Журнал технической физики, т. 59, в. 8, 1989

ПЕРИОД ВОЗВРАТА ПУАНКАРЕ В РЕЖИМЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА

В. С. Анищенко, А. Б. Нейман

Любому аттрактору динамической системы как инвариантному предельному множеству траекторий в фазовом пространстве присуща устойчивость по Пуассону, отражающая факт возвращаемости траекторий в заданную ε-окрестность начального состояния. Если аттрактор периодический или квазипериодический, то время возвращения траекторий есть период или квазипериод колебаний. Для странных аттракторов последовательность времен возврата Пуанкаре является случайной и требует статистического описания. Количественная оценка среднего времени возврата чрезвычайно важна для решения многих задач. Достаточно указать проблему определения длительности временны́х реализаций, необходимой для получения достоверных статистических характеристик процесса при усреднениях [1, 2].

В настоящей работе решается задача о среднем времени возврата (периоде возврата Пуанкаре) для динамических систем с экспоненциально неустойчивыми (странными) аттракторами, для которых предполагается существование стационарной инвариантной вероятностной меры $P(x)$ [3].

Пусть задана динамическая система, имеющая в N-мерном фазовом пространстве хаотический аттрактор, $P(x)$ — инвариантная плотность вероятности на аттракторе, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Выберем в качестве начального состояния x_0 точку в фазовом пространстве с координатами $x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0N}$. Решая динамическую задачу, проследим за фазовой траекторией до тех пор, пока она не возвратится в ε-окрестность исходной точки x_0. Время, которое для этого потребуется, и будет являться периодом возврата $T_B(x_0, \varepsilon)$. Период возврата зависит от начального состояния и величины ε.

Вероятность возвращения $q(x_0, \varepsilon)$ фазовой траектории в ε-окрестность точки x_0, которую обозначим $O_\varepsilon(x_0)$, равна

$$q(x_0, \varepsilon) = \int\limits_{x_{01}-\varepsilon/2}^{x_{01}+\varepsilon/2} \int\limits_{x_{0N}-\varepsilon/2}^{x_{0N}+\varepsilon/2} P(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots dx_N \simeq P(x_0)\, \varepsilon^N. \tag{1}$$

С другой стороны, для вероятности попадания траектории в $O_\varepsilon(x_0)$ можно записать выражение

$$q(x_0, \varepsilon) = \lim_{M \to \infty} \frac{n(x_0, \varepsilon)}{M}, \tag{2}$$

где $n(x_0, \varepsilon)$ — число попаданий фазовой точки в ε-окрестность x_0, M — общее число «испытаний».

Нас интересует вероятность первого попадания в $O_\varepsilon(x_0)$. При $\varepsilon \ll 1$ приближенно можно считать $n(x_0, \varepsilon)=1$ и переписать выражение для $q(x_0, \varepsilon)$ в виде

$$q(x_0, \varepsilon) \approx 1/M = 1/T_B(x_0, \varepsilon), \tag{3}$$

где $T_B(x_0, \varepsilon)$ — период возврата (временно́й шаг выбран единичным).

Сравнивая (1) и (3), можно записать приближенное равенство

$$T_B(x_0\ \varepsilon) = 1/P(x_0)\, \varepsilon^N. \tag{4}$$

Для среднего по аттрактору времени возврата получим

$$\langle T_B(\varepsilon)\rangle = \int T_B(x_0, \varepsilon)\, P(x_0)\, dx_0,$$

$$\langle T_B(\varepsilon)\rangle = V\varepsilon^{-N}, \tag{5}$$

где V — объем параллелепипеда в N-мерном фазовом пространстве, в который вложен аттрактор.

Таким образом, среднее время возврата Пуанкаре оценивается как отношение объема аттрактора к объему ε-окрестности исходного состояния.

С целью экспериментальной проверки полученного соотношения (5) были проведены численные расчеты периода возврата Пуанкаре для простых динамических систем со стохастическим поведением. Так, для квадратичного отображения единичного отрезка в себя $x_{n+1}=\alpha x_n(1-x_n)$ при значениях $\alpha > \alpha_{1p}=3.56\ldots$ средние времена возврата оказались равными около ε^{-1} и практически не зависящими от α.

Для отображения Хенона ($N=2$) формула (5) также получила численное подтверждение. При $\varepsilon=10^{-2}$ средний период возврата имеет порядок 10^4. Проиллюстрируем возможные следствия указанного результата. Например, при численном построении двумерного закона распределения $P(x, y)$, описывающего аттрактор Хенона, требуется обеспечить наличие в каждом элементе дискретизации фазового пространства не менее n_0 точек ($n_0 > 1$). Спрашивается, какое число итераций N_0 отображения позволит получить ожидаемый результат (при заданном n_0). Нетрудно видеть, что число итераций N_0 должно удовлетворять неравенству

$$N_0 > \langle T_B(\varepsilon)\rangle n_0 = V n_0 \varepsilon^{-2}. \tag{6}$$

Значит, если $n_0=10^2$, то число итераций N_0 отображения для вычисления двумерной плотности $P(x, y)$ должно быть не менее 10^6 при $V \approx 1$, $\varepsilon=10^{-2}$.

В заключение отметим важное обстоятельство. В силу конечной и относительно не высокой точности счета (например, при использовании персональных компьютеров среднего класса) хаотические траектории одномерных отображений в итоге будут характеризоваться наличием периода. Это принципиальная погрешность, обусловленная конечной точностью и наличием периода возврата Пуанкаре. Для динамических систем с размерностью фазового пространства $N \geqslant 2$ времена возврата резко возрастают и, как правило, в обычных численных экспериментах не достигаются.

Список литературы

[1] *Бендат Дж., Пирсол А.* Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1974. 463 с.
[2] *Семесенко М. П.* Препринт Института кибернетики. № 78-21. Киев, 1978.
[3] *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.

Поступило в Редакцию
6 июня 1988 г.
В окончательной редакции
28 ноября 1988 г.

---

01 *Журнал технической физики, т. 59, в. 8, 1989*

ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ САМОПОДОБНЫХ СТРУКТУР

Д. М. Ваврив, В. Б. Рябов

Фундаментальной характеристикой самоподобных объектов, возникающих, например, при моделировании турбулентности [1], кластерных структур в теории просачивания [2], стохастических колебаний [3], является фрактальная размерность Хаусдорфа—Безиковича D_H [4]. Значение D_H принципиально важно для оценки эффективного числа степеней свободы и для различения стохастических колебаний и шумов.

Непосредственное вычисление D_H связано с большими математическими и вычислительными трудностями, и, насколько нам известно, в настоящее время существует лишь один относительно быстро сходящийся метод [5], определяющий функцию размерности $D(\gamma)$, который в принципе позволяет вычислить точно значение D_H. Однако наиболее широко используемый подход к оценке D_H основывается на расчете корреляционной размерности D_ν [6], строгое соответствие которой с D_H не установлено, известно только, что $D_\nu \leqslant D_H$.

Целью данной работы является доказательство тождественности этих величин ($D_\nu \equiv D_H$) для самоподобных структур. Для конкретности мы будем говорить о странных аттракторах (СА).