1989 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 59, в. 9
1989 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 59, N 9

01; 03

О ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ НАМАГНИЧИВАЮЩЕГОСЯ ШАРА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. М. Коровин

В связи с широким использованием сильно неоднородных магнитных полей в технике (высокоградиентная магнитная сепарация, магнитная печать и другие приложения) значительный интерес представляет вопрос об уточнении дипольного приближения для магнитных сил, действующих на взвешенные в жидкости магнитно-мягкие частицы.

В работе методом разделения переменных построено решение задачи об искажении внешнего плоского магнитного поля, заданного в магнитной жидкости, при внесении в жидкость шара из магнитно-мягкого материала. Получено пригодное как для плоских, так и для трехмерных полей выражение для потенциальной энергии шара, позволяющее в точной постановке вычислить действующую на шар магнитную силу.

1. Рассмотрим некоторый объем магнитной жидкости, в котором с помощью внешних источников создано магнитное поле $\vec{\mathscr{G}}$ (x, y, z). Пусть далее в жидкость помещается намагничивающееся тело. В том случае, когда связь между индукцией и магнитным полем линейна, а магнитные восприимчивости тела χ_1 и жидкости χ_2 постоянны, действующая на тело пондеромоторная сила F вычисляется по формуле [1]

$$\mathbf{F} = -\nabla E, \quad E = K \int\limits_V \vec{\mathscr{G}} \mathbf{H}_1 dx dy dz, \quad K = \frac{1}{2}(\chi_2 - \chi_1), \tag{1}$$

где $\mathbf{H}_1$ (x, y, z) — магнитное поле внутри тела. В дальнейшем индексом 1 отмечаются величины, относящиеся к телу, а индексом 2 — к окружающей его жидкости. Интегрирование в (1) проводится по объему тела, положение которого характеризуется координатами центра инерции и углами Эйлера. Величина E — это потенциальная энергия намагничивающегося тела в магнитном поле при фиксированных токах, создающих поле. При вычислении силы дифференцирование E проводится по координатам центра инерции тела.

В приложениях широкое применение находят взвешенные в жидкостях намагничивающиеся частицы, движение которых управляется приложенным извне магнитным полем. В случае обладающих малой магнитной восприимчивостью частиц, находящихся в квазиоднородных полях, слабо изменяющихся на характерных линейных размерах частиц, нахождение силы не вызывает затруднений. При исследовании же поведения частиц в сильно неоднородных полях, реализуемых на практике в таких процессах, как высокоградиентная магнитная сепарация [2] или магнитная печать [3], вычисление силы усложняется.

Предпринимавшиеся попытки решения этой задачи ограничивались исследованием парамагнитных частиц, для которых искажение приложенного магнитного поля, создаваемое самими частицами, пренебрежимо мало́, причем рассматривались частицы сферической формы, взвешенные в жидком парамагнетике. Однако даже в этом случае точное выражение для E найдено лишь в нескольких частных случаях для магнитных полей достаточно простой геометрии [4–7]. Следует также отметить, что предложенный в [5, 8] метод нахождения E, требующий кропотливых вычислений уже в простейшем из рассмотренных в [8] примеров, применим лишь в случае плоских магнитных полей.

В данной работе получено общее выражение E для находящегося в магнитной жидкости магнитно-мягкого шара, существенно искажающего приложенное поле. Найденная формула позволяет вычислять пондеромоторную силу, действующую на шар как в плоских, так и в трехмерных внешних полях.

2. Сформулируем задачу о расчете магнитных полей $\mathbf{H}_k = \nabla u_k$, $k=1, 2$ внутри и вне шара, внесенного в магнитную жидкость, где первоначально имелось магнитное поле $\vec{\mathscr{G}}$. Вводя наряду с декартовой x, y, z сферическую систему координат r, ϑ, φ, связанную с шаром,

$$x - x_0 = r \sin\vartheta \cos\varphi \quad y - y_0 = r \sin\vartheta \sin\varphi \quad z - z_0 = r \cos\vartheta, \tag{2}$$

имеем

$$\Delta u_k = 0, \ k = 1, \ 2; \ r = b : u_1 = u_2, \ \mu_1 \ \frac{\partial u_1}{\partial r} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial r},$$

$$r \to 0 : |\nabla u_1| < \infty; \ r \to \infty : \nabla u_2 \to \vec{\mathscr{G}}, \tag{3}$$

где μ_1, μ_2 — магнитные проницаемости, а b — радиус шара.

Поскольку источники, создающие поле $\mathscr{G}$, расположены вне магнитной жидкости, то

$$\Delta u = 0, \ \vec{\mathscr{G}} = \nabla u. \tag{4}$$

Ограничимся вначале исследованием случая плоских полей ∇, когда $u = u(x, y)$. Раскладывая потенциал u в ряд Тейлора, с учетом (2) имеем

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} d^n u(x_0, y_0),$$

$$d^n u(x_0, y_0) = r^n \sin^n\vartheta \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y}\right)^n u \,\Big|_{x_0, y_0}. \tag{5}$$

При $n \geqslant 2$ уравнение Лапласа (4) накладывает $n-1$ линейную связь между $n+1$ коэффициентами $d^n u(x_0, y_0)/dx^{n-k}dy^k$, входящими в $d^n u(x_0, y_0)$, ввиду чего среди них имеется лишь два линейно независимых коэффициента, через которые выражаются остальные $n-1$ производные n-го порядка. С учетом этого замечания нетрудно показать

$$d^n u(x_0, y_0) = r^n \sin^n\vartheta \Big[(\cos^n\varphi - C_n^2 \cos^{n-2}\varphi \sin^2\varphi +$$

$$+ C_n^4 \cos^{n-4}\varphi \sin^4\varphi - \ldots) \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \mathscr{G}_x \Big|_{x_0, y_0} + (n \cos^{n-1}\varphi \sin\varphi -$$

$$- C_n^3 \cos^{n-3}\varphi \sin^3\varphi + C_n^5 \cos^{n-5}\varphi \sin^5\varphi - \ldots) \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \mathscr{G}_y \Big|_{x_0, y_0}\Big],$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{6}$$

Далее введем в рассмотрение сферические функции

$$Y_{nn}^e(\vartheta, \varphi) = P_n^n(\cos\vartheta)\cos n\varphi, \ \ Y_{nn}^0(\vartheta, \varphi) = P_n^n(\cos\vartheta)\sin n\varphi.$$

Учитывая известные выражения присоединенных функций Лежандра первого рода $P_n^n(\cos\vartheta)$ через $\sin^n\vartheta$ [9] и тригонометрических функций $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ через $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ [10], с помощью (5), (6) находим

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \psi_n; \ \ \psi_n = c_n Y_{nn}^e + s_n Y_{nn}^0,$$

$$c_n = \frac{1}{n!(2n-1)!!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \mathscr{G}_x \Big|_{x_0, y_0}; \ \ s_n = \frac{1}{n!(2n-1)!!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \mathscr{G}_y \Big|_{x_0, y_0}. \tag{7}$$

Таким образом, в отсутствие шара

$$\vec{\mathcal{G}}=\vec{\mathcal{G}}_0+\sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[(n+1)(c_{n+1}\mathbf{P}^e_{n+1,\,n+1}+s_{n+1}\mathbf{P}^0_{n+1,\,n+1})+\right.$$

$$\left.+\sqrt{(n+1)(n+2)}\,(c_{n+1}\mathbf{B}^e_{n+1,\,n+1}+s_{n+1}\mathbf{B}^0_{n+1,\,n+1})\right],\quad \vec{\mathcal{G}}=\vec{\mathcal{G}}(x_0,\ y_0). \tag{8}$$

Здесь $\mathbf{P}^s_{nn}$, $\mathbf{B}^s_{nn}$ — векторные сферические гармоники [11]

$$\mathbf{P}^s_{nn}=Y^s_{nn}\mathbf{a}_r,\quad \mathbf{B}^s_{nn}=\frac{r}{\sqrt{n(n+1)}}\nabla Y^s_{nn},\quad n=1,\ 2,\ \ldots;\ s=e,\ 0,$$

а $\mathbf{a}_r$ — единичный вектор вдоль координатной линии r сферической системы координат. На сфере любые две гармоники $\mathbf{P}^s_{mm}$, $\mathbf{B}^\sigma_{nn}$ ортогональны друг другу, кроме того,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathbf{P}^s_{mm}\mathbf{P}^\sigma_{nn}\sin\vartheta d\vartheta d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathbf{B}^s_{mm}\mathbf{B}^\sigma_{nn}\sin\vartheta d\vartheta d\varphi=\frac{2\pi(2n)!}{2n+1}\delta_{s\sigma}\delta_{mn},$$

$$\delta_{mn}=\begin{cases}0 \text{ при } m\neq n,\\ 1 \text{ при } m=n.\end{cases} \tag{9}$$

Принимая во внимание (7), (8), с помощью метода разделения переменных нетрудно получить решение задачи (3)

$$u_1=u(x_0,\ y_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa_n r^n\psi_n,\quad \varkappa_n=\frac{(2n+1)\mu_2}{n\mu_1+(n+1)\mu_2},$$

$$u_2=u(x_0,\ y_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\left[r^n+(\varkappa_n-1)\frac{b^{2n+1}}{r^{n+1}}\right]$$

и далее вычислить поле внутри шара

$$\mathbf{H}_1=\varkappa_1\vec{\mathcal{G}}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa_{n+1}r^n\left[(n+1)(c_{n+1}\mathbf{P}^e_{n+1,\,n+1}+s_{n+1}\mathbf{P}^0_{n+1,\,n+1})+\right.$$

$$\left.+\sqrt{(n+1)(n+2)}\,(c_{n+1}\mathbf{B}^e_{n+1,\,n+1}+s_{n+1}\mathbf{B}^0_{n+1,\,n+1})\right]. \tag{10}$$

Подставляя затем выражения (8), (10) в (1), в силу (9) имеем

$$E=2\pi b^3K\left[\frac{2\varkappa_1}{3}\mathcal{G}_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa_{n+1}b^{2n}(c^2_{n+1}+s^2_{n+1})\frac{(n+1)(2n+2)!}{2n+3}\right].$$

Заметим, что $(2n+2)!=2^{n+1}(n+1)!(2n+1)!!$. Принимая во внимание (4), нетрудно показать

$$c^2_{n+1}+s^2_{n+1}=2^{-2n}[(n+1)!(2n+1)!!]^{-2}\Delta^n\mathcal{G}^2\big|_{x_0,\,y_0},$$

где Δ^n — полигармонический оператор.

С учетом этих равенств выражение для потенциальной энергии шара в магнитном поле принимает вид

$$E=4\pi\mu_2 b^3K\left[\frac{1}{\mu_1+2\mu_2}\mathcal{G}_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}}{n!(2n+1)!!}\frac{b^{2n}}{(n+1)\mu_1+(n+2)\mu_2}\Delta^n\mathcal{G}^2\big|_{x_0,\,y_0}\right]. \tag{11}$$

В качестве примера вычислим потенциальную энергию шара в магнитной жидкости, окружающей однородно намагниченный круглый цилиндр радиуса a, при наличии однородного поперечного поля $\mathbf{H}_0$, параллельного намагниченности цилиндра $\mathbf{M}$. Вводя полярную систему координат R, Φ, где угол Φ отсчитывается от направления $\mathbf{H}_0$, запишем задачу о расчете магнитных полей в жидкости (4) и внутри цилиндра $\mathbf{H}_i = \nabla u_i$

$$\Delta u_i = 0,\ \Delta u = 0;\ R = a:\ u_i = u,\ \frac{\partial u_i}{\partial R} + 4\pi M \cos\Phi = \mu_2 \frac{\partial u}{\partial R},$$

$$R \to 0:\ |\nabla u_i| < \infty;\ R \to \infty:\ u \to H_0 R \cos\Phi. \tag{12}$$

Решение (12) записывается следующим образом:

$$u = \cos\Phi\left(H_0 R + \frac{1}{\mu_2 + 1}\frac{a^2}{R} N\right);\ \ N = (\mu_2 - 1) H_0 - 4\pi M,$$

$$u_i = \frac{2}{\mu_2 + 1} R \cos\Phi\,(\mu_2 H_0 - 2\pi M). \tag{13}$$

Далее находим

$$\mathscr{G}^2 = H_0^2 - \frac{2}{\mu_2 + 1}\left(\frac{a}{R}\right)^2 H_0 N \cos 2\Phi + \frac{1}{(\mu_2 + 1)^2}\left(\frac{a}{R}\right)^4 N^2,$$

$$\Delta^n \mathscr{G}^2 = \frac{2^{2n} a^4}{R^{2n+4}}\left[\frac{(n+1)\,!}{\mu^2 + 1}\right]^2 N^2. \tag{14}$$

Пусть теперь в поле (13) помещен шар радиуса b, центр которого находится в точке с координатами R_0, Φ_0, при этом, естественно, $R_0 \geqslant a + b$. Подставляя (14) в выражение для энергии (11), получаем

$$E = E_0 + E_1 + E_2;\ \ E_0 = \frac{4\pi\mu_2 b^3}{\mu_1 + 2\mu_2} K H_0^2;$$

$$E_1 = -\frac{8\pi\mu_2 b^3}{(\mu_2 + 1)(\mu_1 + 2\mu_2)}\left(\frac{a}{R_0}\right)^2 K H_0 N \cos 2\Phi_0,$$

$$E_2 = \frac{4\pi\mu_2 b^3}{(\mu_2 + 1)^2}\left(\frac{a}{R_0}\right)^4 K N^2 \left[\frac{1}{\mu_1 + 2\mu_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \varepsilon^n}{(2n+1)\,!\,!}\ \frac{(n+1)(n+1)\,!}{(n+1)\mu_1 + (n+2)\mu_2}\right];$$

$$\varepsilon = \left(\frac{b}{R_0}\right)^2.$$

Полагая в этих выражениях $\mu_1 = \mu_2 = 1$, приходим к случаю [4, 8] парамагнитного шара в жидком парамагнетике. При этом вычисленные в [8] первые три члена разложения E_2 по степеням ε совпадают с результатом, следующим из полученной здесь формулы.

3. Обратимся к случаю пространственных внешних полей. В отличие от (7) каждый из гармонических полиномов степени n, по которым разлагается потенциал $u\,(x,\,y,\,z)$, содержит $2n+1$ линейно независимых коэффициентов [12]. Покажем, что, несмотря на такое усложнение, формула (11) применима и в трехмерном случае.

С этой целью рассмотрим пространственный аналог задачи (12) — равномерно намагниченный шар радиуса a в магнитной жидкости при наличии однородного на бесконечности поля $\mathbf{H}_0$, совпадающего по направлению с намагниченностью шара $\mathbf{M}$. Решение этой задачи (u_i — потенциал поля внутри шара) имеет следующий вид:

$$u = \cos\Theta\left(H_0 R + \frac{1}{2\mu_2 + 1)}\frac{a^3}{R^2} N\right),$$

$$u_i = \frac{\cos\Theta}{2\mu_2 + 1} R\,(3\mu_2 H_0 - 4\pi M). \tag{15}$$

При записи (15) используется связанная с шаром сферическая система координат R, Θ, Φ, в которой полярный угол Θ отсчитывается от направления поля $\mathbf{H}_0$. Пусть теперь в точку (R_0, Θ_0, 0) поля (15) помещен магнитно-мягкий шар радиуса b. С помощью (15) находим

$$\mathscr{G}^2 = H_0^2 + \frac{4}{2\mu_2+1}\left(\frac{a}{R}\right)^3 P_2 H_0 N + \frac{2}{(2\mu_2+1)^2}\left(\frac{a}{R}\right)^6 (P_2+1) N^2,$$

$$\Delta^n \mathscr{G}^2 = \frac{2^{n-2}}{3(2\mu_2+1)^2}\frac{a^6}{R^{2n+6}} N^2 (n+1)!\,(2n+1)!!\,\{4(n+2)(2n+3)+$$

$$+P_2[(2n+7)(2n+3)+3]\};\ \ P_2 = \frac{1}{2}(3\cos^2\Theta - 1).$$

Подставляя эти выражения в (11), получаем

$$E = E_0 + E_1 + E_2;\ \ E_0 = \frac{4\pi\mu_2 b^3}{\mu_1+2\mu_2} K H_0^2;$$

$$E_1 = \frac{16\pi\mu_2 b^3}{(2\mu_2+1)(\mu_1+2\mu_2)}\left(\frac{a}{R_0}\right)^3 P_2|_{\Theta_0} K H_0 N,$$

$$E_2 = \frac{\pi\mu_2 b^3}{3(2\mu_2+1)^2}\left(\frac{a}{R_0}\right)^6 K N^2 \left\{\frac{24}{\mu_1+2\mu_2}(P_2|_{\Theta_0}+1)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n (n+1)}{(n+1)\mu_1+(n+2)\mu_2}[4(n+2)(2n+3)+P_2|_{\Theta_0}[(2n+7)(2n+3)+3]]\right\},$$

$$\varepsilon = \left(\frac{b}{R_0}\right)^2.$$

Полагая здесь $\mu_1=\mu_2=1$, легко видеть, что E_0, E_1 совпадают с первыми двумя слагаемыми для потенциальной энергии парамагнитного шара в парамагнитной жидкости, вычисленными для этого частного случая в работе [6]. Последнее же выражение при $\mu_1=\mu_2=1$

$$E_2 = 16 K M^2 \left(\frac{\pi b}{3}\right)^3 \left(\frac{a}{R_0}\right)^6 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n (n+1)\left[4(n+2)+P_2|_{\Theta_0}\left(2n+7+\frac{3}{2n+3}\right)\right],$$

как нетрудно убедиться, является разложением по степеням ε функции

$$E_2(R_0,\ \Theta_0) = \frac{16\pi^3 a^6}{9} K M^2 \left\{\left[\frac{R_0^2+b^2}{4b(R_0^2-b^2)^2} - \frac{1}{8R_0^3}\ln\frac{R_0+b}{R_0-b}\right]\times\right.$$

$$\left.\times(3\cos^2\Theta_0 - 1) + \frac{2b^3}{(R_0^2-b^2)^3}(\cos^2\Theta_0+1)\right\},$$

найденной в работах [6, 7].

Таким образом, при $\mu_1=\mu_2=1$ формула (11), полученная для плоских магнитных полей, приводит к верному результату и в случае трехмерного поля. Ввиду непрерывной зависимости E от параметров μ_1, μ_2 этот вывод остается справедливым для любых μ_1, μ_2 в произвольных трехмерных полях.

Список литературы

[1] *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 702 с.
[2] *Oberteuffer J. A.* // IEEE Trans. Magn. 1974. Vol. MAG-10. N 2. P. 223—238.
[3] *Alward J.*, *Imaino W.* // IEEE Trans. Magn. 1986. Vol. MAG-22. N 2. P. 128—134.
[4] *Aharoni A.* // IEEE Trans. Magn. 1976. Vol. MAG-12. N 3. P. 234—235.
[5] *Rowlands G.* // IEEE Trans. Magn. 1977. Vol. MAG-13. N 3. P. 992—995.
[6] *Eisenstein I.* // IEEE Trans. Magn. 1977. Vol. MAG-13. N 5. P. 1646—1648.
[7] *Aharoni A.* // IEEE Trans. Magn. 1987. Vol. MAG-23. N 3. P. 1853—1855.
[8] *Rowlands G.* // IEEE Trans. Magn. 1979. Vol. MAG-15. N 2. P. 991—993.
[9] *Янке Е.*, *Эмде Ф.*, *Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1964. 344 с.
[10] *Градштейн И. С.*, *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
[11] *Морс Ф. М.*, *Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М.: ИЛ, 1960. Т. 2. 836 с.
[12] *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 3. Ч. 2. 672 с.

Институт механики им. М. В. Ломоносова
Москва

Поступило в Редакцию
16 июня 1988 г.