

## О КРИТЕРИЯХ СОХРАНЕНИЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ В УСКОРИТЕЛЯХ С СИБИРСКИМИ ЗМЕЙКАМИ

Я. С. Дербенев, А. М. Кондратенко

Формулируются ограничения на эмпитанс пучка и несовершенства магнитной структуры, необходимые для сохранения поляризации пучка в ускорителях с сибирскими змейками. Рассмотрены тенденции изменения этих критериев с повышением максимальных энергий и размеров ускорителей на высокие энергии.

### Введение

Как известно, трудности сохранения поляризации пучков (протонов, электронов) при ускорении связаны с прохождением спиновых резонансов. Существует ряд методов предотвращения деполяризации, среди которых можно выделить следующие: 1) компенсация опасных гармоник несовершенств магнитной структуры, 2) скачкообразное изменение частот бетатронных колебаний в моменты прохождения собственных резонансов, 3) применение сибирских змеек. При не слишком высоких энергиях эффективны первые два метода. На пути использования этой техники уникальным достижением стало ускорение поляризованных протонов в ускорителе ZGS (Аргонна) до 12 ГэВ и в ускорителе AGS (Брукхейвен) до 22 ГэВ [1, 2]. С повышением энергии частиц и размеров ускорителей трудности сохранения поляризации ускоряемого пучка будут быстро возрастать из-за увеличения числа резонансов, разброса их мощностей и частот прецессии.

В области высоких энергий перспективны способы, основанные на существенной перестройке спинового движения, позволяющей избежать пересечения опасных спиновых резонансов. Это можно осуществить применением сибирских змеек [3-5].

В ускорителях без змеек критерии сохранения поляризации основываются, во-первых, на требовании малости возмущения поляризации при прохождении отдельного резонанса, захватывающего много оборотов частиц в ускорителе, и, во-вторых, на требовании малости суммарного эффекта после прохождения большой серии резонансов при ускорении. В ускорителях со змейками критерии сводятся к условию малости изменения поляризации возмущениями в течение только одного оборота частицы, т. е. возмущения должны быть малыми лишь настолько, чтобы не разрушить управление равновесной поляризации змейками [4, 6]. Отсюда ясно, что использование змеек позволяет многократно повысить предельную энергию ускоряемых поляризованных частиц.

В данной работе формулируются основные критерии сохранения поляризации в ускорителях со змейками.

1. Рассмотрим ситуацию, когда в прямолинейные промежутки периодической магнитной системы ускорителя введены две симметрично расположенные змейки, переворачивающие вертикальную поляризацию.<sup>1</sup> Оси поворотов поля-

<sup>1</sup> Мы рассматриваем случай двух, а не одной, змеек, как более наглядный по свойствам равновесного (периодического) движения поляризации пучка.

ризации в змейках лежат в плоскости орбиты и составляют между собой некоторый угол  $\varphi$ , не зависящий от энергии. При этом ось равновесной поляризации  $\mathbf{n}_s$  остается вертикальной вне змеек, меняя знак после прохождения каждой змейки,

$$\mathbf{n}_s(\theta) = \begin{cases} -\mathbf{e}_z & -\pi < \theta < 0, \\ \mathbf{e}_z & 0 < \theta < \pi, \end{cases}$$

где  $\theta$  — обобщенный азимут, а змейки расположены при  $\theta=0$  и  $\theta=\pi$ ,  $\mathbf{e}_z$  — единичный орт вдоль вертикали.

Обобщенная частота прецессии спина при этом равна  $\nu = \varphi/\pi$  ( $2\varphi$  — угол поворота спина вокруг вертикали за один оборот частицы в ускорителе). Возмущение обобщенной частоты прецессии  $\Delta\nu$  и оси прецессии можно найти методом малых возмущений в низших порядках по  $w$  [7]

$$\Delta\nu \simeq \left\langle w\mathbf{n}_s - \frac{1}{2} \operatorname{Im} w\eta \int_{-\infty}^{\theta} w\eta^* d\theta \right\rangle,$$

$$\Delta\mathbf{n} = \operatorname{Im} \eta \int_{-\infty}^{\theta} w\eta^* d\theta, \quad (1)$$

где скобки  $\langle . . . \rangle$  означают усреднение по обобщенному азимуту  $\theta$ ;  $w$  — возмущение угловой частоты прецессии (в единицах частоты обращения частицы), обусловленное свободными колебаниями частиц в пучке и погрешностями магнитной системы ускорителя;  $\eta = \eta_1 + i\eta_2$  — два ортогональных к  $\mathbf{n}_s$  решения, описывающие вращение спина вокруг  $\mathbf{n}_s$ , обладающие свойствами

$$\eta(\theta + 2\pi) = \eta(\theta) \exp(-2\pi i\nu)$$

и имеющие вне змеек вид

$$\eta = (-\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \exp\left(i\nu_0 \int_0^{\theta} \mathcal{K}_z d\theta\right) \quad -\pi < \theta < 0,$$

$$\eta = (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \exp\left(-i\nu_0 \int_0^{\theta} \mathcal{K}_z d\theta\right) \quad 0 < \theta < \pi.$$

Единичные орты  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  направлены соответственно по радиусу и скорости частиц,  $\nu_0 = \gamma ((g-2)/2)$  (для протонов  $(g-2)/2 \simeq 1.8$ ),  $\gamma = \mathcal{E}/mc^2$  — релятивистский фактор,  $\mathcal{K}_z$  — вертикальное магнитное поле в единицах среднего значения.

Условием, обеспечивающим устойчивость поляризации в ускорителе со змейками, является малость  $\Delta\nu$  и  $(\Delta\mathbf{n})$

$$|\Delta\nu| \ll 1, \quad |\Delta\mathbf{n}| \ll 1. \quad (2)$$

При выполнении этих условий опасность могут представлять лишь резонансные возмущения высших порядков. Однако от таких резонансов можно отстроиться подстройкой частоты  $\nu$  и частот орбитального движения частиц. При этом задача сохранения поляризации при ускорении со змейками принципиально не является более сложной, чем обеспечение ее устойчивости в стационарных условиях.

2. Рассмотрим сначала идеализированную ситуацию, когда магнитная система ускорителя не имеет погрешностей и спиновые возмущения связаны лишь с вертикальными бетатронными колебаниями частиц возле плоской равновесной орбиты, не имеющими связи с радиальными колебаниями. При этом

$$w\eta = \nu_0 (\eta\mathbf{e}_x) \frac{z''}{R} \equiv \nu_0 \eta_x \frac{z''}{R},$$

где  $2\pi R$  — периметр орбиты ускорителя,  $z' = d^2z/d\theta^2$ ,  $z = R (af_z + a^*f_z)$  — вертикальное отклонение частицы с амплитудой  $a$ ,

$$f_z = |f_z| \exp \left( i \int_0^\theta \frac{d\theta}{|f_z|^2} \right)$$

— нормированная функция Флоке с приведенной частотой вертикальных колебаний

$$\nu_z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|f_z|^2}.$$

С учетом свойств равновесного спинового движения общие формулы (1) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \langle \Delta v \rangle &= \frac{\nu_0^2 |\bar{a}|^2 \sin \pi \nu}{4\pi \sin \pi (\nu + \nu_z) \sin \pi (\nu - \nu_z)} \left\{ \cos \pi \nu \times \right. \\ &\quad \times \left[ \left| \int_0^\pi f_z'' \eta_x d\theta \right|^2 + \left| \int_0^\pi f_z^{*''} \eta_x d\theta \right|^2 \right] + \\ &\quad \left. + 2 \cos \pi \nu_z \cdot \operatorname{Re} \left[ \left( \int_0^\pi f_z'' \eta_x d\theta \right) \left( \int_0^\pi f_z^{*''} \eta_x d\theta \right) \exp i(\varphi + \pi \nu_0) \right] \right\}, \\ \langle (\Delta n)^2 \rangle &= \frac{\nu_0^2 |\bar{a}|^2}{4} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \pi (\nu + \nu_z)} \left| \int_0^{\theta+2\pi} f_z^{*''} \eta_x d\theta \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin^2 \pi (\nu - \nu_z)} \left| \int_0^{\theta+2\pi} f_z'' \eta_x d\theta \right|^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $|\bar{a}|^2$  — среднее значение по распределению частиц в пучке.

Эти выражения содержат, вообще говоря, резонансные знаменатели вблизи точек

$$\nu \pm \nu_z = k.$$

Но ясно, что выбором угла между осями поворота в змейках можно избежать резонансного усиления  $\Delta v$  и  $(\Delta n)$ . Таким образом, разброс ( $|\Delta v|$  и  $|\Delta n|$ ) остается конечным при любой энергии в процессе ускорения, что означает отсутствие пересечения спиновых резонансов.

Влияние «старых» спиновых резонансов проявляется в зависимости от энергии факторов

$$\left| \int_0^\pi f_z'' \eta_x d\theta \right|^2, \quad \left| \int_0^\pi f_z^{*''} \eta_x d\theta \right|^2,$$

которые резко возрастают в области энергий, когда

$$|\nu_0 - (\pm \nu_z + kN)| \leq 1,$$

где  $N$  — число периодов магнитной системы ускорителя.

Оценка для  $k=0$  дает

$$|a|^2 \left| \int_0^\pi f_z'' \eta_x d\theta \right|^2 \approx \nu_z^4 \frac{\langle z_b^2 \rangle}{R^2}.$$

Таким образом, при прохождении области «старых» спиновых резонансов условие малости возмущения поляризации запишется в виде ( $\nu_0 \sim \nu_z$ )

$$|\Delta v|_r \approx v_z^6 |\sin 2\pi v| \frac{\langle z_b^2 \rangle}{R^2} \ll 1,$$

$$|\Delta n|_r^2 \approx v_z^6 \frac{\langle z_b^2 \rangle}{R^2} \ll 1. \quad (4)$$

Полезно иметь в виду, что при  $\varphi = \pi/2$  (т. е.  $v = 1/2$ ) сдвиг частоты  $\Delta v$  практически отсутствует.

3. В асимптотической области энергии, когда  $v_0 \gg v_x$ , критерии сохранения поляризации будут следующими:

$$|\Delta v|_a \approx v_z^4 |\sin 2\pi v| \frac{\langle z^2 \rangle}{R^2} \ll 1,$$

$$|\Delta n|_a^2 \approx v_z^4 \frac{\langle z^2 \rangle}{R^2} \ll 1. \quad (5)$$

Как видно, эмиттанс пучка оказывает определяющее влияние в районе собственных резонансов.

Оценим тенденцию изменения этих критериев при увеличении радиуса ускорителей (с ростом максимальных энергий при фиксированном максимальном магнитном поле). При этом из (4) и (5) получаем ( $v_x^2 \sim R \sim \gamma_{\max}$ ,  $z^2 \sim \sim (\epsilon_0 R)/(\gamma v_x) \sim \text{const}$ , где  $\epsilon_0$  — инвариантный эмиттанс)

$$|\Delta v|_r \approx |\Delta n|_r^2 \propto R,$$

$$|\Delta v|_a \approx |\Delta n|_a^2 \propto \frac{1}{\sqrt{R}}. \quad (6)$$

Следовательно, при ускорении с пересечением области собственных резонансов ограничение на эмиттанс пучка усиливается пропорционально росту радиуса ускорителей  $R$ .

4. Рассмотрим теперь ограничения на несовершенства магнитной системы, связанные с нерегулярными вариацией направления поля дипольных магнитов и вертикальными смещениями квадруполов. В этом случае

$$w\eta = v_0 \eta_x [h(\theta) + a_s f_x'' + a_s^* f_x^{*''}],$$

$$a_s(\theta) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\theta} h f_x^* d\theta, \quad (7)$$

где  $h$  — возмущающее радиальное поле на расчетной плоской орбите в единицах среднего вертикального поля.

Первый член в (7) учитывает прямое действие  $h$  на спин, второй — действие поля квадруполов на вынужденной траектории частиц

$$z_s(\theta) = z_s(\theta + 2\pi) = a_s(\theta) f_x(\theta) + a_s^*(\theta) f_x^*(\theta),$$

возбуждаемой полем  $h$ .

Так как практически спектр возмущающего поля содержит большое количество высоких азимутальных гармоник  $h_k$  ( $h = \sum_k h_k \exp ik\theta$ ), то можно рассматривать вынужденную амплитуду  $a_s(\theta)$  как функцию, мало меняющуюся на периоде бетатронных колебаний. Поэтому вклад эффектов, связанных с отклонением равновесной траектории от плоской, учитывается аналогично вкладу бетатронных колебаний с заменой

$$|a_b|^2 \rightarrow \langle |a_s|^2 \rangle = \frac{\pi}{8} \frac{\langle |f_x|^2 \rangle \langle h^2 \rangle l_h}{\sin^2 \pi v_x R}; \quad \sin \pi (v \pm v_x) \rightarrow \sin \pi v,$$

где  $l_h$  — средняя длина, на которой поле  $h$  постоянно (длина корреляции) ( $l_h \ll R|v_x$ ).

В области собственных резонансов ( $v_0 \sim v_x$ ) определяющим является вклад искажения замкнутой орбиты (ср. с (3) и (4))

$$(\Delta\nu)_r = \frac{\nu_0^2}{4\pi} \langle |a_s|^2 \rangle \text{ctg } \pi\nu \left[ \left| \int_0^\pi f_z'' \eta_x d\theta \right|^2 + \left| \int_0^\pi f_z^{*''} \eta_x d\theta \right|^2 \right] \approx \\ \approx \frac{\nu_0^4}{16} \frac{\langle h^2 \rangle l_h}{R} \text{ctg } \pi\nu,$$

$$\langle (\Delta\mathbf{n})_r^2 \rangle = \frac{\nu_0^2}{4} \frac{\langle |a_s^2| \rangle}{\sin^2 \pi\nu} \left[ \left| \int_0^{\theta+2\pi} f_z'' \eta_x d\theta \right|^2 + \left| \int_0^{\theta+2\pi} f_z^{*''} \eta_x d\theta \right|^2 \right] \approx \\ \approx \frac{\nu_0^4}{16} \frac{\langle h^2 \rangle l_h}{R \sin^2 \pi\nu}.$$

В области высоких энергий ( $\nu_0 \gg \nu_z$ ) определяющим становится вклад прямого действия поля  $h$

$$\Delta\nu = \frac{\nu_0^2}{4 \sin \pi\nu} \text{Re} \left\{ e^{i\pi\nu} \left\langle h(\theta) \eta_x(\theta) \int_{\theta-2\pi}^{\theta} h(\theta') \eta_x^*(\theta') d\theta' \right\rangle \right\},$$

$$(\Delta\mathbf{n})^2 = \frac{\nu_0^2}{4 \sin^2 \pi\nu} \left| \int_{\theta-2\pi}^{\theta} h(\theta') \eta_x(\theta') d\theta' \right|^2. \quad (9)$$

В случае, если длина корреляции поля  $h$  мала по сравнению с периодом прецессии спина в вертикальном поле  $B_z$ , т. е.

$$l_h \ll \frac{2mc^2}{(g-2)eB_z} = \frac{R}{\nu_0}, \quad (10)$$

из (9) получаем

$$\Delta\nu = \frac{\nu_0^2 \text{ctg } \pi\nu}{4R} \langle h^2 \rangle l_h,$$

$$\langle (\Delta\mathbf{n})^2 \rangle = \frac{\pi}{2} \frac{\nu_0^2 \langle h^2 \rangle}{\sin^2 \pi\nu} \frac{l_h}{R}. \quad (11)$$

Условие (10) может нарушаться на максимальных энергиях (в сверхпроводящих дипольных магнитах). Приведем оценку в случае  $l_h \gg R/\nu_0$  для ступенчатого возмущения длиной  $l_h$

$$|\Delta\nu| \approx (\Delta\mathbf{n})^2 \approx \frac{\langle h^2 \rangle}{l_h} R. \quad (12)$$

Из сравнения (11) и (12) видно, что наибольшую опасность представляют возмущения с длиной корреляции  $l_h \sim R/\nu_0$ . В этой области частот имеем

$$\Delta\nu \approx (\Delta\mathbf{n})^2 \approx \nu_0 \langle h^2 \rangle. \quad (13)$$

Длины корреляции характерных возмущений практически не изменяются при увеличении размеров ускорителей. Поэтому  $\Delta\nu$  и  $(\Delta\mathbf{n})^2$  в области при максимальных энергиях, как следует из (11)–(13), имеет следующую тенденцию роста с увеличением  $R$ :

$$\Delta\nu \sim (\Delta\mathbf{n})^2 \sim R.$$

5. Следует отметить еще один возможный эффект — сдвиг спиновой частоты из-за нерегулярных возмущений величины поля  $B_z$  (в диполях), вносящих асимметрию углов поворота поляризации между змейками. С помощью (1) получаем

$$(\Delta\nu)^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_0^{2\pi} \mathbf{w}\mathbf{n}_s d\theta \right|^2 = \nu_0 \langle h_z^2 \rangle \frac{l_h}{2\pi R}.$$

Связанное с этим эффектом ограничение имеет ту же тенденцию усиления с ростом энергии, что и эффекты радиального поля, хотя сам сдвиг  $\Delta\nu$  является не квадратичной функцией возмущающего поля, а линейной. Однако эффект

асимметрии поля  $B_z$  принципиально просто можно компенсировать, располагая змейки вблизи синхронизированных ВЧ станций.

Наконец, что касается возмущающего влияния самой змейки из-за погрешностей ее изготовления и выставки, то практически следует заботиться лишь о компенсации (при необходимости) возмущения траекторий частиц.

6. Сравнение критериев прохождения района собственных резонансов и ускорения до максимальной энергии ускорителя показывает, что эти критерии имеют одинаковую тенденцию усиления с ростом и близкий порядок величины ( $v_0 \sim v_z^2$ ). Следовательно, если не будут выполнены критерии устойчивости поляризации при максимальной энергии в ускорителе, то поляризация при ускорении может быть разрушена уже в районе сравнительно низких энергий при  $\mathcal{E}$  (ГэВ)  $\sim v_z$ . Избежать этого можно, используя ступенчатое ускорение с инжекцией в большое кольцо при энергиях  $\mathcal{E}_{in} \gg v_z$ . Если же  $\mathcal{E}_{in} \leq v_z$ , то можно использовать способы подавления резонансного влияния вертикальных колебаний на поляризацию, описанные в работе [6]: а) модуляцию силы дипольных магнитов по кольцу; б) введение дополнительных пар змеек; при 2M-змейках параметры  $(\Delta v)_r$  и  $(\Delta n)_r^2$  в области собственных резонансов уменьшаются в  $M^2$  раз; в) создание специальной структуры периода магнитной системы, в которой параметры  $(\Delta v)_r$  и  $(\Delta n)_r^2$  уменьшаются до уровня эффектов прямого действия возмущающего поля на спин.

С учетом названных возможностей можно считать, что определяющими критериями сохранения и контроля поляризации пучка при ускорении до энергии  $\mathcal{E} \leq \mathcal{E}_{max}$  является малость  $\Delta v_\alpha$  и  $(\Delta n)_\alpha^2$ .

7. Приведем оценку критериев для области максимальной энергии по формулам (11)–(13), описывая возмущающее поле параметрами  $h$  угловым отклонением поля в диполях от вертикали  $\alpha$  и смещением квадрупольей  $\Delta z_q$

$$h_\alpha = \alpha K_z \approx \alpha; \quad h_q = \frac{1}{\langle B_z \rangle} \frac{\partial B_z}{\partial z} \Delta z_q \approx v_z^2 \frac{\Delta z_q}{R}.$$

В квадрупольях длина корреляции не превышает длину квадрупольей  $l_q$  ( $l_h \leq l_q$ ).

С помощью формул (11) и (13) получаем следующие ограничения на точность выставки квадрупольей  $\Delta z_q$  и угла  $\alpha$  диполей:

$$|\Delta z_q| \leq \frac{R}{v_0 v_z^2} \sqrt{\frac{R}{l_q}}; \quad |\alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{v_0}}.$$

Для ускорителя протонов на энергию 20 ТэВ при максимальном поле 10 Тл ( $R \approx 20$  км) получаем следующее ограничение на  $\alpha$  и  $\Delta z_q$  ( $v_z = 100$ ,  $l_q = 100$  см):

$$|\Delta z_q| \leq 0.5 \text{ см}; \quad |\alpha| \leq 10^{-2}.$$

Отметим, что оценка для  $\alpha$  приведена для наиболее неблагоприятной ситуации, когда  $l_h \approx R/v_0$ .

Для типичных сверхпроводящих магнитов при  $B_z = 10$  Тл длина магнитов велика по сравнению с  $R/v_0$ . Поэтому ограничение на выставку диполей будет, согласно (12), еще слабее, а критерий  $|\alpha| \ll 1/\sqrt{v_0}$  следует отнести к соответствующим погрешностям поля внутри диполей.

На основе приведенных оценок можно сделать вывод, что является реальным ускорение поляризованных частиц до максимальных энергий в существующих и проектируемых сегодня ускорителях.

#### Список литературы

- [1] Криш А. Д. // VII Междунар. симп. по спиновым явлениям в физике высоких энергий. Серпухов, 1987. Т. 1. С. 272–287.
- [2] Ратнер Л. Г. // VII Междунар. симп. по спиновым явлениям в физике высоких энергий. Серпухов, 1987. Т. 2. С. 206–209.
- [3] Дербенев Я. С., Кондратенко А. М. // ДАН СССР. 1985. Т. 223. № 4. С. 830–833.
- [4] Дербенев Я. С., Кондратенко А. М. // Тр. X Междунар. конф. по ускорителям заряженных частиц высоких энергий. Серпухов, 1977. Т. 2. С. 70–75.

- [5] *Дербенев Я. С., Кондратенко А. М.* // Спин в физике высоких энергий. Тр. Междунар. симп. по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна. 1982. С. 281—290.
- [6] *Дербенев Я. С., Кондратенко А. М.* // Тр. VIII Всесоюз. совещ. по ускорителям заряженных частиц. Дубна. 1983. Т. 1. С. 207—211. *Derbenev Ya. S., Kondratenko A. M.* // Proc. 12<sup>th</sup> Intern. Conf. On High-Energy Accelerators. Illinois: Fermilab, 1983. P. 413—415.
- [7] *Дербенев Я. С., Кондратенко А. М., Скрябинский А. Н.* // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 1216—1227.

Научно-исследовательский,  
проектно-конструкторский  
и технологический институт  
комплектного электропривода  
Новосибирск

Поступило в Редакцию  
13 сентября 1988 г.

