

01; 09; 10

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЗАРЯДА
С ЭЛЕМЕНТАМИ ВАКУУМНОГО ТРАКТА

В. А. Татарников

Рассмотрено влияние стенок вакуумного тракта на энергию заряженной частицы. В приближении заданного тока получены выражения для интегральных изменений энергии релятивистского заряда. Показано различие характера взаимодействия заряда с неоднородностями типа диафрагма и полубесконечный волновод.

1. Задачи ускорения и транспортировки пучков требуют учета эффектов, связанных с собственными полями заряженных частиц. Пролетая мимо элементов ускоряющей структуры, сгусток наводит на стенках заряды и токи, которые в свою очередь, создавая вторичное электромагнитное поле, влияют на ускоряемые частицы [1].

В настоящей работе вычисляется изменение энергии сгустка, вызванное наведенными в структуре полями. В случае релятивистского движения время интенсивного взаимодействия заряда с пространственной неоднородностью мало и собственные волны структуры не успевают установиться [2]. Предлагаемое рассмотрение не использует разложение вторичного поля на гармоники и позволяет оценить интегральное изменение энергии сгустка.

Вычисления проводятся в следующих приближениях. Считается, что релятивистский точечный сгусток с зарядом q движется в вакууме с постоянной скоростью $v = \text{const}$ ($v \sim c$) вдоль оси структуры, обладающей осевой симметрией. Полагается, что стенки представляют собой идеальный проводник с поверхностными зарядами σ и токами \mathbf{j} , а электромагнитное поле внутрь не проникает. Рассматривается взаимодействие сгустка частиц со стенками простейшей конфигурации — экраном с отверстием и цилиндрического кольца.

Полное поле в любой точке тракта складывается из собственного поля точечного заряда в свободном пространстве \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 и вторичного наведенного поля \mathbf{E}_s , \mathbf{H}_s . Компоненты поля точечного заряда в цилиндрической системе координат (r, φ, z') имеют вид [3]

$$E_{0z} = q (1 - \beta^2) \frac{z' - vt}{[(z' - vt)^2 + r^2 (1 - \beta^2)]^{3/2}},$$

$$E_{0r} = q (1 - \beta^2) \frac{r}{[(z' - vt)^2 + r^2 (1 - \beta^2)]^{3/2}},$$

$$H_{0\varphi} = \beta E_{0r}, \quad (1)$$

где $\beta = v/c$; r, z' — координаты точки наблюдения; t — время.

На изменение энергии сгустка влияет только вторичное электрическое поле $\mathbf{E}_s = -\text{grad } \varphi - (1/c) (\partial \mathbf{A} / \partial t)$, которое определяется через запаздывающие скалярный φ и векторный \mathbf{A} потенциалы [4]

$$\varphi = \int_S \frac{\sigma \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R} dS.$$

$$\mathbf{A} = \int_S \frac{\mathbf{j} \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R} dS. \quad (2)$$

Здесь R — расстояние от элемента поверхности dS до точки наблюдения.

Значение поверхностных зарядов σ и токов \mathbf{j} находится из граничных условий на поверхности раздела вакуум—идеальный проводник

$$\mathbf{nE} = 4\pi\sigma, \quad [\mathbf{n}, \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (3)$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности стенки; $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_r$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_r$. Внутри идеального проводника $E = 0$, $H = 0$.

Используя формулы (1)–(3), можно определить z -компоненту вторичного электрического поля в точке прохождения заряда ($r=0$, $z=vt$) и вычислить изменение его энергии

$$W = q \int_{z_1}^{z_2} E_{sz}(r=0, z=vt) dz, \quad dz = vdt. \quad (4)$$

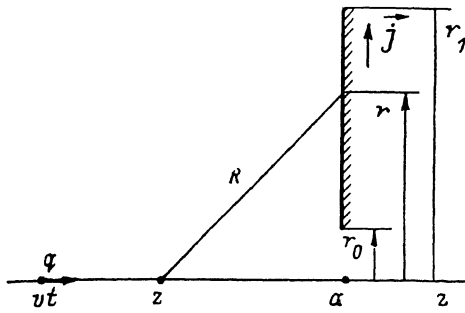


Рис. 1.

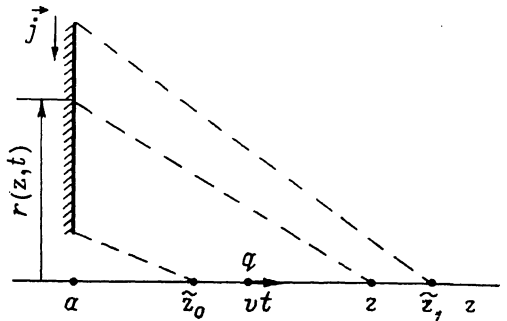


Рис. 2.

2. Пусть заряд налетает из бесконечности на экран с отверстием (рис. 1). Уравнения (3) дают следующие значения для наведенных зарядов и токов σ , \mathbf{j} , удовлетворяющих уравнению непрерывности:

$$\sigma = -\frac{1}{2\pi} E_{0z}, \quad \mathbf{j}_r = \frac{c}{2\pi} H_{0\varphi}.$$

Пусть $z \leq a$ — точка на оси системы, r — точка экрана. Учитывая, что $dS = 2\pi r dr$ и экран представляет собой диск с внутренним и внешним радиусами r_0 и r_1 , из (4) находим изменение энергии сгустка от z_1 до z_2

$$W = \frac{q^2(1-\beta^2)}{4} [T(r_1, z_2) - T(r_1, z_1) - T(r_0, z_2) + T(r_0, z_1)],$$

где

$$T(r, z) = \frac{1}{r} \left[\frac{\beta}{(\sqrt{1+t^2}-\beta t)^3} - \frac{\beta}{\sqrt{1+t^2}-\beta t} + \frac{1-2\beta^2}{2(1-\beta^2)} \frac{t-\beta\sqrt{1+t^2}}{(\sqrt{1+t^2}-\beta t)^2} - \frac{1}{2(\sqrt{1-\beta^2})^3} \operatorname{arctg} \frac{t-\beta\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right], \quad t = \frac{z-a}{r}.$$

На всем пути до экрана ($z_1 = -\infty$, $z_2 = a$) заряд меняет свою энергию на величину

$$W = q^2 \frac{1+2\beta^2}{8\beta} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) \frac{1}{\gamma^2}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

при $\beta \approx 1$ ($\gamma \gg 1$)

$$W = \frac{3q^2}{8} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1} \right) \frac{1}{\gamma^2}.$$

Видно, что с увеличением скорости заряда энергия его взаимодействия с экраном уменьшается как γ^2 . Это объясняется тем, что с ростом скорости резко падает z -составляющая электрического поля сгустка, а следовательно, и величина поверхностного заряда, создающего вторичное поле.

Если сгусток вылетает из диска с отверстием (рис. 2), то он распространяет свое влияние на вначале «не освещенную» поверхность со скоростью света. Поэтому взаимодействие заряда с сигналом вторичного поля начинается на некотором удалении от экрана в точке $z_0 = a + 2\beta r_0 / (1 - \beta^2)$ и по мере продвижения сгустка увеличивается область экрана $r_0 \leq r \leq r(z, t)$, непосредственно влияющая на заряд. Начиная с местонахождения сгустка $vt \geq z_1 = a + 2\beta r_1 / (1 - \beta^2)$

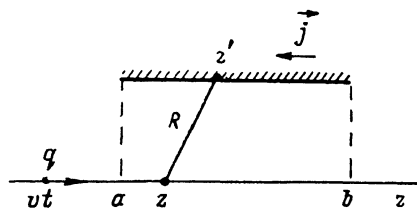


Рис. 3.

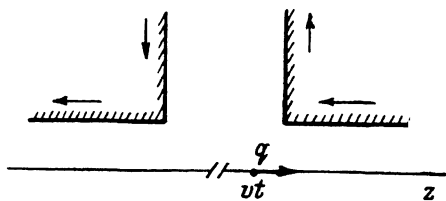


Рис. 4.

вклад во вторичное поле, действующее на сгусток, вносят все точки поверхности диска. Поэтому выражение для изменения энергии (4) принимает вид

$$W = -q \left[\int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{r_0}^{r(z,t)} \frac{\sigma(t - \frac{R}{c})}{R} 2\pi r dr \right) \Big|_{z=vt} dz + \int_{z_1}^z \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{r_0}^{r_1} \frac{\sigma(t - \frac{R}{c})}{R} 2\pi r dr \right) \Big|_{z=vt} dz \right]$$

и с точностью до знака соответствует изменению энергии сгустка, влетающего в экран.

3. Пусть сгусток пролетает цилиндрическую поверхность (рис. 3). В этом случае граничные условия (3) с учетом (1) принимают вид

$$\sigma = -\frac{q(1-\beta^2)}{2\pi} \frac{r}{[(z'-vt)^2 + r^2(1-\beta^2)]^{3/2}}, \quad j_z = \beta c \sigma,$$

где z' — координата стенки, $a \leq z' \leq b$; значения поверхностных σ , j удовлетворяют уравнению непрерывности.

Из (2) для вторичного поля в точке нахождения заряда $z=vt$ имеем

$$E_{sz}(z) \Big|_{z=vt} = \frac{q(1-\beta^2)}{\beta^4 r_0^2} \left[-x - \frac{9-5\beta^2}{x} + \frac{(1-\beta^2)(17-3\beta^2)}{x^2} - \frac{4(1-\beta^2)^2}{x^3} + \frac{3(1-\beta^2)^3}{4x^4} \right] \Big|_{x(a)}^{x(b)},$$

где

$$x(z') = 1 - \beta \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t = \frac{z-z'}{r_0}.$$

Из (4) определим изменение энергии сгустка

$$W = \frac{q^2}{4r_0} [T(z_2, b) - T(z_1, b) - T(z_2, a) + T(z_1, a)] \gamma,$$

где

$$T(z, z') = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{2} \frac{\beta \sqrt{1+i^2-t}}{(\sqrt{1+t^2}-\beta t)^2} - \frac{\beta (\sqrt{1-\beta^2})^2}{(\sqrt{1+t^2}-\beta t)^3} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\beta \sqrt{1+i^2-t}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$t = \frac{z-z'}{r_0}.$$

Отсюда следует, что в бесконечном гладком волноводе $\nabla_1(a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty)$ $E_{z_2} = 0$ и сгусток не изменяет своей энергии $W = 0$. При влете в полубесконечный волновод (a конечно, $b \rightarrow +\infty$) и при вылете из такого ($a \rightarrow -\infty, b$ конечно) на всем своем пути ($z_1 \rightarrow -\infty, z_2 \rightarrow +\infty$) сгусток изменяет энергию на величину

$$W = \pm \frac{\pi}{8} \frac{q^2}{r_0} \gamma,$$

где верхний и нижний знаки соответствуют влему и вылету сгустка.

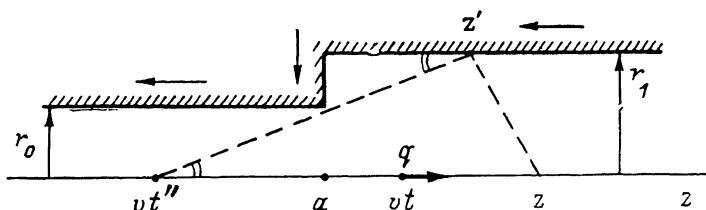


Рис. 5.

Изменение энергии сгустка, пролетающего мимо волноводного фланца (рис. 4), вычисляется сложением выражений энергий для диска с отверстием и полубесконечного волновода. Наличие острых краев сочленения фланца с волноводом не вносит существенной добавки в конечный результат, так как на малой площади dS края наведутся соответственно и малые заряды σdS и токи jdS .

4. Пусть заряд движется из бесконечности мимо сочленения волноводов разного радиуса в виде фланца (рис. 5). Вклад в изменение энергии сгустка вносят три поверхности: полубесконечный волновод радиуса r_0 , фланец при

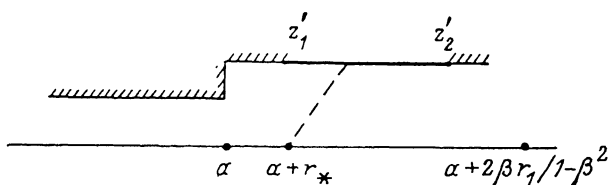


Рис. 6.

$z=a$ и полубесконечный волновод радиуса r_1 . Воздействие первых двух поверхностей рассматривалось выше; влияние на сгусток волновода большего радиуса необходимо рассматривать с учетом экранирующего действия ступеньки. Для данного момента времени t в близлежащей к заряду точке создается вторичное поле только от части области широкого волновода. Значения краевых точек z' этой области находятся из условия

$$\frac{vt - vt''}{v} = \frac{\sqrt{(z' - vt'')^2 + r_1^2} + \sqrt{(z - z')^2 + r_1^2}}{c},$$

которое с учетом соотношения подобия $(z' - vt'')/r_1 = (z' - a)/(r_1 - r_0)$ приводится к виду

$$vt = \epsilon a - (\epsilon - 1) z' + \beta \sqrt{\epsilon^2 (z' - a)^2 + r_1^2} + \beta \sqrt{(z - z')^2 + r_1^2}, \quad (5)$$

где $\epsilon = r_1/(r_1 - r_0)$.

Исследование этой зависимости приводит к двум возможностям формирования области влияния стенки. Если у сгустка $\gamma > \varepsilon + 1/2\sqrt{\varepsilon} = 2r_1 - r_0/2\sqrt{r_1(r_1 - r_0)}$, то он сначала встречает вторичное поле от широкого волновода в точке $z = a + r_*$, где $r_* = (r_1/\varepsilon)\sqrt{\beta^2(\varepsilon + 1)^2 - (\varepsilon - 1)^2}$ (рис. 6). По мере продвижения область волновода, воздействующая на сгусток, расширяется и лежит в интервале $z'_1 \leq z' \leq z'_2$, где $z'_{1,2}$ — корни уравнения (5) при $z = vt$. Начиная с местоположения заряда $vt \geq a + 2\beta r_1/(1 - \beta^2)$ на него влияет вся поверхность волновода в пределах $a \leq z' \leq z_2$, причем z'_2 растет с ростом vt .

Если величина $\gamma < \varepsilon + 1/2\sqrt{\varepsilon} = (2r_1 - r_0)/2\sqrt{r_1(r_1 - r_0)}$, то характер формирования области наведенных зарядов и токов иной (рис. 7). Для каждого значения $z = vt$ область поверхности влияния задается неравенством $z' \geq z'_1$, где z'_1 — наименьший корень уравнения (5) при $z = vt$. Начиная с $vt = a + 2\beta r_1/(1 - \beta^2)$ все точки полубесконечного волновода ($a \leq z' < +\infty$) участвуют в создании вторичного поля в месте нахождения сгустка.

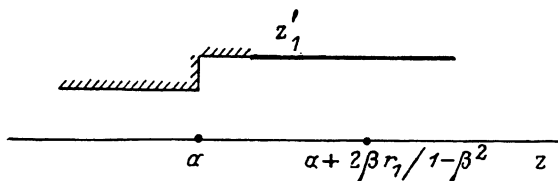


Рис. 7.

В результате интегрирования в (2) и (4) с учетом воздействия всех поверхностей волноводного перехода получаем следующие зависимости.

Для заряда с $\gamma > \varepsilon + 1/2\sqrt{\varepsilon}$ потери энергии на всем пути от $z_1 = -\infty$ до $z_2 = +\infty$ равны

$$W = -\frac{q^2}{8} \frac{r_1 - r_0}{r_1^2} \left[\left(\pi - \arctg \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \right) \frac{r_1 + r_0}{r_0} - \beta \sqrt{1 - \beta^2} (1 - 2\beta^2) \frac{r_1 - r_0}{r_0} + \frac{2}{3} \beta \sqrt{1 - \beta^2} (1 + 2\beta^2) \right] \gamma.$$

Если $\gamma < \varepsilon + 1/2\sqrt{\varepsilon}$, то для потерь имеем

$$W = -\frac{q^2}{8} \frac{(r_1 - r_0)^2}{r_1^2 r_0} \left[\pi \frac{r_1 + r_0}{r_1 - r_0} + \arctg \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} + \beta (2\beta^2 - 5) \sqrt{1 - \beta^2} - \frac{8}{3} \frac{r_1}{r_1 - r_0} \beta (\sqrt{1 - \beta^2})^3 \right] \gamma.$$

В ультрарелятивистском пределе $\gamma \gg 1$ обе формулы приводят к одному выражению

$$W = -\frac{\pi}{8} \frac{q^2}{r_0} \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2} \gamma.$$

Устремив здесь $r_1 \rightarrow \infty$, т. е. убрав волновод большого радиуса, приходим к формуле для потерь энергии

$$W = -\frac{\pi}{8} \frac{q^2}{r_0} \gamma,$$

что совпадает с потерями энергии сгустка, вылетающего из волновода, так как в ультрарелятивистском пределе влиянием экрана фланца на потери энергии можно пренебречь. Расчеты, проведенные для сгустка, пролетающего волноводное сочленение в обратном направлении, в ультрарелятивистском случае дают тот же результат, только с противоположным знаком.

5. Из приведенного рассмотрения следует, что характер взаимодействия сгустка со стенками типа полубесконечный волновод и экран существенно различен. Так, в первом случае изменение энергии сгустка возрастает пропорционально γ [8], тогда как во втором убывает пропорционально γ^2 . Это связано

с существенным ростом радиальной компоненты электрического поля E_{0r} , азимутальной компоненты магнитного поля $H_{0\varphi}$ и резким уменьшением продольной компоненты электрического поля E_{0z} релятивистского заряда, а следовательно, с соответствующими изменениями величин поверхностных зарядов и токов.

Автор выражает благодарность А. А. Рухадзе за полезную дискуссию и ряд ценных замечаний, Ю. Б. Мовсесянцу и Б. М. Урлину за поддержку работы.

Список литературы

- [1] Болотовский Б. М., Воскресенский Г. В. // УФН. 1966. Т. 88. № 2. С. 200—209.
- [2] Каргин В. И., Фоменко Г. П. // ЖТФ. 1976. Т. 46. Вып. 4. С. 648—654.
- [3] Фейнман Р., Хейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1977. Вып. 6. 265 с.
- [4] Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1966. 447 с.
- [5] Рубин С. Е. Взаимодействие электронного пучка с ускоряющей системой. М.: Энергоатомиздат, 1985. 13 с.

Институт медико-биологических проблем
Москва

Поступило в Редакцию
4 мая 1988 г.