Журнал технической физики, т. 59, в. 4, 1989

РАСЧЕТ АНИЗОТРОПИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ С УЧЕТОМ КОНЦОВ ОБРАЗЦА С ПОМОЩЬЮ КОНФОРМНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Л. И. Буравов

Так называемый метод Монтгомери [1] определения электросопротивления анизотропных проводников позволяет вычислять удельные сопротивления ρ_x и ρ_y, если известны два напряжения U_x и U_y, возникающие на двух парах углов одной из граней прямоугольного проводящего параллелепипеда при пропускании тока через другую пару точек на углах той же грани. Этот способ основан на решении [2] соответствующей электростатической задачи для изотропного проводящего бруска методом изображений. Для измерений по схеме [1, 2] 4 точечных контакта должны располагаться на углах одной из граней прямоугольного параллелепипеда.

С учетом подхода, предложенного в [1], в настоящей работе получены расчетные формулы для определения величин ρ_x и ρ_y для схемы монтажа контактов, отличающейся от изученной в [1, 2]. Отличие схемы заключается в том, что, во-первых, контакты располагаются на некотором расстоянии a_i ($i=1, 2, 3, 4$) от концов прямоугольного бруска, во-вторых, контакты не являются точечными, а имеют длину l_z, равную размеру образца по оси z (рис. 1, *б*). В этой схеме две пары контактов располагаются на двух противоположных гранях образца. Предполагается, что оси бруска совпадают с главными осями тензора проводимости. При таком расположении контактов при пропускании тока через контакты *2*, *3* или *3*, *4* распределение потенциала в образце не зависит от координаты z, поэтому при анализе задачи в настоящей работе был использован метод конформного преобразования.

В работе [1] было показано, что при решении этой задачи удобно перейти к эквивалентной изотропной модели, для которой сопротивление элемента объема $dxdydz$ в направлении осей x, y или z равно сопротивлению элемента объема $dx'dy'dz'$ в анизотропной среде в соответствующем направлении. Для данной задачи это условие приводит к равенствам:

$$\rho_x = \rho \frac{l_x l'_y}{l_y l'_x}, \tag{1}$$

$$\rho_y = \rho \frac{l_y l'_x}{l_x l'_y}, \tag{2}$$

где l'_x и l'_y — размеры анизотропного образца в направлении x и y; l_x, l_y и ρ — размеры и удельное сопротивление для эквивалентной изотропной модели.

Чтобы вычислять удельные сопротивления и анизотропию сопротивления реального образца, важно иметь аналитические выражения для величин напряжений U_x между контактами *2* и *3* при прохождении тока через контакты *1* и *4* и U_y между контактами *3* и *4* при прохождении тока через контакты *1* и *2*, а также для отношения U_y/U_x в эквивалентной изотропной модели.

Для нахождения этих выражений в работе было использовано конформное преобразование прямоугольника в полуплоскость с помощью эллиптической функции $\mathrm{sn}\,(t)$ [3-5] (в данном случае таким прямоугольником является любое сечение бруска, перпендикулярное проводам *1*, *2*, *3* и *4*)

$$w = \xi + i\eta = \mathrm{sn}\left(\frac{2K}{l_x}\,x + i\,\frac{K'}{l_y}\,y\right), \tag{3}$$

где $K=\pi/2\,(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)$, $K'=2K\,l_y/l_x$, $q=\exp\,(-2\pi l_y/l_x)$, начало координат в плоскости (x, y) взято на середине одного из ребер бруска (рис. 1).

Как известно [3-5], при таком преобразовании граница прямоугольника отображается на ось ξ, внутренняя часть прямоугольника — на верхнюю полуплоскость (ξ, η), точки *1*, *2*, *3* и *4*, соответствующие положению контактов, переходят на ось ξ в точки

$$\xi_1 = \mathrm{sn}\,[K\,(1-2\Delta_1)],\ \xi_2 = \mathrm{sn}\,[K\,(1-2\Delta_2) + iK'] = k^{-1}\mathrm{sn}^{-1}\,[K\,(1-2\Delta_2)],$$
$$\xi_3 = -k^{-1}\mathrm{sn}^{-1}\,[K\,(1-2\Delta_3)],\ \xi_4 = -\mathrm{sn}\,[K\,(1-2\Delta_4)], \tag{4}$$

где $\Delta_i = a_i/l_x < 0.5$, $k=4\sqrt{q}\,(1+q^2+q^6+q^{12}+\ldots)^2/(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)^2$, причем расположение их следующее: $\xi_3 < \xi_4 < \xi_1 < \xi_2$.

Если ток J протекает через два параллельных провода, потенциал которых предполагается практически постоянным по всей длине l_z, то распределение потенциала в верхней полуплоскости (ξ, η) описывается по аналогии с распределением потенциала для двух параллельных заряженных проводов [6] в виде

$$\varphi(\xi, \eta) = A \ln(r_1/r_2), \tag{5}$$

где r_1 и r_2 — расстояния в этой полуплоскости от точки наблюдения до центров проводов; константа A может быть найдена из уравнения $J = \int j ds$, где j — плотность тока в среде у поверхности провода; $ds = \pi r_0 dl_z$ — элемент поверхности провода; r_0 — радиус провода.

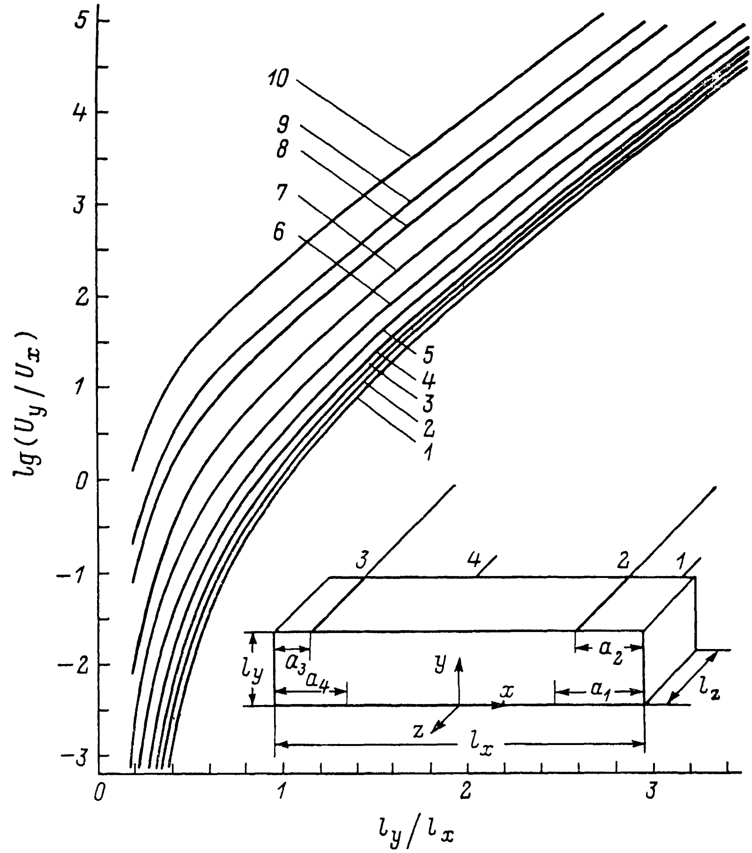

Рис. 1. Зависимость $\lg(U_y/U_x)$ от l_y/l_x с параметром Δ (*а*) и схема расположения контактов на образце (*б*).

Δ: *1* — 0, *2* — 0.10, *3* — 0.15, *4* — 0.2, *5* — 0.25, *6* — 0.3, *7* — 0.35, *8* — 0.4, *9* — 0.42, *10* — 0.45.

Подставляя в интеграл значение $j = -1/\rho\, (\partial\varphi/\partial r_1)_{r_1=r_0} \simeq -A/\rho r_0$, находим $A = -(J\rho/\pi l_z)$ в предположении, что $r_0 \ll l_x, l_y$.

Используя выражение (5), получим

$$U = \varphi_{(2)} - \varphi_{(3)} = A \ln \frac{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_4)(\xi_1 - \xi_3)} \tag{6}$$

(при прохождении тока J через точки *1* и *4*) и

$$U_y = \varphi_{(3)} - \varphi_{(4)} = A \ln \frac{(\xi_2 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_4)}{(\xi_1 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_4)} \tag{7}$$

(при прохождении тока J через точки *1* и *2*).

Аналогично [1] при делении U_y на U_x получается уравнение, в которое не входит величина ρ

$$U_y/U_x = \Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), \tag{8}$$

где Φ — функция указанных аргументов.

Задавая величины U_x, U_y и Δ_i из опыта для анизотропного образца и решая уравнение (8) относительно величины l_y/l_x с помощью ЭВМ, можно найти значение l_y/l_x для эквивалентной изотропной модели, после чего анизотропия сопротивления определяется согласно [1]

$$\rho_y/\rho_x = \left(\frac{l_y l'_x}{l_x l'_y}\right)^2. \tag{9}$$

При использовании уравнений (6) и (7) с учетом (1) и (2) получаются расчетные формулы для ρ_x и ρ_y анизотропного образца с произвольными Δ_i

$$\rho_x = -\frac{U_x}{J}\pi l_z\left[\ln\frac{(\xi_2-\xi_1)(\xi_4-\xi_3)}{(\xi_1-\xi_3)(\xi_2-\xi_4)}\right]^{-1}\frac{l_x l'_y}{l_y l'_x}, \tag{10}$$

$$\rho_y = -\frac{U_y}{J}\pi l_z\left[\ln\frac{(\xi_2-\xi_3)(\xi_1-\xi_4)}{(\xi_1-\xi_3)(\xi_2-\xi_4)}\right]^{-1}\frac{l_y l'_x}{l_x l'_y}. \tag{11}$$

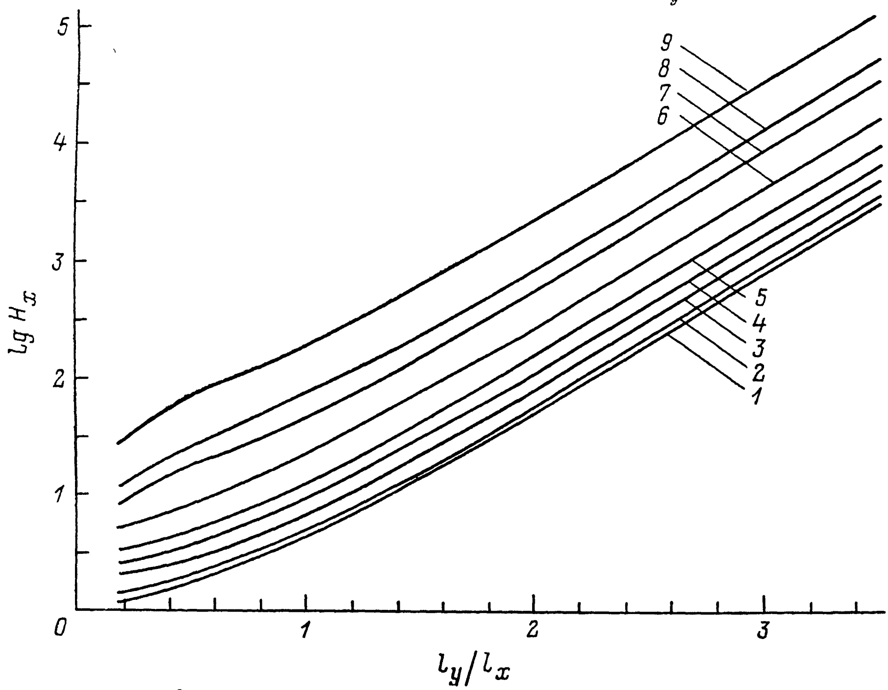

Рис. 2. Зависимость lg H_x от l_y/l_x с параметром Δ.

Δ: *1* — 0, *2* — 0.1, *3* — 0.2, *4* — 0.25, *5* — 0.3, *6* — 0.35, *7* — 0.4, *8* — 0.42, *9* — 0.45.]

Для случая, когда все Δ_i равны ($\Delta_i = \Delta$), формулы (8), (10) и (11) упрощаются и приобретают вид

$$U_y/U_x = \ln\frac{4\varkappa}{(1+\varkappa)^2}\Big/2\ln\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}, \tag{12}$$

$$\rho_x = -\frac{U_x}{J}\frac{\pi l_z}{2}\left[\ln\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right]^{-1}\frac{l_x l'_y}{l_y l'_x} = H_x\frac{U_x}{J}\frac{l'_y}{l'_x}l_z, \tag{13}$$

$$\rho_y = -\frac{U_y}{J}\pi l_z\left[\ln\frac{4\varkappa}{(1+\varkappa)^2}\right]^{-1}\frac{l_y l'_x}{l_x l'_y} = H_y\frac{U_y}{J}\frac{l'_x}{l'_y}l_z, \tag{14}$$

где

$$\varkappa = k\,\mathrm{sn}^2\,[K(1-2\Delta)],\quad H_x = -\frac{\pi}{2}\left[\ln\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right]^{-1}\frac{l_x}{l_y},$$

$$H_y = -\pi\left[\ln\frac{4\varkappa}{(1+\varkappa)^2}\right]^{-1}\frac{l_y}{l_x}.$$

На рис. 1—3 представлено изменение величин соответственно lg (U_y/U_x), lg H_x и lg H_y как функций отношения $l_y/l_x = (l'_y/l'_x)\sqrt{\rho_y/\rho_x}$ в зависимости от параметра Δ. Графики были рассчитаны с использованием таблиц для эллиптического синуса [7] при $l_y/l_x \leqslant 0.8$, при $l_y/l_x \geqslant 0.8$ использовалось приближение

$$\operatorname{sn}[K(1-2\Delta)] \simeq \sin\left[\frac{\pi}{2}(1-2\Delta)\right] [3, 4].$$

Как видно из графиков, функции U_y/U_x и H_x увеличиваются с увеличением Δ, функция H_y, наоборот, уменьшается. Следует отметить, что значение H_y при $l_y/l_x \geqslant 0.44$ для $\Delta = 0.42$ почти постоянно и близко к 1.

При практическом применении результатов статьи для определения удельных сопротивлений следует по аналогии с [1] сначала решить уравнение (12) относительно $\varkappa$ и (l_y/l_x), задав из опыта величины U_x, U_y и Δ, численным способом (например, методом итераций). Найденные значения $\varkappa$ и l_y/l_x затем подставляются в формулы (13) и (14) для нахождения величин ρ_x и ρ_y.

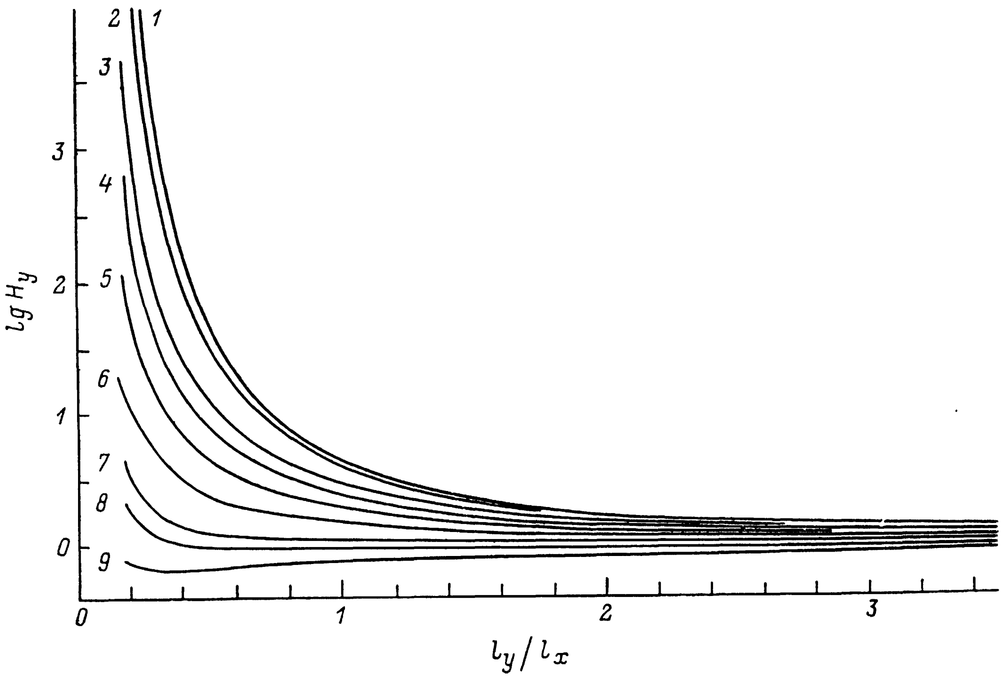

Рис. 3. Зависимость $\lg H_y$ от l_y/l_x с параметром Δ.
1—9 — то же, что и на рис. 2.

Если положить $\Delta = 0$, то возможно провести сравнение полученных результатов и найденных в работе [2]. При сравнении заранее следует ожидать совпадения результатов только в том случае, если используются формулы [2] для тонких образцов (при $l_z \to 0$), в противном случае результаты [2] зависят от координаты z, что заведомо приводит к некоторому ухудшению соответствия. Результаты [2] для тонких пластин можно представить в следующем виде

$$\rho_x = H_{0x} U_x l_z / J, \quad \rho_y = H_{0y} U_y l_z / J,$$

где

$$H_{0x} = \frac{\pi}{4}\left[\ln \frac{1 + 2q_1 + 2q_1^4 + 2q_1^9 + \ldots}{1 - 2q_1 + 2q_1^4 - 2q_1^9 + \ldots}\right]^{-1} \equiv f(q_1), \quad H_{0y} = f(q_2),$$

$$q_1 = \exp[-\pi l_y/l_x], \quad q_2 = \exp[-\pi l_x/l_y], \quad \rho_x = \rho_y,$$

поскольку рассматривается изотропный случай.

Аналогичные коэффициенты пропорциональности для данной работы, как видно из (13), (14), равны (с учетом $\operatorname{sn} K = 1$)

$$h_x = -\frac{\pi}{2}\left[\ln \frac{1-k}{1+k}\right]^{-1}, \quad h_y = -\pi\left[\ln \frac{4k}{(1+k)^2}\right]^{-1}. \tag{15}$$

Численный расчет показывает полное совпадение коэффициентов H_{0x} и h_x, а также H_{0y} и h_y, если при вычислениях суммируется достаточно большое число членов рядов.

Отметим ограничения на геометрические размеры. Во-первых, при выводе использовалось условие $r_0 \ll l_x$, l_y; во-вторых, для того чтобы потенциал токового провода оставался практически постоянным на длине l_z, сопротивление контактирующего провода на этой длине должно быть значительно меньше переходного сопротивления $R_{\text{пм}}$ между проводом и исследуемым материалом; это накладывает ограничение на размер l_z для бруска $l_z \ll R_{\text{пм}} \pi r_0^2 / \rho_{\text{п}}$, где $\rho_{\text{п}}$ — удельное сопротивление провода.

Литература

[1] *Montgomery H. C.* // J. Appl. Phys. 1971. Vol. 42. N 7. P. 2971—2974.
[2] *Logan B. F., Rice S. O., Wick R. F.* // J. Appl. Phys. 1971. Vol. 42. N 7. P. 2975—2978.
[3] *Журавский А. М.* Справ. по эллиптическим функциям. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941. 235 с.
[4] *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
[5] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., 1958. 678 с.
[6] *Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В.* Электромагнитные поля и волны. М.: Сов. радио, 1956. 639 с.
[7] *Шулер М., Гебелейн Х.* Таблицы эллиптических функций. М., 1961. 250 с.

Отделение института
химической физики АН СССР
Черноголовка Московской обл.

Поступило в Редакцию
11 февраля 1987 г.
В окончательной редакции
5 апреля 1988 г.

07; 08

Журнал технической физики, т. 59, в. 4, 1989

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ В ГАЗЕ

В. И. Загорельский, Д. О. Лапотко, О. Г. Мартыненко, Г. М. Пухлов

Результативное использование мощного лазерного излучения в различных устройствах и технологических процессах возможно при условии эффективного управления излучением (сканирования, модуляции, фазовой коррекции пучка) и чаще всего в режиме реального

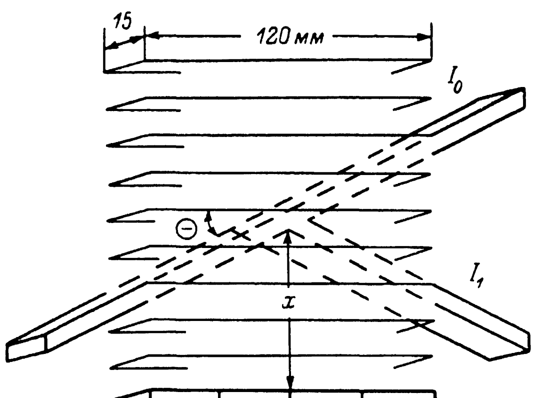

Рис. 1. Схема осуществления дифракции.

времени. Для потоков малой интенсивности такие задачи достаточно корректно решаются методами жидкостной и твердотельной акустооптики, которые позволяют осуществлять управляемое воздействие на интенсивность, фазу и направление распространения дифрагирующего света [1, 2]. В случае мощного излучения, воздействие которого на жидкости и твердые тела приводит к их тепловому разрушению, принципы акустооптики можно при-