1989 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 59, N 9

01; 10

МАТРИЧНО-ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ДИНАМИКИ ИНТЕНСИВНЫХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

М. И. Капчинский, И. Л. Коренев, Л. А. Рогинский

Предложен алгоритм расчета динамики частиц в сильноточных циклических и линейных ускорителях. Движение частиц в шестимерном фазовом пространстве разделено на когерентную и некогерентную компоненты. Некогерентное движение описывается методом огибающих; сгусток частиц считается равномерно заряженным трехосным эллипсоидом. Когерентное движение описывается в параксиальном приближении; каждый структурный элемент транспортного канала ускорителя характеризуется шестимерными матрицей преобразования фазовых координат центра сгустка и вектором смещения, возникающего вследствие отклонения параметров фокусирующих элементов от расчетных значений. В матрице элемента учтено влияние отраженных сил пространственного заряда. Программное обеспечение алгоритма осуществлено на базе известной программы ТРАНСПОРТ.

Создание ускорителей интенсивных электронных пучков на высокие энергии и разработка связанных с ними проблем стали важной областью современной ускорительной техники. Принципы исследования и конструирования транспортных и ускорительных каналов для интенсивных пучков далеки еще от той степени завершенности, которая достигнута в оптике пучков с пренебрежимо малым током. Трудности обусловлены необходимостью учета собственного взаимодействия заряженных частиц, которое для сильноточных пучков не может рассматриваться в качестве малой поправки к внешним фокусирующим силам.

В настоящее время разрабатываются и получили распространение два метода расчета собственного взаимодействия: метод крупных частиц и метод огибающих. Первый пригоден в принципе для расчета произвольных пучков, но связан со столь большими вычислительными трудностями, что на современном уровне развития вычислительной техники его применение эффективно только для расчета аксиально-симметричных пучков [1, 2]. К достоинствам метода огибающих, предложенного в работах [3–5], относятся возможность получения аналитических результатов в простых задачах и высокая скорость численного счета, к недостаткам — ограниченность модели рамками линейности как внешних сил, так и сил пространственного заряда.

Данная работа посвящена разработке алгоритма расчета динамики интенсивных пучков в циклических и линейных ускорителях. Взаимодействие, обусловленное пространственным зарядом, представляется как сумма двух составляющих. Одна из них связана с кулоновским расталкиванием частиц, ее воздействие на динамику пучка рассчитывается методом огибающих. Другая, обусловленная электромагнитными полями пространственного заряда, отраженными от стенок вакуумной камеры и магнитных полюсов, воздействует в основном на когерентное движение пучка. Ее влияние включено в матричный метод расчета.

Когерентная и некогерентная составляющие движения пучка с учетом сил пространственного заряда

Наиболее известным и широко используемым алгоритмом расчета динамики частиц в слаботочном ускорителе является программа ТРАНСПОРТ [6–8].

Ее основу составляет описание движения частиц в шестимерном фазовом пространстве. Каждой частице ставится в соответствие шестимерный вектор ее фазовых координат $\mathbf{X}=(x, x', y, y', z, \Delta p/p)$, где x, y, z — отклонения произвольной частицы соответственно в радиальном, вертикальном и тангенциальном направлениях по отношению к равновесной частице, которая по предположению движется по оси камеры ускорителя; $x'=dx/ds$, $y'=dy/ds$ — углы наклона вектора скорости; ds — приращение длины дуги равновесной траектории; $\Delta p/p$ — относительное отклонение импульса продольного движения от равновесного значения. Предполагается, что частицы сгустка в фазовом пространстве находятся внутри шестимерного гиперэллипсоида, граница которого задается уравнением

$$\mathbf{X}^T\hat{\sigma}^{-1}\mathbf{X}=1, \tag{1}$$

где индекс T означает транспонирование, сигма-матрица пучка $\hat{\sigma}$ — положительно определенная симметрическая матрица 6×6.

Удобство использования сигма-матрицы заключается в том, что через ее элементы легко выражаются геометрические размеры пучка, например полуразмер по оси x_i ($i=1, \ldots, 6$; $x_1=x$, $x_2=x'$ и т. д.) равен $\sqrt{\sigma_{ii}}$.

В системах с нулевой интенсивностью пучка каждый элемент ускорителя (квадрупольная линза, заворачивающий магнит и т. п.) можно охарактеризовать в линейном приближении матрицей $\hat{R}$ размером 6×6, связывающей координаты частицы на входе $\mathbf{X}_0$ и на выходе элемента,

$$\mathbf{X}=\hat{R}\mathbf{X}_0. \tag{2}$$

Соответственно сигма-матрицы пучка связаны соотношением

$$\hat{\sigma}=\hat{R}\hat{\sigma}_0\hat{R}^T. \tag{3}$$

Таким образом, весь ускоритель от источника частиц до мишени полностью описывается одной матрицей $\hat{R}_c=\hat{R}_m\cdot\hat{R}_{m-1}\ldots\hat{R}_2\cdot\hat{R}_1$, равной произведению матриц всех элементов, из которых ускоритель состоит.

Для расчета динамики частиц в сильноточном циклическом ускорителе изложенный подход нуждается в существенной переработке. Большой ток пучка приводит к необходимости учета собственного электромагнитного поля частиц. Его можно представить в виде двух слагаемых разной природы. Первое — внутреннее электромагнитное поле сгустка, влияющее только на относительное движение частиц вокруг центра масс. Второе характеризует отраженные поля пространственного заряда от стенок вакуумной камеры и магнитных полюсов. В случае малых размеров пучка по сравнению с размером камеры можно считать, что отраженные поля одинаково действуют на все частицы пучка, т. е. влияют только на когерентное движение пучка, и что силы, обусловленные ими, линейны по смещению центра масс пучка от оси камеры.[1]

Вектор фазовых координат $\mathbf{X}$ разбивается на два слагаемых

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}_{сгн}+\mathbf{X}', \tag{4}$$

где составляющая $\mathbf{X}_{сгн}$ описывает координаты центра сгустка, а $\mathbf{X}'$ — координаты частицы относительно центра.

Движение центра масс сгустка в нашей модели совершается по линейным законам. Это значит, что каждому элементу ускорителя можно поставить в соответствие матрицу $\hat{R}_{сгн}$, учитывающую действие отраженных кулоновских полей на динамику когерентного движения. В отличие от формулы (2) связь между фазовыми векторами когерентного движения на входе и выходе элемента представим в виде

$$\mathbf{X}_{сгн}=\hat{R}_{сгн}\mathbf{X}_{сгн,\,0}+\mathbf{C}. \tag{5}$$

Когерентное отклонение пучка, описываемое шестимерным вектором $\mathbf{C}$, обусловлено погрешностями параметров элемента (отличие величины заворачи-

[1] Не представляет принципиальных затруднений также учет некогерентных эффектов отраженных полей.

вающего поля от равновесного значения, сдвиги и перекосы элементов и т. д.). Использование вектора **C** позволяет изучать резонансы когерентного движения с учетом влияния отраженных полей.

Исследование некогерентного движения основано на принципиальном допущении метода огибающих о линейности сил собственного заряда пучка. При этом условии граница пучка в форме шестимерного гиперэллипсоида в фазовом пространстве сохраняется в процессе эволюции пучка. Однако преобразование сигма-матрицы, описывающей границу пучка, не подчиняется линейному соотношению (3), его можно символически записать в виде

$$\hat{\sigma} = \tilde{L}\hat{\sigma}_0, \qquad (6)$$

где $\tilde{L}$ — оператор, «решающий» соответствующие дифференциальные уравнения для элементов сигма-матрицы. Содержание оператора $\tilde{L}$, а также методика вычисления матрицы $\hat{R}_{cen}$ и вектора **C** даются в следующих разделах работы.

Матричный алгоритм расчета когерентного движения пучка

Построение математических моделей структурных элементов ускорителя, используемых в алгоритме, рассмотрим на примере поворотного магнита с фокусировкой продольным магнитным полем. Частицы движутся под действием вертикальной составляющей магнитного поля B_y, обеспечивающей поворот частиц по дуге окружности, и продольной составляющей B_z, используемой для фокусировки интенсивного электронного пучка. Линеаризованные уравнения движения частиц имеют вид

$$x'' + \omega_x^2 x + \Omega y' - \omega_{cx}^2 x - \omega_{cxy}^2 y - K\frac{\Delta p}{p} = F_x,$$

$$y'' + \omega_y^2 y - \Omega x' - \omega_{cy}^2 y - \omega_{cxy}^2 x = F_y,$$

$$z' + Kx = \frac{1}{\gamma^2}\frac{\Delta p}{p}, \quad \frac{\Delta p}{p} = \text{const}, \qquad (7)$$

где $\Omega = -eB_z/mc^2\beta\gamma$, $K = -eB_y/mc^2\beta\gamma$ — кривизна центральной траектории, $\omega_x^2 = K^2(1-n) - \omega_{kx}^2$, $\omega_y^2 = K^2 n - \omega_{ky}^2$, n — показатель спада заворачивающего магнитного поля, β и γ — релятивистские параметры, c — скорость света, e и m — заряд и масса покоя частицы.

Коэффициенты ω_{cx}^2, ω_{cy}^2 и ω_{cxy}^2, зависящие от размеров пучка, характеризуют жесткости сил кулоновского расталкивания частиц в пучке. Они описывают некогерентное движение и будут рассмотрены в следующем разделе. При изучении когерентного движения нужно в уравнениях [7] положить эти коэффициенты равными нулю. Функции F_x, F_y учитывают воздействие на когерентное движение сил, обусловленных отклонениями параметров элемента от расчетных значений, например отклонением величины заворачивающего поля от номинального значения, погрешностями установки магнита и т. д.

Влияние отраженных сил пространственного заряда на когерентное движение описывается величинами [9]

$$\omega_{kx}^2 = \frac{2I}{I_0(\beta\gamma)^3 b^2}\left[1 + \mu(\beta\gamma)^2\right],$$

$$\omega_{ky}^2 = \frac{2I}{I_0(\beta\gamma)^3 b^2}\left[1 + \mu(\beta\gamma)^2 + \mu(\beta\gamma)^2\frac{\pi^2 b^2}{8g^2}\right]. \qquad (8)$$

Здесь I — ток пучка, $I_0 = mc^3/e = 17$ кА для электронов, μI — постоянная составляющая тока пучка, b — радиус металлической вакуумной камеры, g — половина расстояния между полюсами заворачивающего магнита.

В пределах одного структурного элемента систему уравнений (7) можно считать линейной системой с постоянными коэффициентами. Общее решение однородной части системы выражается матрицей $\hat{R}_e$ размером 6×6 (в явном виде эта матрица не приводится в связи с ее громоздкостью). Система уравнений (7) не охватывает воздействия краевых полей на входном и выходном торцах магнита. В основном их влияние сказывается на изменении угловой скорости вращения частицы. Это изменение с хорошей точностью описывается моделью с резкими границами краевого поля [10], в которой считается, что продольная составляющая поля на торцах магнита меняется скачком, а соответствующая ей поперечная составляющая дается дельта-функцией. Матрицу преобразования координат частицы под действием такого поля можно представить для входного края в виде

$$\hat{R}_{\text{вх}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\Omega/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

для выходного края матрица $\hat{R}_{\text{вых}}$ имеет тот же вид с заменой Ω на $-\Omega$. Полная матрица структурного элемента дается произведением

$$\hat{R}_{cen} = \hat{R}_{\text{вых}} \hat{R}_v \hat{R}_{\text{вх}}. \tag{10}$$

Частное решение неоднородной системы уравнений (7) с нулевыми начальными условиями определяет вектор $\mathbf{C}$, характеризующий когерентные отклонения пучка, которые обусловлены ошибками параметров структурного элемента

$$\mathbf{C} = \hat{R}_{\text{вых}} (\mathbf{R}_v \mathbf{C}_{\text{вх}} + \mathbf{C}_v) + \mathbf{C}_{\text{вых}}, \tag{11}$$

где вектор $\mathbf{C}_v$ определяет действие ошибок во внутренней части блока

$$\mathbf{C}_v = \int_0^l \hat{R}_v (l - \xi) \mathbf{F}(\xi) \, d\xi, \tag{12}$$

где l — длина блока, $\mathbf{F}$ — вектор ошибок, $\mathbf{F} = (0, F_x, 0, F_y, 0, 0)$, а векторы $\mathbf{C}_{\text{вх}} = (0, \frac{1}{2}\Omega\Delta_{1y}, 0, -\frac{1}{2}\Omega\Delta_{1x}, 0, 0)$, $\mathbf{C}_{\text{вых}} = (0, \frac{1}{2}\Omega\Delta_{2y}, 0, -\frac{1}{2}\Omega\Delta_{2x}, 0, 0)$ учитывают действие ошибок, обусловленных смещениями $\Delta_{1,2x}$, $\Delta_{1,2y}$ входного и выходного торцов магнита относительно идеального положения.

Наибольший практический интерес представляет действие ошибки, связанной с отклонением ΔB_y величины заворачивающего поля B_y от номинального значения, которое можно считать постоянным внутри магнита. Из (12) следует, что вектор $\mathbf{C}_v$ в этом случае равен 6-му столбцу матрицы $\hat{R}_v$, умноженному на $-\Delta B_y / B_y$.

Математическая модель прямолинейного фокусирующего соленоида также определяется матрицей (10), в которой нужно положить равными нулю кривизну магнита K и заворачивающее поле B_y. Аналогично заворачивающий магнит без продольного фокусирующего поля характеризуется выражениями (10), (11), в которых нужно положить $\Omega = 0$.

Расчет некогерентного движения методом огибающих

Будем исходить из системы уравнений (7), дополненной силами собственного пространственного заряда пучка, которые учитываются коэффициентами [5, 11]

$$\omega_{cx}^2 = \omega_a^2 (1 - f \cos 2\psi), \quad \omega_{cy}^2 = \omega_a^2 (1 + f \cos 2\psi),$$
$$\omega_{cxy}^2 = -\omega_a^2 f \sin 2\psi, \quad \omega_a^2 = \frac{I}{I_0 (\beta\gamma)^3 a_1 a_2}, \quad f = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}. \tag{13}$$

Здесь a_1, a_2 — полуоси эллипса поперечного сечения пучка, ψ — угол поворота главных осей эллипса относительно лабораторной системы координат.

Продольный размер сгустка r_z обычно больше поперечных, величина продольной кулоновской силы обратно пропорциональна γr_z. При релятивистских энергиях величина продольной силы много меньше поперечных компонент. Для расчета последних же можно воспользоваться приближением эллиптического цилиндра, из которого получены формулы (13). В коэффициентах ω_x^2 и ω_y^2 в отличие от формул (7) нужно положить равными нулю параметры ω_{kx}^2 и ω_{ky}^2, так как отраженные поля в нашей модели не влияют на некогерентное движение частиц, поэтому $\omega_x^2 = K^2(1-n)$, $\omega_y^2 = K^2 n$.

Система уравнений (7), дополненная соотношениями (13), остается незамкнутой, так как полуоси эллипса a_1, a_2 и угол поворота ψ определяются движением всех частиц, находящихся в данном сечении. Перейдем к уравнениям для границы пучка [5, 12, 13]. Запишем уравнения движения (7) в матричном виде

$$\frac{d\mathbf{X}}{ds} = \hat{A}\mathbf{X}, \tag{14}$$

где матрицу сил $\hat{A}$ нетрудно получить из системы (7).

Продифференцируем уравнение (1) для граничного эллипсоида и, воспользовавшись уравнением (14), получим

$$\frac{d\hat{\sigma}}{ds} = \hat{A}\hat{\sigma} + \hat{\sigma}\hat{A}^T. \tag{15}$$

Это и есть уравнение для огибающих, определяющее изменение границы пучка в транспортном канале ускорителя. Матричное уравнение (15) является замкнутым, так как входящие в него величины полуосей a_1, a_2 и угол ψ выражаются через элементы сигма-матрицы соотношениями [6]

$$a_1 = \sqrt{p+q}, \quad a_2 = \sqrt{p-q}, \quad p = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{33}),$$

$$q = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{31}^2},$$

$$\sin 2\psi = \frac{\sigma_{31}}{q}, \quad \cos 2\psi = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2q}. \tag{16}$$

Из этих соотношений следует, что система уравнений (15) для элементов сигма-матрицы нелинейна. В общем виде ее удается проинтегрировать только численными методами.

Воздействие на огибающие краевых полей не включено в уравнение (15), их нужно учитывать отдельно. При аппроксимации краевого поля дельта-скачком естественно пренебречь кулоновскими полями по сравнению с «бесконечной» поперечной составляющей магнитного поля. Тогда сигма-матрица преобразуется, учитывая (3), по формулам

$$\hat{\sigma}_{\text{вх}} = \hat{R}_{\text{вх}}\hat{\sigma}_{\text{вх},\,0}\hat{R}^T_{\text{вх}}, \quad \hat{\sigma}_{\text{вых}} = \hat{R}_{\text{вых}}\hat{\sigma}_{\text{вых},\,0}\hat{R}^T_{\text{вых}}, \tag{17}$$

где $\hat{\sigma}_{\text{вх},\,0}$, $\hat{\sigma}_{\text{вых},\,0}$, $\hat{\sigma}_{\text{вх}}$, $\hat{\sigma}_{\text{вых}}$ — соответственно матрицы пучка перед краем и после края соленоида, $\hat{R}_{\text{вх}}$ определяется соотношением (9), а $\hat{R}_{\text{вых}}$ получается из него изменением знака Ω.

Уравнения (15)—(17) полностью определяют интегрирующий оператор $\tilde{L}$ в выражении (6), дающий преобразование сигма-матрицы пучка при прохождении его через произвольный магнитооптический элемент ускорителя. Начальные условия для каждого участка задаются с помощью сигма-матрицы, получающейся на выходе предыдущего участка. Начальную матрицу на участке инжекции можно получить из заданных параметров инжектируемого пучка, его геометрических размеров по осям x и y и эмиттансов в плоскостях (x, x') и (y, y').

Заключение

В данной работе сделан принципиальный шаг на пути усовершенствования известного алгоритма ТРАНСПОРТ [6–8], предназначенного для численного моделирования динамики пучка, — учтены эффекты пространственного заряда частиц, что открывает возможности для исследования динамики интенсивных пучков. Содержание алгоритма при сохранении весьма совершенной формы по вводу, выводу и обработке информации радикально изменено, что дало основание к присвоению алгоритму нового названия — ТРАКТ. Основные изменения заключаются в следующем.

1. В моделях всех элементов транспортного канала учтено действие сил пространственного заряда. Отраженные поля, оказывающие влияние на когерентное движение, включены в матрицу, моделирующую транспортный элемент. Для учета сил собственного взаимодействия использована самосогласованная методика, заключающаяся в решении системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений для элементов сигма-матрицы пучка. Такой способ имеет большое преимущество перед методом крупных частиц в скорости численного счета.

2. Разработана и реализована методика учета действия когерентных возмущений на динамику частиц. К ним относятся ошибки как случайные, так и систематические в величине заворачивающего магнитного поля, перекосы проводящих экранов, смещения и наклоны соленоидов. Эта методика позволяет исследовать резонансы в циклических машинах.

Программа ТРАКТ, составленная на основе алгоритма, включает в себя как частный случай все возможности своего предшественника — программы ТРАНСПОРТ.

Авторы выражают глубокую благодарность В. В. Миллеру за консультацию и предоставление материалов по программе ТРАНСПОРТ и Л. А. Юдину за обсуждение работы.

Список литературы

[1] *Кузнецов В. С.* // ЖТФ. 1968. Т. 38. Вып. 2. С. 274—284.
[2] *Кузнецов В. С., Богданова О. И., Комаров О. Л.* // РиЭ. 1971. Т. 16. Вып. 8. С. 1476—1483.
[3] *Kapchinskij I. M., Vladimirskij V. V.* // Intern. Conf. on High-Energy Accelerators and Instrumentation. Geneva, CERN, 1959. P. 274—288.
[4] *Капчинский И. М.* Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. М.: Атомиздат, 1966. 310 с.
[5] *Ярковой О. И.* // ЖТФ. 1966. Т. 36. Вып. 6. С. 988—996.
[6] *Brown K. L., Howry S. K.* TRANSPORT/360. A computer program for designing charged particle beam transport systems. SLAC. Report N 91. Stanford, 1970. 174 p.
[7] *Brown K. L., Rothacker E., Carey D. C., Iselin Ch.* TRANSPORT. A computer program for designing charged particle beam transport systems. CERN 73-16. Geneva, 1973. 116 p.
[8] *Миллер В. В.* Препринт ИТЭФ. № ИТЭФ-43. М., 1974. 22 с.
[9] *Laslett L. J., Resegotty L.* // VI Intern. Conf. on High Energy Accelerators. CEAL-2000. Cambridge, 1967. P. 150—152.
[10] *Бурштейн Э. Л., Рогинский Л. А.* // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 11. С. 2249—2252.
[11] *Рогинский Л. А.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 8. С. 1506—1511.
[12] *Рогинский Л. А.* // ЖТФ. 1979. Т. 49. Вып. 4. С. 769—776.
[13] *Heighway E. A., de Jong M. S.* TRANSOPT. A beam transport design code with space charge, automatic internal optimisation and general constraints. Ontario: Chalk River, 1984. 51 p.

Поступило в Редакцию
17 июня 1988 г.