

Неэнергетические (информационные) волны, описываемые глобальными потенциалами

© А.Г. Чирков*, А.Н. Агеев**

* Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия

** Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: chirkovag@rambler.ru, ageev38@mail.ru

(Поступила в Редакцию 23 мая 2006 г.
В окончательной редакции 6 октября 2006 г.)

Рассмотрена ситуация, когда магнитный поток внутри электронной петли при наблюдении эффекта Ааронова–Бома изменяется со временем. Изучались электромагнитные поля и потенциалы соленоида с переменным током. Показано, что векторный потенциал вне соленоида содержит слагаемое, соответствующее нулевому электромагнитному полю в той же точке пространства. Эта часть потенциала (глобальный потенциал) описывает стоячие волны, по своим свойствам отличающиеся от обычных электромагнитных волн; они могут быть условно названы информационными волнами потенциалов (ИВП). Предложен способ детектирования ИВП с помощью эффекта, аналогичного эффекту Ааронова–Бома (квазиэффект Ааронова–Бома). В отличие от обычных электромагнитных волн ИВП не участвуют ни в каких энергетических взаимодействиях, но они способны обеспечить перенос информации.

PACS: 11.10.-z, 03.50.-z

1. Введение

Выяснением физического смысла потенциалов, изменяющихся во времени, наука занимается сравнительно недавно [1–4]. Уже предварительные результаты этих исследований показали возможность наблюдения необычных явлений, которые в принципе невозможно осуществить при использовании обычных электромагнитных полей. Одной из причин невнимания экспериментаторов к исследованиям переменных потенциалов, по нашему мнению, является отсутствие четкой систематизации потенциалов различной природы.

Рассматривая локальные и глобальные свойства потенциалов, можно убедиться, что в любой точке пространства–времени они могут быть представлены в следующем виде [3,4]:

$$\mathbf{A}^\Sigma(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}^f(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}^g(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}^c(\mathbf{r}, t), \quad (1a)$$

$$\varphi^\Sigma(\mathbf{r}, t) = \varphi^f(\mathbf{r}, t) + \varphi^g(\mathbf{r}, t) + \varphi^c(\mathbf{r}, t), \quad (1b)$$

где индексы f , g и c относятся соответственно к полевой, глобальной и калибровочной частям суммарного потенциала Σ . Рассмотрим сначала локальные свойства отдельных частей потенциала. Полевые потенциалы в данной точке пространства–времени определяют электромагнитное поле в той же точке:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}^f(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -c^{-1} \partial \mathbf{A}^f(\mathbf{r}, t) / \partial t - \text{grad } \varphi^f(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

Эти части потенциалов не несут в себе каких бы то ни было дополнительных свойств, которые не могли бы

быть описаны напряженностями электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{B} . Через полевые потенциалы следует записывать уравнение движения заряженной частицы

$$\frac{d}{dt} [m\mathbf{v} + (q/c)\mathbf{A}^f] = -\nabla q [\varphi^f - (\mathbf{v}/c)\mathbf{A}^f]. \quad (3)$$

Все взаимодействия частиц с электромагнитными полями описываются этими потенциалами; сила Лоренца имеет вид

$$\mathbf{F} \equiv \frac{d}{dt} [m\mathbf{v}] = |e| \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^f}{\partial t} + \text{grad } \varphi^f - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{A}^f] \right\}. \quad (4)$$

Следует отметить, что со времен Фарадея и до записи уравнения Шредингера речь фактически могла идти только об этих потенциалах.

Глобальные и калибровочные потенциалы соответствуют нулевым электромагнитным полям в той же точке пространства–времени:

$$\text{rot } \mathbf{A}^{g,c} = 0,$$

$$c^{-1} \partial \mathbf{A}^{g,c} / \partial t + \text{grad } \varphi^{g,c} = 0, \quad (5)$$

откуда вытекают соотношения

$$\mathbf{A}^{g,c} = -\text{grad } \eta^{g,c}, \quad \varphi^{g,c} = c^{-1} \partial \eta^{g,c} / \partial t, \quad (6)$$

где η^c — функция градиентного преобразования потенциалов, которая в отличие от η^g не имеет особенностей.

Глобальные и калибровочные потенциалы, имея сходные локальные свойства (5), кардинально различаются глобальными характеристиками. А именно, для глобальных потенциалов можно найти такой путь, для которого циркуляция не равна нулю:

$$\oint (\mathbf{A}^g d\mathbf{l} - c\varphi^g dt) \neq 0. \quad (7)$$

Известно, что соотношение (7) может выполняться только в многосвязном пространстве и в этом случае волны де Бройля могут изменить фазу при взаимодействии с глобальным потенциалом, что обнаруживается при наблюдении эффекта Ааронова–Бома (ЭАБ).

В случае калибровочных потенциалов для любого контура интегрирования всегда имеет место равенство

$$\oint (\mathbf{A}^c d\mathbf{l} - c\varphi^c dt) = 0. \quad (8)$$

В односвязном пространстве могут существовать только полевые и/или калибровочные потенциалы, но не глобальные. Добавление калибровочной составляющей к глобальным потенциалам изменяет их значение (так же как и значение полевых потенциалов), но не влияет на результат (7), который только и входит в конечные результаты.

Оставим для полей и волн, описываемых электрической и магнитной напряженностью поля, название электромагнитных, магнитных или электрических полей. Для полей, описываемых глобальными потенциалами, будем использовать термин „особые возмущения потенциалов“ (ОВП), а для волн, описываемых этими потенциалами, — термин „информационные волны потенциалов“ (ИВП). Рассмотрим свойства приведенных выше потенциалов на примере соленоида с переменным током.

2. Переменные поля и потенциалы бесконечного соленоида

Рассмотрим случай, когда в некоторой области пространства круговые токи образуют бесконечно длинный, электронейтральный цилиндр с бесконечно тонкими стенками. Его можно рассматривать как предельный случай конечного соленоида или тора, у которых радиус катушки гораздо меньше их размера. В дальнейшем будем использовать цилиндрическую систему координат $(\rho_0, \alpha_0, \mathbf{z}_0)$. Ток рассматривается в стационарном режиме, изменяющемся со временем по гармоническому закону:

$$\mathbf{J} = I_0 \delta(R - \rho) \cos(\omega t) \alpha_0, \quad (9)$$

где ω — круговая частота тока, R — радиус цилиндра, δ — дельта-функция Дирака, I_0 — ток в стенке соленоида на единицу его длины. В этом случае пространство состоит из двух областей: внутри и снаружи соленоида. Для нахождения полей в каждой из областей используем уравнения Максвелла с обычными обозначениями величин и соответствующие граничные условия, содержащие поверхностный ток [5]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Для отличных от нуля компонент поля имеем

$$\begin{aligned} B_z &= 0.5B_0\pi Rk \\ &\times \begin{cases} \{J_1(kR) \sin \omega t - Y_1(kR) \cos \omega t\} J_0(k\rho), & \rho < R; \\ J_1(kR) \{J_0(k\rho) \sin \omega t - Y_0(k\rho) \cos \omega t\}, & \rho > R; \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} E_\alpha &= -0.5B_0\pi Rk \\ &\times \begin{cases} \{J_1(kR) \cos \omega t + Y_1(kR) \sin \omega t\} J_1(k\rho), & \rho < R; \\ J_1(kR) \{J_1(k\rho) \cos \omega t + Y_1(k\rho) \sin \omega t\}, & \rho > R; \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

где $k = \omega/c$, $B_0 = \frac{4\pi}{c} J$. J_0, J_1, Y_0, Y_1 — функция Бесселя и Неймана в обычных обозначениях. Соответствующие потенциалы [2–4].

$$\begin{aligned} A_\alpha^\Sigma &= 0.5B_0\pi R \\ &\times \begin{cases} \{J_1(kR) \sin \omega t - Y_1(kR) \cos \omega t\} J_1(k\rho), & \rho < R; \\ J_1(kR) \{J_1(k\rho) \sin \omega t - Y_1(k\rho) \cos \omega t\}, & \rho > R. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

Скалярный потенциал отсутствует.

Из (13) видно, что можно представить потенциал в виде суммы

$$A_\alpha^\Sigma = A_\alpha^f + A_\alpha^g, \quad (14)$$

где соответствующие слагаемые потенциалов выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_\alpha^f &= 0.5B_0\pi R \\ &\times \begin{cases} \{J_1(kR) \sin \omega t - Y_1(kR) \cos \omega t\} J_1(k\rho), & \rho < R; \\ J_1(kR) \left\{ J_1(k\rho) \sin \omega t - \left[Y_1(k\rho) + \frac{2}{\pi k\rho} \right] \cos \omega t \right\}, & \rho > R; \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

$$A_\alpha^g = 0.5B_0\pi R \begin{cases} 0, & \rho < R; \\ J_1(kR) \frac{2\pi^{-1}}{k\rho} \cos \omega t, & \rho > R. \end{cases} \quad (16)$$

Если представить функции Бесселя, зависящие от ρ в этих выражениях, в виде степенных рядов по $k\rho$, то станет ясным существенное различие между двумя выделенными частями потенциала, что обсуждается далее.

Можно легко убедиться, что часть общего потенциала с индексом f определяет электромагнитное поле в той же точке пространства и, следовательно, действительно является полевым потенциалом, как он нами определен выше в (1). Часть общего потенциала с индексом g соответствует нулевому электромагнитному полю в той же точке пространства, а циркуляция вокруг соленоида по окружности радиуса $\rho_0 > R$ не равна нулю, а равна величине

$$\oint A_\alpha^g d\mathbf{l} = 2\pi\Phi_0 \frac{J_1(kR)}{kR} \cos \omega t, \quad (17)$$

где $\Phi_0 = B_0\pi R^2$,

Таким образом, потенциал (16) отвечает признакам глобального потенциала в (1). Из (16) следует, что глобальный потенциал описывает стоячие волны, которые мгновенно отслеживают изменение тока в соленоиде. Именно такие потенциалы отвечают за наличие ЭАБ. Убедимся в том, что эти потенциалы могут быть измерены с помощью квази ЭАБ.

3. Квазиэффект Ааронова–Бома

Строго говоря, ЭАБ относится только к постоянным во времени векторным потенциалам, поэтому эффекты, связанные с переменными во времени потенциалами, лучше называть квазиэффектом Ааронова–Бома (КЭАБ). Предположим, что поток электронов распространяется к соленоиду при $\alpha = z = 0$; при $\rho = \rho_0 > R$ или $t = t_0$ электроны встречают препятствие, после прохождения которого проявляются их волновые свойства. Далее их можно рассматривать в виде волн де Бройля, которые „омывают“ соленоид с двух сторон при сохранении постоянным среднего радиуса $\rho = \rho_0$, что в принципе может быть реализовано в проводящих кольцах. Нас интересует интерференция этих волн на окружности радиуса ρ_0 . В динамическом случае использование уравнения Шредингера становится малопродуктивным, так как не позволяет сделать упрощения, которые привели бы к аналитическим выражениям для интерференции. Наиболее подходящим методом решения задачи является метод интегралов по траекториям, успешно использованный Кобе для интерпретации ЭАБ [6]. Используя результаты, полученные в последней работе, при тех же допущениях для волновой функции электрона, получаем

$$\Psi_n = \psi_{0n} \psi^f \psi_n^g = \psi^f \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t L_n dt\right), \quad (18)$$

где функция Лагранжа без вклада полевых потенциалов при $v \ll c$ имеет вид

$$L_n = \frac{mv_n^2}{2} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_n^g \mathbf{v}_n - e\varphi_n^g. \quad (19)$$

Здесь \mathbf{v} , m и e — скорость, масса и заряд электрона, $n = 1, 2$ обозначает один из возможных путей электрона до точки аннигиляции. Общая волновая функция:

$$\Psi = \sum_{n=1}^2 \psi_{0n} (\mathbf{A}_n^f, v_n) \times \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{e}{c} \left[\int_{t_0}^t \mathbf{A}_n^g \mathbf{v}_n dt + \int_{t_0}^t \mathbf{A}_n^f \mathbf{v}_n dt \right]\right). \quad (20)$$

Нас интересует взаимодействие электронов с глобальными потенциалами. Для выделения эффекта этих потенциалов на интерференционную картину можно, на-

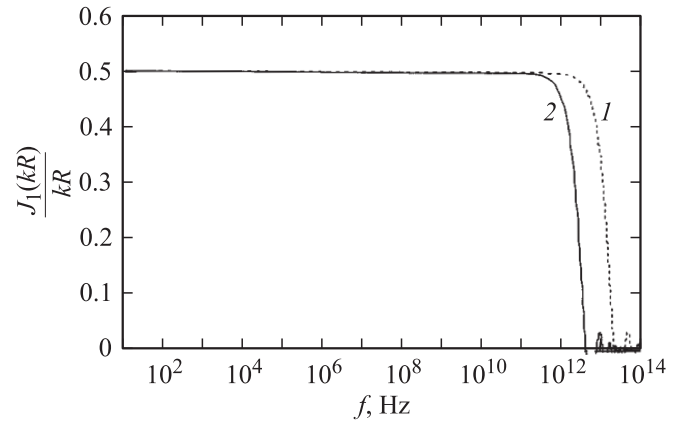


Рис. 1. Зависимости $\frac{J_1(kR)}{kR}$ от частоты переменного тока в бесконечно длинном соленоиде для двух значений его радиуса. R , μm : 1 — 0.5, 2 — 1.0.

пример, поступить следующим образом. Выберем величину ρ_0 такой, чтобы в (15) выполнялось равенство

$$\left[Y_1(k\rho_0) + \frac{2}{\pi k\rho_0} \right] = 0. \quad (21)$$

Предположим, что электронный пучок в виде коротких пакетов распространяется по окружности радиуса ρ_0 тогда, когда в (15) $\sin \omega t \simeq 0$. В этом случае в (20) можем оставить только глобальную часть потенциала:

$$\Psi = \sum_{n=1}^2 \Psi_{0n} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{e}{c} \int_{t_0}^t \mathbf{A}_n^g \mathbf{v}_n dt\right). \quad (22)$$

Для интенсивности интерференции получим

$$I/I_{\max} = \Psi\Psi^* = \cos^2 \left[\frac{\pi m \rho_0 \Delta}{\hbar \tau} - 2\pi \frac{\Phi_0}{\mu_0} \frac{J_1(kR)}{kR} \right], \quad (23)$$

т.е. в данном случае изменение интерференционной картины сводится к смещению полос интерференции, как и в статическом случае, ослабленное множителем $\frac{J_1(kR)}{kR}$. На рис. 1 приведены графики зависимости этого множителя от частоты, из которых видно, что отличие от статики происходит при очень высоких частотах тока для выбранных радиусов соленоидов.

4. Заключение

В случае переменного тока в соленоиде в окружающем пространстве могут возникнуть стоячие неэнергетические волны потенциалов, которые могут быть обнаружены с помощью квантового КЭАБ. Они описываются касательной компонентой глобального потенциала и могут нести в себе дополнительную (по сравнению с обычным электромагнитным полем) информацию. Не связанные ни с какими энергетическими процессами ИВП не должны подчиняться тем физическим законам,

которые получены для напряженностей электромагнитного поля. Если электрон как классическая частица пролетит в области, где имеется только глобальный и/или калибровочный потенциалы, то он не может изменить свою энергию или импульс (в отличие от случая его взаимодействия с полевыми потенциалами). Впервые возможность детектирования переменных во времени потенциалов обсуждалась в [1]. Потенциал в этой работе был введен произвольно и не соответствовал никакой реальной ситуации.

ИВП и электромагнитные волны различаются как по способу их возбуждения, так и по способу детектирования. Полевые потенциалы появляются в пространстве всякий раз, когда возникает электромагнитное поле; для генерации же ОВП нужна особая топология пространства. Это может быть скачок магнитного потока, как в случае с переменным током в соленоиде. Для детектирования ИВП необходимо, чтобы внутри электронной петли оказалась часть потока вместе с его скачками. Например, линейная антенна может возбудить только полевые потенциалы, а спиральная антенна — и полевые, и глобальные. Детектирование полевых частей потенциалов производится абсолютно теми же средствами, что и детектирование электромагнитного поля. Для детектирования же, например, статических глобальных потенциалов в настоящее время есть только один метод — ЭАБ. Осмысление глобальной части потенциала в динамическом случае во всех ее проявлениях — дело будущего. С помощью магнитного ЭАБ исследуется только статический вариант ОВП. Несомненно гораздо больший интерес представляет исследование свойств переменных глобальных потенциалов, экспериментальное изучение которых, по нашим сведениям, еще не началось. Мы уверены, что на этом пути исследователей ждут важные открытия.

Авторы выражают признательность Е.Б. Александрову за проявленный интерес к работе.

Приложение

Выяснением физического смысла магнитных потенциалов наука занимается со времен Фарадея [7,8]. Противниками идеи придания потенциалам статуса реальных полей были многие физики (Хевисайд, Герц, Лоренц и др.), и долгое время эта идея была не востребована. Главная причина этого состояла в том, что не существовало способа измерения потенциалов. Поэтому в течение более чем 50 лет господствовала точка зрения, что введение в рассмотрение потенциалов оправдывается только удобством математических вычислений полей \mathbf{E} и \mathbf{B} .

Новый взгляд на физическую природу потенциалов начался с уравнения Шредингера, в которое вошли не поля, а потенциалы. С открытием ЭАБ с [9–11] стало казаться, что потенциалы приобрели физический смысл

по крайней мере в квантовой механике. В период времени между предсказаниями [9–11], косвенными наблюдениями [12,13] и экспериментальными доказательствами существования [14,15] магнитного эффекта Ааронова–Бома (МЭАБ) выработывалось новое понимание физического смысла потенциалов. Утверждалось, не без оснований, что сами потенциалы являются реальными полями [16], несмотря на их неоднозначность [8,16].

Как известно [17], имеется три возможных подхода к рассмотрению электродинамических задач. Мы выбираем „локальную“ теорию, принимая подход Фарадея–Максвелла–Ааронова–Бома–Феймана, приводящий к выводу о том, что волна де Бройля может взаимодействовать не только с электромагнитным полем, но и с потенциалами.

Можно легко убедиться, что в общем случае мы должны записать

$$\mathbf{A} = A_\rho \boldsymbol{\rho}_0 + A_\alpha \boldsymbol{\alpha}_0 + \text{grad } \chi, \quad (\text{П1})$$

где последний член учитывает градиентную инвариантность потенциала. Суммарная ρ -компонента векторного потенциала является совершенно произвольной; она не определяется уравнениями Максвелла и граничными условиями и, следовательно, ее можно не рассматривать, как не имеющую физического смысла. Если использовать, например, кулоновскую калибровку $\text{div } \mathbf{A} \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) = 0$, то можно убедиться, что она приводит к требованию выполнения равенств: $A_\rho = \chi = 0$, т.е. конкретизирует значения величин, которые не имеют физического смысла, не влияя на наблюдаемые величины.

Для определения единственной составляющей векторного потенциала имеем

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left[\frac{A_\alpha}{\rho} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial \rho} \right] \mathbf{z}_0 = B_0 U(R - \rho) \mathbf{z}_0, \quad (\text{П2})$$

где $U(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда [18]. Поскольку мы имеем дело с двусвязным пространством, у нас получились два уравнения: одно для нахождения потенциала вне соленоида, другое — внутри него. Получаем

$$A_\alpha = \frac{B_0}{2} \rho U(R - \rho) + \frac{B_0 R^2}{2\rho} U(\rho - R), \quad (\text{П3})$$

где учтено требование ограниченности потенциала при $\rho = 0$ и неразрывность потенциала при $\rho \rightarrow R$ внутри и снаружи соленоида. Потенциал вне соленоида нельзя устранить с помощью калибровочного преобразования [19]. Покажем, что различная зависимость потенциалов внутри и вне соленоида от ρ отражает их разную физическую природу.

Для удобства рассмотрения введем (пока формально) индекс 0 для потенциала в области $\rho > R$ и индекс f для области $\rho < R$. Часть потенциала с индексом 0 соответствует нулевому магнитному полю в той же

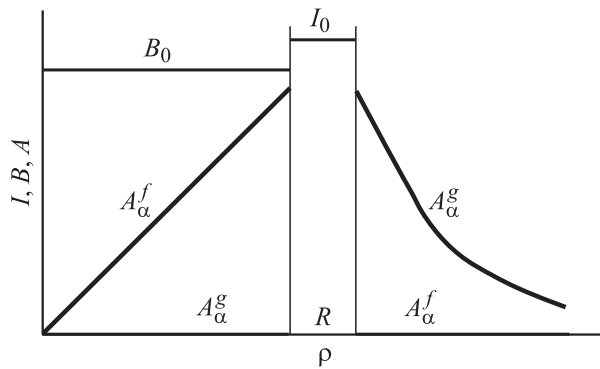


Рис. 2. Полевые A_α^f и глобальные A_α^g потенциалы во внутренней $\rho < R$ и внешней $\rho > R$ областях бесконечно длинного соленоида радиуса R при постоянном токе соленоида I_0 и магнитном поле B_0 .

области пространства, в то время как часть с индексом f определяет существующее магнитное поле. Будем называть часть потенциала с индексом f — полевым потенциалом, а с индексом 0 — потенциалом нулевого поля. Совершенно очевидно, что в рассматриваемом случае в каждой из областей можно представить общий потенциал в виде суммы двух потенциалов[3,4]

$$A_\alpha^\Sigma(\rho) = U(R - \rho)A_\alpha^f + U(\rho - R)A_\alpha^0 \quad \text{при } \rho \neq R, \quad (\text{П4})$$

где

$$A_\alpha^f = 0.5B_0\rho, \quad A_\alpha^0 = 0.5B_0 \frac{R^2}{\rho}. \quad (\text{П5})$$

Таким образом, в статических случаях, используя бесконечно длинный соленоид, тор или ферромагнитный ус, полевой и нулевого поля потенциалы оказываются отличными от нуля в разных областях пространства: один вне области с магнитным полем, а другой внутри нее. В случае возбуждения соленоида переменным током обе эти части потенциалов оказываются вне соленоида отличными от нуля.

На рис. 2 схематично представлены зависимости статических потенциалов полевого и нулевого поля. Пока найден только один способ детектирования статических глобальных векторных потенциалов — МЭАБ [9–11]. Используя метод интегралов по траекториям [6,20], можно найти выражение для интерференции волн де Бройля

$$I/I_{\max} = \Psi\Psi^* = \cos^2 \left[\omega_e \frac{2\Delta}{v_0} - 2\pi \frac{\Phi_0}{\mu_0} \right], \quad (\text{П6})$$

где ω_e — электронная частота, $2\Delta \equiv l_2 - l_1$ — разность длин двух электронных траекторий, $v_0 \equiv \pi\rho/\tau$ — скорость электрона до момента t_0 , $\tau \equiv t - t_0$, $\Phi_0 \equiv B_0\pi R^2$ — магнитный поток внутри соленоида, $\mu_0 \equiv \hbar/|e|$ — квант магнитного потока, e — заряд электрона, \hbar — постоянная Планка. Заметим, что величина 2Δ зависит от количества витков, которые сделает электрон вокруг соленоида. Таким образом,

фактически при МЭАБ измеримой является только азимутальная компонента векторного потенциала; ей и следует приписать значение физического поля, о котором говорится в [16].

Наиболее четко различие между полевыми и глобальными потенциалами проявляется при исследовании взаимодействия электрона с этими частями потенциалов. Если при взаимодействии с полевым потенциалом взаимодействие совершенно не отличается от взаимодействия электрона с электромагнитным полем, то в другом случае, как показывает МЭАБ, оно носит неэнергетический характер. Это значит, что при взаимодействии с ним электрон не изменяет свою энергию, импульс или дебройлевскую длину волны, но изменяется фаза электронной волны.

Список литературы

- [1] B. Lee, E. Yin, T.K. Gustafson, R. Chiao. Phys. Rev. A **45**, 4319 (1992).
- [2] А.Г. Чирков, А.Н. Агеев. ФТТ **44**, 3 (2002); ЖТФ **71**, 16 (2001); Письма в ЖТФ **26**, 103 (2000).
- [3] A.G. Chirkov, A.N. Ageev. New type of fields in Maxwell's equations: their properties and method of detection. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0201133>.
- [4] A.N. Ageev, A.G. Chirkov. Peculiar fields in Maxwell's equations; <http://arxiv.org/abs/physics/0205081>.
- [5] М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин. Классическая электродинамика. М. (1985). 399 с.
- [6] D.H. Kobe. Annals Phys. **123**, 381 (1979).
- [7] A.M. Bork. Isis **58**, 210 (1967).
- [8] В.П. Визгин. Единые теории поля в первой трети XX века. Наука, М. (1985). с. 304.
- [9] W. Franz. Deutsche physik. Ges. **20**, 65 (1939).
- [10] W. Ehrenberg, R.E. Siday. Proc. Phys. Soc. (London) B **62**, 8 (1949).
- [11] Y. Aharonov, D. Bohm. Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
- [12] R.G. Chambers. Phys. Rev. Lett. **5**, 3 (1960).
- [13] H. Boersch et al. Z. Phys. **165**, 79 (1961).
- [14] G. Möllenstedt, W. Bayh. Naturwissenschaften **49**, 81 (1962).
- [15] A. Tonomura et al. Phys. Rev. Lett. **56**, 792 (1986).
- [16] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Мир, М. (1966). Т. 6. С. 15–26.
- [17] H. Erlichson. Am. J. Phys. **38**, 162, 1970.
- [18] М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. М. (1970). 827 с.
- [19] M. Peskin, A. Tonomura. Lecture Notes in Physics **340**, 115 (1989).
- [20] Р. Фейнман, А. Хибс. Квантовая механика и интегралы по траекториям. Мир, М. (1968). 382 с.