и частично экспериментально проведена классификация режимов с модуляцией. Особое внимание уделяется механизмам ее возникновения, зависимости типа возникающей модуляции от частоты и амплитуды внешнего поля. Этому посвящена первая часть работы. Далее в работе детально изучаются пространственные характеристики параметрически возбуждаемых капиллярных волн. Подчеркнем, что обычно ограничивались измерением временных характеристик возбуждаемых полей в одной или нескольких фиксированных точках, а пространственная структура изучалась лишь при возбуждении низкочастотных линейных мод резонаторов [8-14]. Эволюция же пространственной структуры полей в том случае, когда длина возбуждаемой волны значительно меньше длины резонатора, а волновое поле нельзя представить как суперпозицию линейных мод, не исследовалась. Такие задачи важны для определения сценария перехода к хаотическому режиму и обоснования моделей турбулентности при возбуждении волн в плазме, ферромагнетиках, океане и т. д. Непосредственное измерение пространственного распределения полей в таких средах представляет значительные трудности. Между тем при параметрическом возбуждении капиллярных волн однородным полем есть возможность применить

известные методы обработки фотоизображений двумерных гидродинамических полей и выяснить последовательность перестроек структуры поля капиллярных волн, происходящих при увеличении амплитуды накачки. Эти вопросы обсуждаются в заключительной части статьи.

Анализ модуляционных неустойчивостей

При теоретическом расчете модуляционной неустойчивости примем, что длина волны модуляции значительно больше длины поверхностной волны. Будем исходить из уравнений, получающихся во втором порядке по теории возмущений для медленно меняющихся амплитуд смещения поверхности η_{\pm}

$$\eta_+ = \frac{1}{2} A_+(x, y, t) e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} + \text{к. с.},$$

$$\eta_- = \frac{1}{2} A_-(x, y, t) e^{i(\omega_0 t + k_0 x)} + \text{к. с.}$$

С учетом нелинейных и дисперсионных членов получаем уравнения

$$\frac{\partial A_{\pm}}{\partial t} \pm v_{\text{гp}} \frac{\partial A_{\pm}}{\partial x} + \frac{i}{2} \left(\omega''_{kk} \frac{\partial^2 A_{\pm}}{\partial x^2} + \frac{v_{\text{гp}}}{k_0} \frac{\partial^2 A_{\pm}}{\partial y^2} \right) + \gamma A_{\pm} =$$

$$= i h A_{\mp}^* + i A_{\pm} \left(\omega_0 - \frac{\omega_p^2}{2} + T |A_{\pm}|^2 + 2S |A_{\mp}|^2 \right). \quad (1)$$

Здесь $\omega_0 = \sqrt{gk + \sigma/\rho k^3}$; g — ускорение свободного падения; σ — коэффициент поверхностного натяжения; ρ — плотность жидкости; $v_{\text{гp}} = \partial\omega/\partial k$ — групповая скорость; γ — затухание волны; ω_p — частота внешнего поля; T, S — коэффициенты взаимодействия, полученные в [15]

$$T = k^2 \omega_0(k) \left(\frac{1}{2} \frac{\omega_0^2(k)}{4\omega_0^2(k) - \omega_0^2(2k)} + \frac{1}{4} - \frac{3}{16} \frac{ak^3}{\omega_0^2(k)} \right),$$

$$S = k^2 \omega_0(k) \left(-\frac{1}{2} \frac{\omega_0^2(k)}{\omega_0^2(2k)} - \frac{1}{16} - \frac{3}{16} \frac{ak^3}{\omega_0^2(k)} \right),$$

где $h = a_0/(4\omega_0(k)/k)$, a_0 — амплитуда ускорения вибраций поверхности
Стационарное пространственно однородное решение уравнений (1) имеет вид

$$A_+ = A_- = A_0 e^{i\psi/2}, \quad \sin \psi = \gamma/h, \quad A_0^2_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{h^2 - \gamma^2} - \Delta}{T + 2S}. \quad (2)$$

Отметим, что режим с амплитудой A_1 неустойчив при $T + 2S < 0$, а с амплитудой A_2 — неустойчив при $T + 2S > 0$, что приводит к гистерезису в зависимости амплитуды возбуждаемых волн от амплитуды накачки. Расстройка Δ определяется разностью $\Delta = \omega_0(k) - \omega_p/2$, $\omega_0(k)$ — собственная частота резонатора. Если добротность резонатора мала, то Δ определяется граничными условиями [7, 8].

Пространственно-временная модуляция в системе пары встречных волн возникает вследствие распадной неустойчивости вида

$$\omega_{k_0} + \omega_{k_0} = \omega_{k_0+k_1} + \omega_{k_0-k_1}, \quad (3)$$

$$\omega_{k_0} + \omega_{-k_0} = \omega_{k_0+k_1} + \omega_{-k_0-k_1}. \quad (4)$$

Множество решений уравнения (3), (4) образует на плоскости резонансные кривые (рис. 1) (расчет был проведен для волн на поверхности воды). Уравнение (3) не имеет решений при $k_0 > 2.4$ (1/см), что соответствует частоте $f_p > > 18.5$ Гц. В этом случае распад может происходить за счет того, что расстройка компенсируется нелинейностью среды.

Исследуем устойчивость стационарных режимов (2) к малым возмущениям

$$A_{\pm} = A_0 e^{i\psi} + a_{\pm} e^{i(\nu t + x + y)}.$$

Соотношение, связывающее ν , κ , q , κ , q , получаясь из линейризованной системы (1) и представляет биквадратное уравнение относительно ν (см. Приложение 1).

Характерные области неустойчивости для волн на поверхности воды при различных частотах накачки приведены на рис. 2. В заштрихованных областях неустойчивость аperiодическая ($\text{Re } \nu \neq 0$), а в областях с двойной штриховкой — осцилляторная ($\text{Re } \nu \neq 0$ и скорость распространения волн огибающей $\text{Re } \nu / \kappa \simeq v_{\text{гp}}$). Поясним более подробно характерные особенности неустойчивости для различных участков спектра поверхностных волн.

Для гравитационных волн при частоте накачки $f_p < 10.8$ Гц модуляция возникает на масштабах $|k_1|$, удовлетворяющих (3) и (4). При фиксированной частоте f_p с изменением расстройки $\tilde{\Delta} = \Delta / \gamma$ происходит исчезновение как одной, так и другой областей, соответствующих неустойчивости (рис. 2). На рис. 2, а штриховой линией показаны участки резонансных кривых 1, 2 (см. рис. 1) для $|k_1| \ll k_0$, отвечающих четырехволновым процессам (3) и (4).

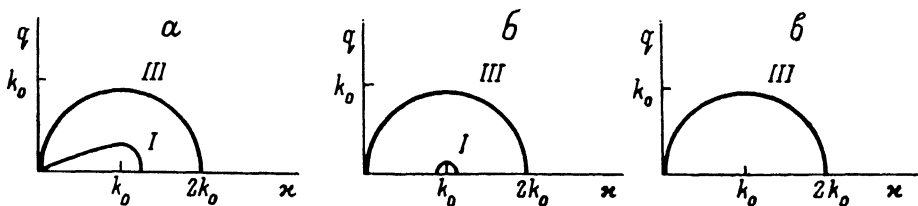


Рис. 1. Резонансные кривые, отвечающие условиям (3) (I) и (4) (II) при различных частотах накачки.

f_p , Гц: а — 7.8, б — 16, в — 19.8.

Для капиллярно-гравитационной волны при $10.8 < f_p < 19.2$ Гц неустойчивыми могут оказаться пространственно однородные возмущения. Такой эффект возникает лишь при определенном соотношении S и T : $S(2S+T) < 0$. Для капиллярных волн при $f_p > 19.2$ Гц характерно наличие преимущественно аperiодической неустойчивости. При этом максимальным инкрементом обладают поперечные возмущения. Осцилляторная неустойчивость в этой части спектра имеет ненулевой порог возникновения, который возрастает с ростом частоты.

Расчитанные здесь неустойчивости существенно отличаются от тех, что возможны в бегущей поверхностной волне [16]. Укажем для сравнения, что бегущая гравитационно-капиллярная волна устойчива к модуляции, а чисто гравитационные волны устойчивы к поперечной модуляции.

Экспериментальные исследования

Эксперименты проводились на двух установках. Гравитационные и гравитационно-капиллярные волны возбуждались при помощи вибростенда в узком канале (длиной 16 см, шириной 1.6 см), заполненном водопроводной водой, пропущенной через фильтр. С течением времени на поверхности воды образовывалась пленка, менялось поверхностное натяжение воды, что приводило к нестационарности возникающих режимов. Этот эффект был особенно заметен для капиллярных волн, поэтому при больших частотах использовалось силиконовое масло ($\sigma = 23$ дин/см, $\rho = 0.9$ г/см³, $\eta = 0.04$ г/см²с, η — динамическая вязкость). Благодаря смачиванию попадающих на поверхность частиц поверхностное натяжение силиконового масла относительно устойчиво. Возбуждение волн в такой жидкости проводилось в кювете, установленной на гибкой мембране, раскачиваемой электромагнитом.

Отклонение поверхности воды фиксировалось с помощью струнного датчика. Для этого использовалась натянутая вертикально нихромовая проволока диаметром 0.3 мм. Сопротивление участка струна—дно кюветы обратно пропорционально длине проволоки, находящейся под водой (в эксперименте использовалась недистиллированная вода, обладающая конечной проводимостью).

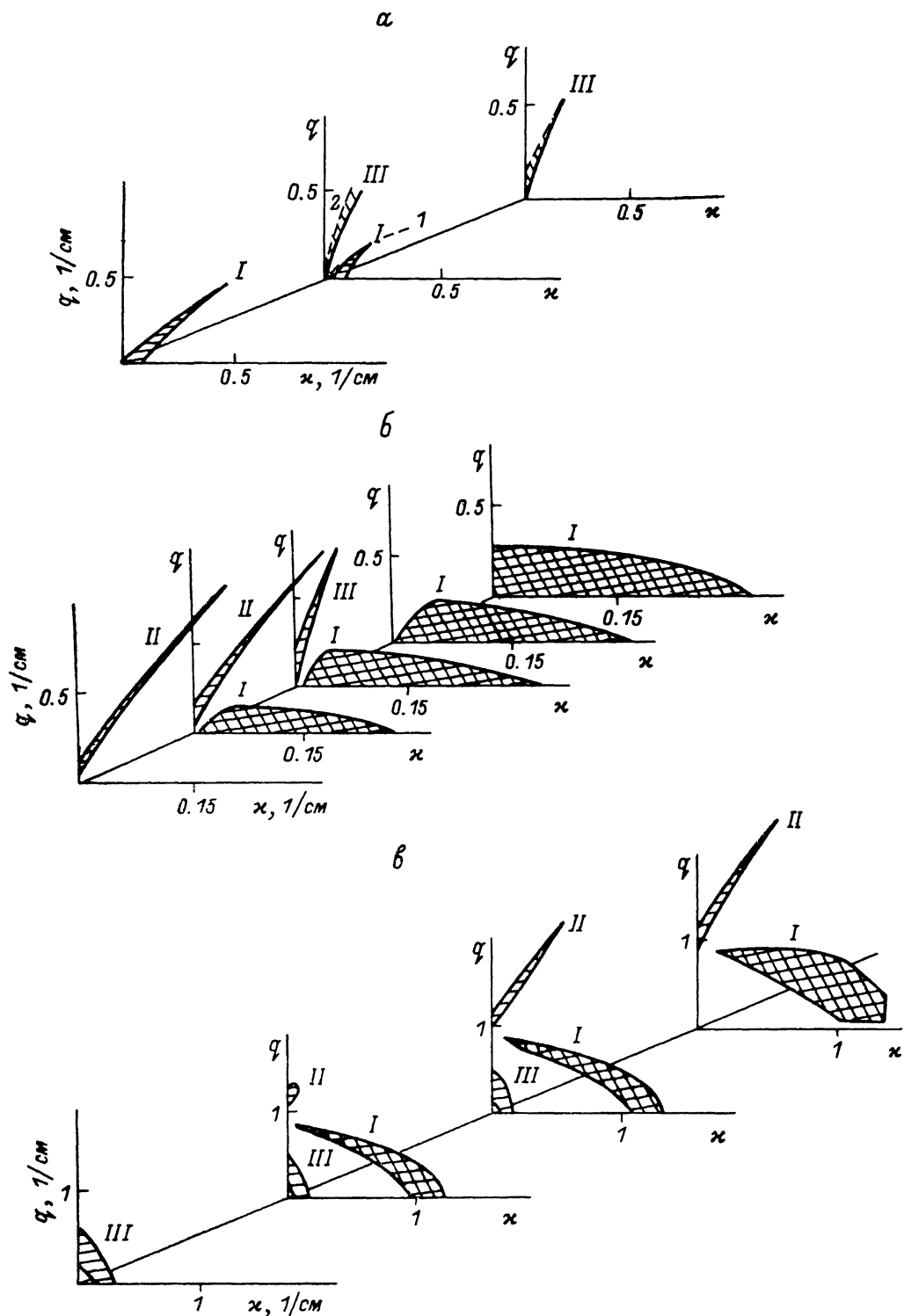


Рис. 2. Области неустойчивости для надкритичности $\bar{h}=1.8$ при различных частотах накачки и расстройках.

\bar{f} , Гц: *a* — 8, *б* — 16, *в* — 30. $\bar{\Delta}$: *a* — -0.65, -1.3, -1.6; *б* — -1.5, -2.3, -3, -3.8, -4.5; *в* — -1.5, 1, 2, 4.

Измеряя ток, текущий через жидкость при включении постоянного источника напряжения ~ 0.6 В, фиксировали смещение поверхности жидкости в точке. Для измерений с силиконовым маслом (диэлектриком) такой метод измерения не годился, поэтому проводилась обработка фотографий жидкости в отраженном свете.

Изложение результатов экспериментов начнем с описания пространственно однородной неустойчивости, возникающей в случае $S(2S+T) < 0$. Для волн на поверхности воды это условие выполняется для $5.4 < f_0 < 9.6$ Гц. Изучение временных спектров проводилось для волн с $f_0 = f_p/2 = 7.5$ Гц. При $\tilde{h} = h/\gamma = 5$ смещение поверхности становилось 100 % модулированным с частотой модуляции $F = 0.2$ Гц. Измерение двухточечной корреляции показало, что возникающая модуляция пространственно однородна по резонатору.

С увеличением частоты накачки возникающая в системе ПВВ продольная модуляция распространялась по резонатору со скоростью порядка групповой.

Такие эффекты подробно изучались при $f_p = 30$ Гц. Обнаруженные значения волновых чисел продольной модуляции оказались в хорошем согласии с расчетами. Так, $\kappa \simeq k_0/4$ при $\tilde{h} = 1.8$, $\kappa \simeq k_0/3$ при $\tilde{h} = 3.4$.

В области чисто капиллярных волн, как показал расчет, наиболее неустойчивые возмущения направлены перпендикулярно к направлению основной волны. Подробное изучение такой неустойчивости проведено в прямоугольной кювете (длиной 24 см, шириной 3.5 см), где возбуждалась пара волн, распространяющихся вдоль длинной стенки, частота накачки при этом была $f_p = 145$ Гц. Было обнаружено, что возникающая модуляция является поперечной, близкой к аperiодической (скорость ее распространения ~ 0.5 см/с). Измеренные масштабы модуляции также оказались в согласии с теоретическими расчетами. Например, $\kappa \simeq k_0/6$ при $\tilde{h} = 1.08$, $\kappa = k_0/4$ при $\tilde{h} = 1.15$.

Также нами были изучены пространственные спектры распределения поля ПВВ в системе двух взаимно перпендикулярных волн. При этом волны возбуждались в круглой кювете радиусом 12 см при $f_p = 145$ Гц. Определение характера модуляции производилось путем численной обработки изображения поля ПВВ. Связь формы поверхности $z = \eta(x, y, t)$ с яркостью изображения $B(x, y, t)$ получена в Приложении 2. Отметим здесь, что по спектрам изображения можно определить, волны каких масштабов присутствуют на поверхности жидкости. Если фотографирование производится в отраженном свете, а подсветка осуществляется источником, свет от которого падает перпендикулярно невозмущенной поверхности, то при экспозиции, значительно большей, чем период волн, яркость изображения при малых наклонах может аппроксимироваться в виде

$$I = I_0 - \beta \left\langle \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right\rangle, \quad (5)$$

где I_0 — фоновая засветка; угловые скобки означают усреднение по времени; β — положительный коэффициент, зависящий, вообще говоря, от угловой направленности источника освещения.

Поэтому ввиду нелинейной связи яркости и наклона произойдет перемножение пространственных гармоник и при возбуждении, например, двух взаимно перпендикулярных пар встречных волн в спектре яркости будут составляющие с волновыми векторами $2k_0x_0$, $2k_0y_0$, $k_0x_0 + k_0y_0$ и т. д. Если волны промодулированы, то спектр огибающей определяется по уширению второй гармоники.

Ниже приведены распределения поля параметрически возбуждаемых волн при различных значениях амплитуды накачки. Подчеркнем, что волновое поле не является здесь суперпозицией линейных мод резонатора — круглой кюветы, а определяется нелинейной динамикой возмущений. Так, при малой надкритичности (рис. 3, а) возбуждаются две взаимно перпендикулярные пары капиллярных волн. Узлы и пучности в них не смещаются с течением времени, это говорит о том, что фазы волн синхронизованы. По спектру яркости фотографии (рис. 3, а) можно определить волновое число возбужденных колебаний. Время экспозиции составляло $1/30$ с, поэтому для капиллярных волн с частотой

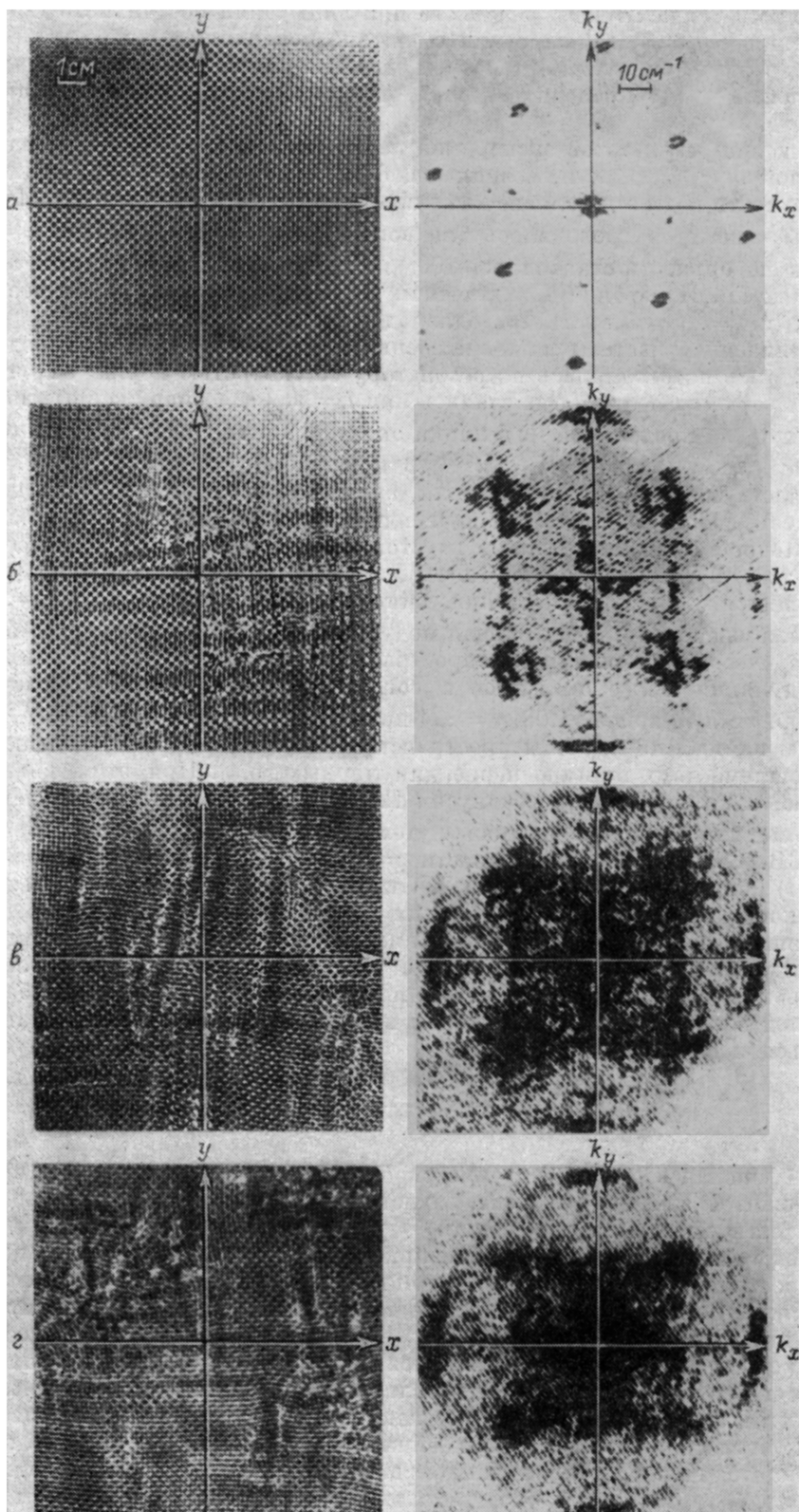


Рис. 3. Поверхности и соответствующие им спектры яркости при различных надкритичностях.

λ : а — 1.24, б — 1.33, в — 1.42, г — 1.98.

$\mu_0 \approx 70$ Гц можно считать, что фотография соответствует усреднению по временному периоду и удвоению волнового числа $k_0 = \sqrt[3]{(2\pi f_0)^2 / \sigma / \rho} = 20$ (1/см) (ср. рис. 3, а).

С увеличением надкритичности в системе возбужденных волн возникает модуляция (рис. 3, б, в). Зависимость ширины спектра в продольном $\Delta k_{\parallel}/k_0$ и поперечном $\Delta k_{\perp}/k_0$ направлениях (Δk — полуширина спектра по уровню 0.7) приведена на рис. 4. Модуляция, развивающаяся в системе, является существенно поперечной. Дальнейшее усложнение спектра с увеличением \tilde{h} (рис. 3, в) происходит за счет его изотропизации на плоскости k : волновые числа спутников ложатся на окружности ($0.2 k$) (рис. 3, в). При этом динамика волн становится хаотической.

Обсуждение результатов

В настоящей работе проведено теоретическое и экспериментальное изучение пространственно-временных модуляций параметрически возбужденных гравитационных, гравитационно-капиллярных и капиллярных волн.

Теоретический расчет проводился для пары волн в безграничной среде, и поскольку резонатор, в котором проводился эксперимент, имел конечные размеры, то необходимо оценить его влияние на изучаемые эффекты.

Наличие стенок резонатора увеличивает затухание волн за счет вязкого пограничного слоя вблизи твердой поверхности [17]. Добавочное затухание, обусловленное стенками для волн на глубокой воде, составит $\gamma_0 = \sqrt{\gamma \omega ab(a+b)} / \sqrt{2}$ (где $\gamma = 2\nu k^2$, a и b — длина и ширина резонатора). Измеренные пороговые значения ускорения, при котором происходит возбуждение волн, оказались в хорошем согласии со значением, рассчитанным с учетом γ_0 .

Кроме того, в отличие от безграничной среды, где возникающая модуляция может иметь произвольный пространственный масштаб, период возможной модуляции в резонаторе должен укладываться целое число раз на его длине. Анализ мгновенных снимков показал именно такую структуру возбужденного волнового поля.

Отметим, что при генерации гравитационно-капиллярных волн пространственно однородная модуляция наблюдалась в более узком по сравнению с теорией диапазоне частот и имела ненулевой порог возникновения. Это связано, по-видимому, не только с конечными размерами резонатора, но и еще с рядом причин. Так, для волн на поверхности жидкости при $f_p \leq 14$ Гц при увеличении амплитуды накачки до того, как был превышен порог возникновения пространственно однородной модуляции, происходил отрыв капель с поверхности и рассчитанный режим не наблюдался. Кроме того, появление пространственно однородной модуляции предшествовало развитию стационарных трехмерных неустойчивостей, которые, вообще говоря, невозможно описать в рамках принятой модели.

Укажем, что режим пространственно однородной модуляции наблюдался и в других волновых системах (при подходящих коэффициентах нелинейного взаимодействия $S(2S+T) < 0$); например, в спиновых волнах — так называемые автоколебания намагниченности.

Для чисто капиллярных волн наиболее примечательным, на наш взгляд, является тот факт, что с увеличением амплитуды накачки развитие модуляции и переход к турбулентности происходят локально — на отдельных «островках», окруженных регулярным волновым полем, где фазы волн синхронизованы (рис. 3, в, г). Со временем положение этих «островков» изменяется, а с увеличением амплитуды внешнего поля турбулентные области занимают всю кювету.

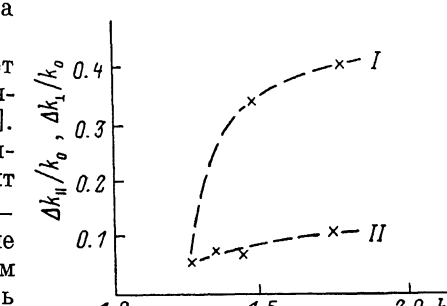


Рис. 4. Зависимость ширины пространственного спектра $\Delta k_{\parallel}/k_0$ (I) и $\Delta k_{\perp}/k_0$ (II).

Такая картина существенно отличается от той, что предсказывается, например, теорией возбуждения волн в ферромагнетиках [1], где изначально предполагается, что разность фаз волн в каждой паре хаотизирована, а волновые поля пространственно однородны. Различие в поведении параметрически возбужденных волн в этих средах при одной и той же надкритичности \tilde{h} обусловлено различием параметров $r = v_{\text{гп}}/\gamma\lambda$ (λ — длина волны). В силу большого затухания для волн в жидкости, где $r \sim 1$ возмущения от «островков» с хаотическим поведением быстро затухают. Поэтому возможны локальное развитие неустойчивости и возникновение пространственной перемежаемости. Для сред, где $r \gg 1$, такой процесс, по-видимому, невозможен.

Авторы признательны М. И. Рабиновичу за полезные замечания.

Приложение 1

Дисперсионное соотношение для гармонических возмущений вида $e^{i(vt+xx+yy)}$ можно получить из линеаризованной на фоне стационарных решений $A_{\pm} = A_0 e^{i\psi}$ системы (1). Оно имеет вид

$$\lambda^4 + 2\lambda^2(1 + |F_2|^2 - x_H^2 - \alpha^2 - F_3^2) + x_H^2 + \alpha^4 - 2x_H^2\alpha^2 + 2(x_H^2 - \alpha^2)(F_3^2 + |F_2|^2) - 2(x_H^2 + \alpha^2 + F_3^2) - 2F_3^2|F_2|^2 + 4F_3(4ST\gamma^{-2}|A_0|^4 + 2h\text{Re}(F_2)) + 1 + |F_2|^4 + F_3^4 - 2h^2((\text{Re}(F_2))^2 - (\text{Im}(F_2))^2) - 8T^2S^2\gamma^{-4}|A_0|^8 - 8hST\gamma^{-2}|A_0|^4\text{Re}(F_2).$$

Здесь

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{kk}}{\gamma} v_{\text{гп}} x^2 + \frac{v_{\text{гп}}}{k_0} q^2 \right) + F_1, \quad x_H = \frac{vx}{\gamma}, \quad \lambda = i + v/\gamma, \quad F_1 = 2(S + T) A_0^2 + \Delta, \\ F_2 = T A_0^2 e^{2i\psi}, \quad F_3 = 2S A_0^2.$$

Нарастающим возмущениям соответствуют $\text{Im} \lambda < 1$.

Приложение 2¹

Получим выражение, определяющее связь уклонов взволнованной поверхности с распределением яркости в ее изображении. Пусть неровная поверхность жидкости, описываемая функцией возвышений $z = \eta(x, y, t)$, освещается широким параллельным пучком света с малой угловой расходимостью, причем направление падающих лучей составляет небольшой угол с вертикалью. Угловое распределение яркости падающего на поверхность светового поля представим в виде

$$B_T(\Omega_1) = \frac{E_T}{\pi\sigma_T^2} e^{-\langle \Omega_1 - \Omega_T \rangle^2 / \sigma_T^2}, \quad (\text{П. 1})$$

где E_T — освещенность плоскости $z = \text{const}$; Ω_1 и Ω_T^z — проекции единичных векторов Ω_1^0 и Ω_T^0 на плоскость $z = \text{const}$, причем вектор Ω_1^0 совпадает с осью диаграммы излучения источника, угловая ширина которой $\sigma_T \ll 1$.

При условии, что освещение и наблюдение поверхности производятся под небольшими углами к вертикали и в приближении малости углов наклона поверхности, яркость отраженного света определяется выражением

$$B(\mathbf{r}, \Omega_2, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} B_T(\Omega_1) \delta[\Omega_1 - \Omega_2 - 2\mathbf{q}(\mathbf{r} - H\Omega_2, t)] d\Omega_1, \quad (\text{П. 2})$$

где \mathbf{r} — координата точки наблюдения в плоскости $z = H$, Ω_2 — проекция Ω_2^0 на плоскость $z = \text{const}$ (Ω_2 характеризуют направление визирования),

$$\mathbf{q} = x_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + y_0 \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad |\mathbf{q}| \ll 1.$$

¹ Получено одним из авторов (А. Б. Езерским) совместно с В. Л. Вебером.

Выражая функцию B_T через ее фурье-образ

$$B_T(\Omega_1) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint F_T(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\Omega_1} d\mathbf{p}$$

и подставляя ее в (П. 2), получим

$$B(\mathbf{r}, \Omega_2, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint F_T(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}(\Omega_2 + 2\mathbf{q}'\mathbf{r} - \Omega_2 \cdot t)} d\mathbf{p}. \quad (\text{П. 3})$$

Пусть на поверхности жидкости присутствуют две взаимно перпендикулярные системы стоячих волн

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = ka_0(x_0 \cos kx + y_0 \cos ky) \cos \omega t,$$

где k — волновое число, a_0 — амплитуда волны.

Подставим это выражение в (П. 3) и проведем над изображением $B(\mathbf{r}, \Omega_2, t)$ операцию временного усреднения по периоду волнения. В итоге получим

$$\begin{aligned} B(\mathbf{r}, \Omega_2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi B(\mathbf{r}, \Omega_2, t) d(\omega t) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} F_T(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\Omega_2} J_0(2akp_x \cos(kx - \Omega_{2x}) + 2akp_y \cos(ky - \Omega_{2y})) d\mathbf{p}, \quad (\text{П. 4}) \end{aligned}$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Подставляя в (П. 4) выражение (П. 1), при $\Omega_2 = \Omega_n = 0$ получим формулу для распределения средней яркости в изображении поверхности

$$\begin{aligned} B(\mathbf{r}) &= \frac{E_T}{\pi} \left(\frac{a_0 k}{\sigma_T} \right) (\cos^2 kx + \cos^2 ky) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{a_0 k}{\sigma_T} \right)^2 (\cos^2 kx + \cos^2 ky)} \times \\ &\times I_0 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{ak}{\sigma_T} \right)^2 (\cos^2 kx + \cos^2 ky) \right), \end{aligned}$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя.

Поскольку I_0 — четная функция, то в спектре изображения поверхности будут присутствовать лишь пространственные гармоники с волновыми векторами $\pm 2k_x$, $\pm 2k_y$, $\pm 4k_x$ и т. д.

Если освещение и наблюдение производятся под разными углами к поверхности ($\Omega_2 \neq \Omega_n$), то, как следует из (П. 4), в спектре изображения будут представлены и гармоники с волновыми векторами $\pm k_x \pm k_y$, $\pm 2k_x \pm k_y$ и т. д.

Литература

- [1] Захаров В. Е., Львов В. С., Старобинец С. С. // УФН. 1974. Т. 114. С. 609—654.
- [2] Брикман В. А., Шайдунов Т. В. // ДАН СССР. 1968. Т. 180. С. 1315—1318.
- [3] Баштовой В. Г., Барков Ю. Д. // Магнитная гидродинамика. 1980. № 4. С. 6—13.
- [4] Габович М. Д., Папицкий Э. Л. // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 1. С. 9—14.
- [5] Неволин В. Г. // ИФЖ. 1984. Т. 47. С. 1028—1042.
- [6] Езерский А. Б., Коротин П. И., Рабинович М. И. // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41. С. 129—131.
- [7] Езерский А. Б., Рабинович М. И., Реутов В. П., Старобинец И. М. // ЖЭТФ. 1988. Т. 91. С. 2070—2083.
- [8] Gollub J. P., Meyer C. W. // Phys. 1983. Vol. 6D. P. 397—401.
- [9] Ciliberto S., Gollub J. P. // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. P. 922—925.
- [10] Ciliberto S., Gollub J. P. // J. Fluid. Mech. 1985. Vol. 158. P. 381—394.
- [11] Meron E., Procaccia I. // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 56. P. 1323—1326.
- [12] Meron E., Procaccia I. // Phys. Rev. 1985. Vol. 34A. P. 3221—3237.
- [13] Holmes P. // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 162. P. 365—374.
- [14] Miles J. W. // J. Fluid Mech. 1984. Vol. 146. P. 285—297.
- [15] Захаров В. Е. // ПМТФ. 1968. № 2. С. 89—96.
- [16] Андронов А. А., Фабрикант А. Л. // Нелинейные волны. М., 1979. С. 68—14.
- [17] Ландау Л. Д., Lifshits E. M. Гидродинамика. М., 1986. 736 с.