

01

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ КОНСТРУИРОВАНИЯ
ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА
И ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ АТТРАКТОРА
ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

П. С. Ланда, М. Г. Розенблюм

Показано, что для конструирования фазового пространства по экспериментальной реализации и вычисления размерности вложения аттрактора может быть использован разработанный в теории распознавания образов метод построения хорошо приспособленного базиса. Проведено сравнение эффективности этого метода с методом Брумхада и Кинга.

Известно, что при экспериментальном исследовании диссипативной динамической системы, демонстрирующей сложное непериодическое поведение, представляется важным определить количественные характеристики ее аттрактора, в частности размерность вложения и хаусдорфову размерность [1, 2]. Связь между хаусдорфовой размерностью аттрактора и размерностью вложения определяется теоремой Мане [3] и имеет вид $m \leq 2d+1$. Значение размерности аттрактора является функцией параметров системы и может быть использовано в качестве одной из характеристик ее состояния при решении задач диагностики.

Наиболее распространенный метод определения размерности аттрактора заключается в вычислении оценки размерности Хаусдорфа снизу — так называемой корреляционной размерности [4]

$$\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} [\lg C(\epsilon, N) / \lg \epsilon],$$

где

$$C(\epsilon, N) = N^{-2} \sum_{i \neq j} \vartheta(\epsilon - |X_i - X_j|)$$

— корреляционный интеграл, ϵ — расстояние между точками X_i и X_j в n -мерном фазовом пространстве, N — число n -мерных точек, ϑ — функция Хевисайда.

Конструирование n -мерного фазового пространства по экспериментально полученной реализации одной из координат системы $v_i = v(i\tau)$ и получение множества n -мерных точек X_i ($i=1, 2, \dots, N$) может быть произведено на основе теоремы Такенса [5]. При этом

$$X_i = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+n-1}).$$

Недостатком такого способа построения фазового пространства является то, что при малых сдвигах τ сконструированный аттрактор вытягивается вдоль прямой, определяемой равенством всех координат пространства, при этом теряется информация о структуре аттрактора и его характеристиках. Метод построения фазового пространства, предложенный в работе [6], лишен этого недостатка. Одновременно этот метод позволяет определить минимальную размерность пространства, в которое может быть вложен аттрактор (размерность вло-

жения). Идея этого метода заключается в следующем. По алгоритму Такенса конструируется последовательность точек X_i в пространстве некоторой достаточно большой размерности n . В этом пространстве на основе вычисления собственных значений ковариационной матрицы процесса v_i определяется число линейно независимых координат, которое и называется размерностью вложения. В работе [6] отмечена связь предложенного метода с известной в теории распознавания образов теоремой Карунена—Лоэва [7, 8].

Указанный метод был использован в работе [2] для вычисления размерности вложения и корреляционной размерности аттрактора Ресслера; показана эффективность этого метода даже при высоком уровне наложенного на динамический процесс шума.

В настоящей работе показано, что для эффективного конструирования фазового пространства, вычисления размерности вложения аттрактора и фильтрации шума может быть использован и другой метод теории распознавания образов, разработанный для решения задачи об оптимальном кодировании многомерных массивов экспериментальных данных и названный в [7] методом построения хорошо приспособленного базиса. Подход с точки зрения теории распознавания образов позволяет рассмотреть оба метода с единых позиций, оценить их ошибки и сформулировать ограничения на их использование.

Аппроксимация множества точек фазового пространства множеством, лежащим в подпространстве меньшей размерности

Рассмотрим сконструированное по алгоритму Такенса множество точек X_i в n -мерном пространстве и будем аппроксимировать его с точностью ε некоторым множеством \tilde{X}_i , лежащим в линейном подпространстве размерности $k < n$, т. е. будем искать ортонормированный k -мерный базис, в котором точки X_i будут с требуемой точностью приближены точками \tilde{X}_i . Построим график зависимости ошибки аппроксимации от размерности k аппроксимирующего пространства и будем по нему определять размерность вложения m . Действительно, пока k увеличивается, оставаясь меньше m , ошибка должна уменьшаться, а при $k \geq m$ она при отсутствии шума обратилась бы в нуль. Так как шум всегда присутствует, то при $k \geq m$ ошибка будет иметь почти постоянное значение, определяемое шумом. На графике этому будет соответствовать характерная «ступенька». Искомая размерность вложения равна размерности аппроксимирующего пространства, соответствующей первой точке «ступеньки». Физически это означает, что дальнейшее увеличение k не повышает точности аппроксимации.

Известно [7, 8], что минимальная среднеквадратичная ошибка

$$\varepsilon^2 = N^{-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \tilde{X}_i)^2$$

достигается выбором базиса, совпадающего с первыми k собственными векторами ковариационной матрицы Θ процесса X_i , взятыми в порядке убывания соответствующих собственных значений λ_k ; при этом $\varepsilon^2 = \lambda_{k+1}$. Ковариационная матрица Θ — квадратная симметрическая действительная матрица порядка n

$$\Theta_{ij} = N^{-1} \sum_{i=1}^N X_{i,i} \cdot X_{i,j} = N^{-1} \sum_{i=1}^N v_{i+i-1} \cdot v_{i+j-1},$$

где $X_{i,i}$, $X_{i,j}$ — i -я и j -я координаты точки X_i .

Метод разложения многомерного процесса по собственным векторам ковариационной матрицы, известный в теории распознавания образов как метод ортогональных компонент, соответствует методу определения размерности, предложенному Брумхэдом и Кингом [5]. Для определения размерности m они строили

график зависимости $\lg \left(\lambda_k / \sum_{i=1}^k \lambda_i \right) = f(k)$, однако физический смысл этой зависимости оставался неясным. Более целесообразно анализировать зависимость

ошибки аппроксимации $\varepsilon_k = \sqrt{\lambda_{k+1}}$ от размерности пространства k . Как будет показано ниже, это позволяет получить лучшие результаты.

Так как описанный выше метод минимизирует среднеквадратичную ошибку, то погрешность его применения может быть недопустимо велика для сильно неоднородных аттракторов, т. е. аттракторов, плотность заполнения которых фазовыми точками существенно неравномерна. Для оценки размерности вложения в этом случае более эффективен метод построения хорошо приспособленного базиса, разработанный Ю. И. Неймарком с сотрудниками [7] для кодирования биомедицинской информации. Этот метод основан на равномерном (чебышевском) приближении точек множества X_i множеством \tilde{X}_i . Это значит, что для всех точек множества выполняется условие

$$|X_i - \tilde{X}_i| < \varepsilon.$$

Алгоритм построения хорошо приспособленного базиса следующий [7].

Найдем среднюю точку множества $X_0 = N^{-1} \sum_{i=1}^N X_i$, затем наиболее удаленную от нее точку S_1 . Направление от X_0 к S_1 примем за направление первого базисного вектора, расстояние от X_0 до S_1 обозначим δ_1 . Затем все точки спроецируем на гиперплоскость размерности $n-1$, перпендикулярную этому вектору и проходящую через точку X_0 . Для получившихся точек на гиперплоскости также найдем наиболее удаленную, и т. д.

Зависимость δ_{k+1} от k есть искомая зависимость ошибки аппроксимации от размерности пространства.

Переход к ортонормированному базису и фильтрация внешнего шума

В работе [5] указывалось, что при переходе к собственному базису ковариационной матрицы происходит сглаживание шума. Это имеет место и при переходе к хорошо приспособленному базису. Действительно, n -мерный процесс X_i можно представить в виде $X_i = \varphi_i + \eta_i$, где φ ($\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$) — процесс, порожденный динамической системой; η ($\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$) — шум. Если все компоненты η — независимые случайные процессы с одинаковыми дисперсиями и нулевыми средними, то дисперсия шума при переходе к ортонормированному m -мерному базису уменьшается в n/m раз [7]

$$D(\tilde{X} - \tilde{\varphi}) = D(\tilde{\eta}) = m/n D(\eta).$$

Проекцию X на любую из осей нового базиса в свою очередь можно рассматривать как реализацию одной из координат динамической системы. Применяя алгоритм Такенса, по ней можно сконструировать новое n -мерное пространство и перейти в нем к m -мерному ортонормированному базису [6]. Повторение этой процедуры k раз приведет к эффективному подавлению шума, дисперсия которого уменьшится в $(n/m)^k$ раз.

Результаты численного моделирования

Описанные выше методы конструирования фазового пространства динамической системы по реализации одной переменной исследовались на ЭВМ на примере уравнений Ресслера

$$\dot{x} = -z - y, \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = b + z(x - c) \quad (1)$$

при $a=0.15$, $b=0.2$ и $c=10$ и уравнений, описывающих поведение биохимической системы с существенно неоднородным аттрактором [8],

$$\dot{x} = 1 - bx - xy^2 - exy + z, \quad \dot{y} = a(xy^2 - y + d), \quad \dot{z} = f(exy - z) \quad (2)$$

при $a=4$, $b=0.35$, $d=0.1$, $f=0.2$ и $e=1.4$. Для конструирования n -мерного пространства в обоих случаях использовалась координата x , для которой делались

выборки с интервалом Δt . Значение n выбиралось равным 10 при длине реализации 8000 точек. Размерность вложения аттрактора m определялась по графику ошибки аппроксимации при различных Δt . Для аттрактора Ресслера правильное значение $m=3$ получалось для интервалов дискретизации $T/800 \leq \Delta t \leq T/100$, где T — среднее время между соседними максимумами процесса («период»), при переходе к собственному базису ковариационной матрицы и для интервалов дискретизации $T/800 \leq \Delta t \leq T/20$ при переходе к хорошо приспособленному базису. Для неоднородного аттрактора системы (2) правильная оценка получалась соответственно для интервалов дискретизации $T/200 \leq \Delta t < T/100$ и $T/800 \leq \Delta t \leq T/50$.

Таким образом, метод Неймарка оказывается значительно менее чувствительным к выбору интервала дискретизации, чем метод Брумхэда и Кинга, особенно для существенно неоднородных аттракторов. Для реализации этих алгоритмов на ЭВМ типа IBM PC/XT требовалось примерно 9 и 3 мин соответственно.

Характерный график зависимости ошибки аппроксимации от размерности аппроксимирующего пространства приведен на рис. 1.

Если для определения размерности вложения по собственным значениям ковариационной матрицы использовался график зависимости $\lg \left(\lambda_k / \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) =$

$=f(k)$, как предлагалось в [6], то правильную оценку для аттрактора Ресслера удавалось получить только при $\Delta t \approx T/800$. Для неоднородного аттрактора системы [2] правильной оценки не удавалось получить ни при каких значениях Δt .

Вычисление корреляционной размерности аттрактора

Фазовое пространство, полученное после перехода к ортонормированному базису, может быть использовано для вычисления корреляционной размерности ν . При этом корреляционный интеграл достаточно вычислять только один раз, так как размерность вложения m , полученная при построении базиса, дает оценку сверху для корреляционной размерности. Таким образом, для вычисления ν необходимо сконструировать по алгоритму Такенса фазовое пространство размерности n , выбрав n достаточно большим. После этого необходимо перейти к новой системе координат, образованной m -мерным ортогональным базисом, который может быть получен как по алгоритму построения хорошо приспособленного базиса, так и вычислением собственных векторов ковариационной матрицы. Этот переход можно осуществить, вычислив проекции точек сконструированного по Такенсу пространства на новые базисные векторы. При этом только m проекций будут отличны (с точностью ϵ) от нуля, следовательно, для вычисления расстояния между точками в новом фазовом пространстве достаточно учитывать только m координат.

При традиционном методе вычисления ν с использованием алгоритма Такенса априорных оценок размерности аттрактора не существует и корреляционные интегралы приходится вычислять несколько раз, увеличивая размерность пространства n . При этом вследствие указанного выше вытягивания аттрактора вдоль прямой возникают довольно жесткие ограничения на интервал дискретизации Δt исследуемого процесса. Обычно рекомендуется его выбирать из расчета 3—5 точек на «период» [10]. Если Δt мало, то вычисляемая размерность становится близкой к единице. Кроме того, наблюдение и регистрация приблизительно 2—3 тыс. «периодов» исследуемого процесса не всегда возможно по условиям эксперимента.

Как показывают расчеты, конструирование фазового пространства с помощью перехода к ортонормированному базису позволяет получить оценку размерности аттрактора в более широком интервале значений Δt . На рис. 2 приведена зависимость γ для аттрактора Ресслера от числа точек на «период» T для разных способов вычисления. Для расчетов использовалось 8000 точек.

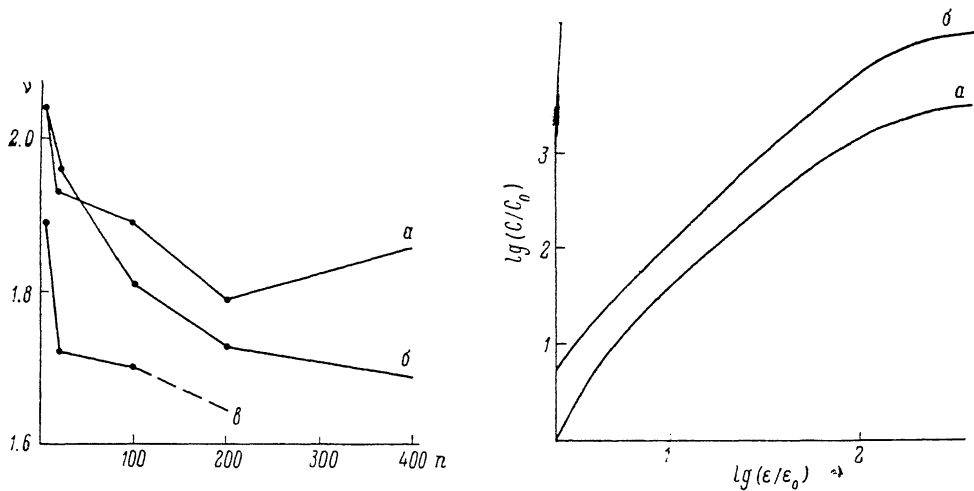


Рис. 2. Зависимость корреляционной размерности γ от числа точек на «период».

a — использован собственный базис ковариационной матрицы, *b* — хорошо приспособленный базис, *e* — алгоритм Такенса.

Рис. 3. Корреляционный интеграл, вычисленный с помощью алгоритма Такенса (*a*), и корреляционный интеграл, вычисленный после перехода к ортонормированному базису (*b*).

При малых Δt корреляционный интеграл, вычисленный с использованием алгоритма Такенса, плохо аппроксимируется прямой и не позволяет получить надежную оценку размерности. На рис. 3 представлен график корреляционного интеграла, соответствующий случаю $\Delta t = T/100$. Для сравнения приведен также график интеграла, полученного с помощью перехода к ортонормированному базису (корреляционные интегралы, полученные с помощью двух описанных выше методов, практически совпадают).

Заключение

Применение методов теории распознавания образов для вычисления размерности аттрактора динамической системы позволяет получить быстрые алгоритмы определения размерности вложения. Алгоритм, основанный на вычислении собственного базиса ковариационной матрицы, более прост в реализации, требует меньше памяти и работает быстрее, чем алгоритм, основанный на построении хорошо приспособленного базиса. Однако последний менее зависим от частоты дискретизации исследуемого процесса. Кроме того, первый метод может быть с уверенностью применен только при исследовании слабо неоднородных аттракторов. Метод построения хорошо приспособленного базиса таких ограничений не накладывает.

Оба метода позволяют реализовать фильтрацию, т. е. выделить случайный процесс, порожденный динамической системой, из внешнего шума.

Применение этих методов для конструирования фазового пространства по экспериментальной реализации позволяет вычислить корреляционную размерность аттрактора с меньшими затратами машинного времени и в более широком диапазоне частот дискретизации.

Преимущества описанных методов позволяют рекомендовать их для экспериментального исследования различных динамических систем.

Список литературы

- [1] Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 423 с.
- [2] Ланда П. С., Розенблюм М. Г. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 1. С. 13—21.
- [3] Mane R. // Lect. Notes in Math. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1981. Vol. 898. P. 230—242.
- [4] Grassberger W. // J. Stat. Phys. 1981. Vol. 26. N 1. P. 173—179.
- [5] Takens F. // Lect. Notes in Math. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1981. Vol. 898. P. 366—381.
- [6] Broomhead D. S., King G. P. // Phys. D. 1986. Vol. 20. P. 217—236.
- [7] Распознавание образов и медицинская диагностика / Под ред. Ю. И. Неймарка. М.: Наука, 1972. 328 с.
- [8] Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. М.: Наука, 1979. 368 с.
- [9] Herzel H., Schulmeister Th. // Syst. Anal. Model. Simul. 1987. Vol. 4. N 2. P. 113—124.
- [10] Caputo J. G., Malraison B., Atten P. // Dimensions and Entropies in Chaotic Systems. Quantification of Complex Behaviour. Heidelberg, 1986. P. 180—190.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в Редакцию
11 октября 1988 г.