Количественная обработка серии аналогичных бифуркационных диаграмм позволила построить двухпараметрическую диаграмму режимов в плоскости параметров $V_{\sim}-V_{=}$ (рис. 2). Значение параметра $V_{=}$ изменялось в пределах $-1 \leqslant V_{=} \leqslant 1$ В, а амплитуда внешнего воздействия — $0 \leqslant V_{\sim} \leqslant 3$ В. В области *1* существуют вынужденные колебания с частотой внешней силы. Сплошная линия, разделяющая области *1* и *2*, соответствует границе, на которой происходит первая бифуркация удвоения периода колебаний. Область *2* — область существования субгармоники тока *I* порядка 1/2. Штриховая линия в области *2* обозначает нижнюю границу гистерезиса нелинейного субрезонанса 1/2. Заштрихованные области являются зонами удвоения периода колебаний на основе субрезонанса 1/2 и 1/3 соответственно. Далее области CA_2 и CA_3 — зоны странных аттракторов, в которых развитие хаотических колебаний происходит на основе субгармонических резонансов 1/2 и 1/3 соответственно. Из диаграммы следует, что зарождение бифуркационных явлений в осцилляторе локализовано в очень узком интервале изменения параметра $V_{=}$: $\Delta V_{=}=0.42-0.44$ В. Из экспериментальной вольт-фарадной характеристики данного $p-n$-перехода следует, что интервалу $\Delta V_{=}$ соответствует область максимальной нелинейности изменения емкости. При значении $V_{=} \geqslant 0.5$ В колебания нелинейного осциллятора шунтируются прямым током, протекающим через открытый $p-n$-переход.

Таким образом, величина и знак напряжения смещения на $p-n$-переходе нелинейного колебательного контура существенно влияют на бифуркационные явления. Действительно, амплитуда внешнего сигнала, необходимая для первой бифуркации удвоения в этом интервале $\Delta V_{=}$, примерно в 5 раз меньше, чем при отсутствии прямого смещения $V_{=}=0$. Для возникновения первой области хаоса CA_2 такое отношение амплитуд внешнего сигнала составляет 3.6. Величиной постоянного смещения можно задавать уровень внешнего периодического сигнала, при котором в контуре возникают хаотические колебания.

В заключение авторы выражают благодарность А. С. Дмитриеву и В. Я. Кислову за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] *Linsay P. S.* // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 47. N 19. P. 1349—1352.
[2] *Testa J., Perez J., Jeffries C.* // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48. N 11. P. 714—717.
[3] *Jeffries C., Perez J.* // Phys. Rev. A. 1983. Vol. 27. N 1. P. 601—603.
[4] *Астахов В. В., Безручко Б. П., Селезнев Е. П.* // РиЭ. 1987. Т. 32. № 12. С. 2558—2566.

Институт радиотехники и электроники
АН СССР
Москва

Поступило в Редакцию
18 августа 1988 г.

02; 10 *Журнал технической физики, т. 59, в. 8, 1989*

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОГИБАЮЩИХ ДЛЯ РАСЧЕТА КАТОДНЫХ ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ИХ АБЕРРАЦИЙ

И. А. Петров, Е. В. Шпак

Метод огибающих, при использовании которого вместо расчета большого количества траекторий находят огибающую всего пучка в целом, нашел широкое применение для пучков заряженных частиц высоких энергий [1, 2]. Как правило, в этих работах не учитывались аберрации системы. Выражения для огибающих при учете отдельных видов аберраций (сферической аберрации или дисторсии) найдены в работе [3]. В случае, когда наибольший вклад в аберрации вносит дисторсия системы, метод был применен для расчета входных камер ФЭУ, которые являются катодными электронно-оптическими системами [4]. При расчете свойств катодных линз обычно необходимо учитывать и остальные виды аберраций. Поэтому данная работа посвящена развитию метода огибающих в применении к катодным системам с учетом аберраций третьего порядка. Полученные результаты применены к расчету входных камер ФЭУ, но могут быть также использованы при расчете и оптимизации других катодных ЭОС.

Катодные системы отличаются от других ЭОС, фокусирующих пучки заряженных частиц, имеющие сравнительно большую скорость вдоль продольной оси системы и малые углы наклона траекторий к этой оси, тем, что частицы вылетают из катода под произвольными углами и тангенс угла наклона не может быть использован в качестве малого параметра для нахождения аберрационных рядов. Вместо него используется начальная радиальная скорость частиц. Изучению катодных систем посвящено большое количество работ (см., например, [5-7]). Параксиальное уравнение траекторий для осесимметричной системы имеет вид [6]

$$r'' + \frac{\Phi' r'}{2(\Phi - \Phi_0 + \varepsilon_z)} + \frac{\Phi'' r}{4(\Phi - \Phi_0 + \varepsilon_z)} = 0, \tag{1}$$

где Φ — потенциал на оси z, Φ_0 — этот же потенциал при $z = z_0$, ε — начальная энергия частицы, $\varepsilon_z = \varepsilon \cos^2\theta$, θ — угол наклона траектории к оси z у катода, штрих означает дифференцирование по z.

Если линейно независимые решения u, ω уравнения (1) удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$u(z_0) = 0, \;\; u'(z_0) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\,\cos\theta}, \quad \omega(z_0) = 1, \;\; \omega'(z_0) = 0, \tag{2}$$

то общее решение имеет вид

$$r = r_0\omega + \sqrt{\varepsilon}\,\sin\theta u, \tag{2a}$$

где r_0 — значение r при $z = z_0$ (на катоде).

Величина $\sqrt{\varepsilon}\sin\theta$ пропорциональна радиальной скорости частицы. Обозначим $\sqrt{\varepsilon}\sin\theta = v_r$. Если ограничиться рассмотрением движения в меридиональных плоскостях, то аберрации третьего порядка осесимметричной катодной системы характеризуются четырьмя коэффициентами B, F, D и E, которые внутри системы являются функциями z [7]

$$r = r_0\omega + v_r u + B v_r^3 + F r_0 v_r^2 + D r_0^2 v_r + E r_0^3. \tag{3}$$

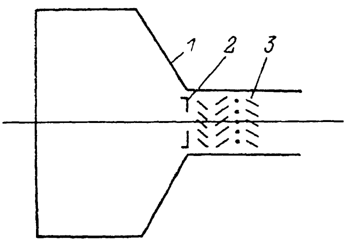

Рис. 1. Схема исследуемой катодной системы.

1 — фотокатод, 2 — модулятор, 3 — умножительная система.

Рассмотрим случай, когда значения координат и радиальных скоростей при $z = z_0$ ограничены эллипсом

$$\left(\frac{r_0}{r_m}\right)^2 + \left(\frac{v_r}{v_m}\right)^2 = 1, \tag{4}$$

где r_m и v_m — максимальные значения r_0 и v_r соответственно.

В этом случае огибающая пучка, представляющая собою его границу в реальном пространстве, может быть найдена методом нахождения огибающих кривых, зависящих от двух параметров, если известна связь между этими параметрами [3]. Связь между параметрами r_0 и v_r определена выражением (4). Для нахождения огибающей достаточно выразить один из параметров, например v_r, через другой (r_0), подставить его в выражение для траектории (3)

$$r = r_0\omega + v_m u\sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r_m}\right)^2} + B v_m^3\left[1 - \left(\frac{r_0}{r_m}\right)^2\right]^{3/2} + \\ + F r_0 v_m^2 - F r_0^3 \frac{v_m^2}{r_m^2} + D r_0^2 v_m\sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r_m}\right)^2} + E r_0^3 \tag{5}$$

и, продифференцировав выражение (5) по r_0, приравнять к нулю производную $\partial r/\partial r_0$. Решение r_0 полученного уравнения, подставленное в (5), определит верхнюю ветвь огибающей. Нижняя симметрична ей относительно оси z. Приравняв к нулю $\partial r/\partial r_0$, мы получим кубическое уравнение относительно величины $p = r_0^2$

$$A_1 p^3 + A_2 p^2 + A_3 p + A_4 = 0, \tag{6}$$

где

$$A_1 = \frac{9}{r_m^2}\left(B_1^2\frac{v_m^2}{r_m^2} + B_2^2\right), \quad A_2 = 3\left(2B_1B_3\frac{v_m^2}{r_m^2} - 3B_2^2 + 2B_2B_4\right),$$

$$A_3 = v_m^2 B_3 + r_m^2 B_2^2 - 6r_m^2 B_2 B_4, \quad A_4 = -r_m^4 B_2^2,$$
$$B_1 = r_m^2 D - v_m^2 B_1 B_2 = r_m^2 E - v_m^2 F, \quad B_3 = u + v_m^2 B - 2r_m^2 D, \tag{7}$$
$$B_4 = \omega + F v_m^2.$$

После несложных преобразований кубического уравнения и его решения, пренебрегая членами более высоких порядков, чем третий, получим выражение для огибающей

$$\bar{r}=\bar{r}_p+B\left(\frac{uv_m^2}{\bar{r}_p}\right)^3+F\left(\frac{uv_m^2}{\bar{r}_p}\right)^2\left(\frac{\omega r_m^2}{\bar{r}_p}\right)+D\left(\frac{uv_m^2}{\bar{r}_p}\right)\left(\frac{\omega r_m^2}{\bar{r}_p}\right)^2+E\left(\frac{\omega r_m^2}{\bar{r}_p}\right)^3, \tag{8}$$

где $\bar{r}_p=\sqrt{(r_m\omega)^2+(v_m u)^2}$ — огибающая параксиальных траекторий.

В области кроссовера, где нередко параксиальные члены сравнимы по величине с аберрационными, большую точность расчета огибающе можно получить, находя ее не с помощью выражения (8), а решая уравнение (6) и подставляя $r_0=\sqrt{p}$ в уравнение (5).

На рис. 1 показана катодная линза входной камеры ФЭУ с диаметром фотокатода 20 см и длиной L=20 см, для которой рассчитывались траектории и огибающие с учетом оберраций. Разность потенциалов между модулятором и катодом составляла 300 В. Наибольшие значения r_0 и v_r были выбраны: r_m=10 см и v_m=0.707 (ε=1 эВ, θ=45°). Для получения достоверного результата при расчете огибающих с помощью выражений (5) или (8) нужно, чтобы траектории частиц в линзе с достаточной степенью точности описывались выражением (3), т. е. чтобы вклад аберраций более высокого порядка был невелик. Поэтому был проведен

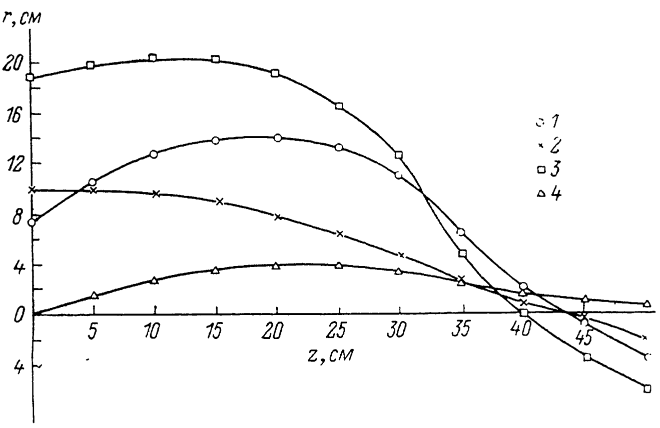

Рис. 2.

численный расчет траекторий, начальные значения r_0 и v_r для которых ограничены эллипсом (4), с использованием пакета прикладных программ для ОС ЕС ЭВМ [8]. Электростатическое поле рассчитывается интегральным методом с применением квадратур Гаусса до 16-го порядка, уравнение движения интегрируется методом Рунге—Кутта—Нистрема с переменным шагом. Для нахождения решения параксиального уравнения ω (z) рассчитывалась траектория с начальными условиями v_r=0, r_0=1 см; для нахождения u (z)—r_0=0 v_r=0.0875 (ε=1 эВ, θ=5°). Аберрационные коэффициенты B (z) и E (z) находились с помощью траекторий r_0=0, ε=1 эВ, θ=45° и r_0=10 см, v_r=0, D (z) — с помощью двух траекторий r_0=8.35 см, ε=1 эВ, θ=23° и r_0=5.55 см, θ=36°, ε=1 эВ. На основании полученных данных было рассчитано по формуле (3) большое количество траекторий с значениями r_0 и v_r, лежащими внутри или на границе эллипса (4). Расхождение между полученными результатами и численными расчетами на ЭВМ не превышает 5 %, за исключением точек, где r мало́. В последнем случае более правомерным является сравнение координаты z, при которой кривые r (z) пересекают ось. При таком сравнении расхождение составляет 2 %. На рис. 2 приведены результаты расчета отдельных траекторий, вычисленных на ЭВМ (сплошные кривые) и с помощью выражения (3): *1* — значения r (z) для траектории с r_0=3.73 см, v_r=0.656; *2* — r_0=5.0 см, v_r=0.174; *3* — r_0=9.40, v_r=0.242; *4* — r_0=0, v_r=0.375. Из рисунка видно, что все приведенные траектории хорошо аппроксимируются приближенным выражением (3), в котором мы ограничились членами третьего порядка малости.

На рис. 3 приведены огибающая пучка частиц, начальные значения координат и скоростей которого ограничены эллипсом (4) при r_m=20 см, v_m=0.707, и отдельные траектории, рассчитанные на ЭВМ. Огибающая находилась с помощью выражения (5), в которое подставлялись значения $r_0=\sqrt{p}$, где p — решение уравнения (6). Обе ветви огибающей смещены для наглядности на 1 мм от оси системы. Точность расчета огибающей определяется в основном точностью аппроксимации отдельных траекторий с помощью аберрационного полинома (3).

так как дополнительных упрощающих предположений при нахождении огибающей в этом случае не делается.

Таким образом, для расчета огибающих пучков, лежащих в меридиональных плоскостях, необходимо рассчитать шесть траекторий: две — для нахождения решений u и ω пара-

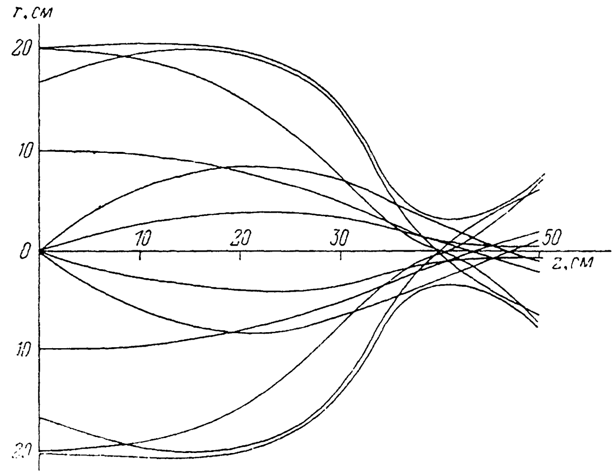

Рис. 3. Траектории и огибающие в катодной линзе, являющейся входной камерой ФЭУ с большим фотокатодом.

ксиального уравнения и четыре — для аберрационных функций $B(z)$, $E(z)$, $F(z)$, $D(z)$. С помощью огибающих легко следить за токопрохождением пучка, определять трансмиссию системы. Знание огибающей упрощает нахождение кроссовера, который совпадает с ее минимумом. При использовании наиболее широко распространенных траекторных методов расчета для нахождения кроссовера и определения трансмиссии системы необходим расчет значительно большего количества траекторий.

Список литературы

[1] *Штеффен К.* Оптика пучков высокой энергии. М.: Мир, 1969. 222 с.
[2] *Лоусон Дж.* Физика пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1960. 438 с.
[3] *Шпак Е. В., Гаврилов Е. И.* // ЖТФ. 1982. Т. 52. Вып. 6. С. 1188—1193.
[4] *Гаврилов Е. И., Петров И. А., Шпак Е. В.* // Матер. IX научно-техн. конф. по ЭЛГ и ФЭП «Электровакуумные и газоразрядные приборы». Л., 1982. С. 28—30.
[5] *Воробьев Ю. В.* // ЖТФ. 1956. Т. 26. Вып. 10. С. 2269—2280.
[6] *Бонштедт Б. Е.* // РиЭ. 1964. Т. 9. № 5. С. 844—850.
[7] *Власов А. Г., Шапиро Ю. А.* Методы расчета эмиссионных электронно-оптических систем. Л.: Машиностроение, 1974. 183 с.
[8] *Фрейкман Б. Г.* // Методы расчета электронно-оптических систем. Новосибирск, 1982. С. 154—15 ,

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР
Ленинград

Поступило в Редакцию
31 августа 1988 г.

03; 12 *Журнал технической физики, т. 59, в. 8, 1989*

ОСОБЕННОСТИ РЕЛАКСАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ УДАРНЫХ ВОЛН В МОЛЕКУЛЯРНЫХ ГАЗАХ НА ПРИМЕРЕ ТРИФТОРИОДМЕТАНА

А. П. Бедин

Одной из особенностей обтекания тел релаксирующими газами является возникновение при достижении телом некоторой критической скорости V_k так называемой релаксационной неустойчивости течения, выражающейся в турбулизации ударного слоя и невязкого следа,