

МАГНИТНАЯ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ СИСТЕМЫ КРУГЛЫХ ОТВЕРСТИЙ В ПЛОСКОМ ЭКРАНЕ

В. Н. Родионова, Г. Я. Слепян

При помощи метода парных интегральных уравнений рассмотрена задача о магнитной поляризуемости двух круглых отверстий в плоском экране. Ее решение сведено к системе интегральных уравнений Фредгольма для вспомогательных функций. Вычислены тензоры поляризуемости отверстий с учетом их взаимного влияния.

Введение

Широкий класс смешанных краевых задач в цилиндрических координатах сводится к парным интегральным уравнениям с ядрами в виде функций Бесселя. Один из наиболее эффективных методов их решения заключается в переходе от них к интегральным уравнениям Фредгольма для некоторых вспомогательных функций [1-4]. Таким путем, в частности, строго решаются задачи электро- и магнитостатики для различных систем из соосных параллельных дисков, круговых диафрагм [1-3], их комбинаций [4].

Данная работа посвящена обобщению подхода [1-4] на случай, когда условие соосности не выполняется. Изложение ведется на примере задачи о магнитной поляризуемости системы двух круговых отверстий в плоском идеально проводящем экране. Такая задача представляет интерес для оценки взаимного влияния отверстий при проектировании направленных ответвителей, элементов связи резонансных систем СВЧ диапазона с линиями передачи и т. д. [5, 6].

Идея излагаемой методики заключается в том, что при помощи теорем сложения для цилиндрических функций [7] исходная краевая задача сводится к системе парных интегральных уравнений, обобщающей парные уравнения, исследованные в [1-4]. Эта система преобразуется к системе интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода. Выполняется ее приближенное решение методом итераций, на основе которого вычисляются тензоры магнитной поляризуемости отверстий с учетом их взаимного влияния.

Постановка задачи

Геометрия рассматриваемой задачи и основные обозначения показаны на рисунке. Каждое из отверстий характеризуется тензором

$$\vec{M}^{(j)} = \begin{pmatrix} M_{xx}^{(j)} & 0 \\ 0 & M_{yy}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

индекс j принимает значения 1, 2 и указывает на принадлежность к первому либо второму отверстию.

Поляризующее магнитостатическое поле \mathbf{H}_0 предполагаем однородным и параллельным плоскости чертежа. Для вычисления $M_{xx}^{(j)}$ необходимо рассмотреть случай, когда \mathbf{H}_0 направлено вдоль линии, соединяющей центры отверстий; для вычисления $M_{yy}^{(j)}$ требуется случай, когда \mathbf{H}_0 ортогонально этой ли-

нии. Подробно изложим методику решения лишь для первого случая. Для второго случая будем оговаривать кратко необходимые изменения и приведем окончательные формулы для $M_{yy}^{(j)}$.

Так, согласно [8],

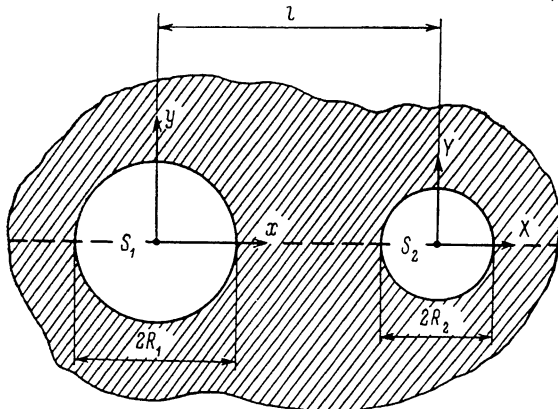
$$M_{xx}^{(1)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} f_1(r, \varphi) \sin \varphi r dr d\varphi, \quad (2)$$

где f_1 должно быть определено из системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \frac{f_1(M') dS_1'}{|M - M'|} + \int_{S_2} \frac{f_2(P') dS_2'}{|M - P'|} &= 4\pi x, \\ \int_{S_1} \frac{f_1(M') dS_1'}{|P - M'|} + \int_{S_2} \frac{f_2(P') dS_2'}{|P - P'|} &= 4\pi X, \end{aligned} \quad (3)$$

$M, M' \in S_1; P, P' \in S_2$.

Для вычисления $M_{yy}^{(1)}$ необходимо заменить в (2) $\sin \varphi \rightarrow \cos \varphi$, а в правой части (3) — $x \rightarrow y, X \rightarrow Y$. Аналогично выражаются и $M_{xx, yy}^{(2)}$.



Парные интегральные уравнения и сведение их к уравнениям Фредгольма

Введем для каждого из отверстий локальные цилиндрические координаты соотношениями $x + jy = re^{j\varphi}, X + jY = Re^{j\Phi}$. Представим искомые из (3) функции разложениями

$$f_1(M) = a_0(r) + \sum_{p=1}^{\infty} a_p(r) \cos p\varphi,$$

$$f_2(P) = b_0(R) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p(R) \cos p\Phi,$$

где $a_p(r), b_p(R)$ — неизвестные функции. Для них, используя равенство [7]

$$\frac{1}{\rho} = \int_0^{\infty} J_0(\lambda\rho) d\lambda$$

и теорему сложения цилиндрических функций [7], можно перейти от (3) к системе интегральных уравнений вида

$$\int_0^{R_1} g_{qq}^{(0)}(r', r) a_q(r') r' dr' + \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{R_2} G_{mq}^{(1)}(R', r) b_m(R') R' dR' = \frac{1}{2} \delta_{q1} r,$$

$$\int_0^{R_2} g_{qq}^{(0)}(R', R) b_q(R') R' dR' + \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{R_1} G_{mq}^{(2)}(R, r') a_m(r') r' dr' = \frac{1}{2} \delta_{q1} R. \quad (4)$$

Здесь

$$G_{mq}^{(j)} = \frac{1}{2} (2 - \delta_{q0}) [g_{mq}^{(j)} + g_{-mq}^{(j)}].$$

$$g_{qq}^{(0)}(r', r) = \int_0^{\infty} J_q(\lambda r) J_q(\lambda r') d\lambda, \quad g_{mq}^{(1)}(R', r) = \int_0^{\infty} J_q(\lambda r) J_m(\lambda R') J_{q-m}(\lambda l) d\lambda,$$

$g_{mq}^{(2)} = (-1)^{n+q} g_{mq}^{(1)}$, $J_q(x)$ — функция Бесселя, δ_{qm} — символ Кронекера.

Введем новые неизвестные $C_q(\lambda)$, $D_q(\lambda)$ соотношениями

$$C_q(\lambda) = \int_0^{R_1} a_q(r) J_q(\lambda r) r dr, \quad (5)$$

$$D_q(\lambda) = \int_0^{R_2} b_q(r) J_q(\lambda r) r dr. \quad (6)$$

Для них имеет место система парных интегральных уравнений вида

$$\int_0^{\infty} C_q(\lambda) J_q(\lambda r) d\lambda + \int_0^{\infty} J_q(\lambda r) \sum_{m=0}^{\infty} D_m(\lambda) g_{mq}(\lambda) d\lambda = f_q(r), \quad 0 \leq r \leq R_1,$$

$$\int_0^{\infty} \lambda C_q(\lambda) J_q(\lambda r) d\lambda = 0, \quad R_1 \leq r < \infty,$$

$$\int_0^{\infty} D_q(\lambda) J_q(\lambda r) d\lambda + \int_0^{\infty} J_q(\lambda r) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{q+m} g_{mq}(\lambda) C_m(\lambda) d\lambda = f_q(r), \quad 0 \leq r \leq R_2,$$

$$\int_0^{\infty} \lambda D_q(\lambda) J_q(\lambda r) d\lambda = 0, \quad R_2 \leq r < \infty, \quad (7)$$

где $f_q(r) = r\delta_{q1}/2$, $g_{mq}(\lambda) = (1 - \delta_{q0}/2) [J_{q-m}(\lambda l) + (-1)^m J_{q+m}(\lambda l)]$.

Система парных уравнений (7) обобщает изученные в [1-4]. Чтобы убедиться в ее эквивалентности интегральным уравнениям (4), достаточно подставить в (7) соотношения (5), (6). При этом второе и четвертое уравнения (7) выполняются тождественно, а первое и третье уравнения (7) приводят соответственно к первому и второму уравнениям системы (4).

Следующий этап состоит в переходе к интегральным уравнениям Фредгольма. Как и в [1-4], введем систему вспомогательных функций $\varphi_q(x)$, $\Phi_q(t)$ при помощи равенств

$$C_q(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2}} \int_0^{R_1} \sqrt{x} \varphi_q(x) J_{q-1/2}(\lambda x) dx,$$

$$D_q(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2}} \int_0^{R_2} \sqrt{t} \Phi_q(t) J_{q-1/2}(\lambda t) dt.$$

Действуя аналогично [2, с. 55-57], можно [получить для $\varphi_q(x)$, $\Phi_q(t)$ систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\varphi_q(x) = \frac{2}{\pi} x\delta_{q1} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{R_2} K_{mq}(x, t) \Phi_m(t) dt,$$

$$\Phi_q(t) = \frac{2}{\pi} t \delta_{q,1} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+q} \int_0^{R_1} K_{mq}(t, x) \varphi_m(x) dx;$$

$$0 \leq x \leq R_1, \quad 0 \leq t \leq R_2, \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad K_{mq}(x, t) \quad (8)$$

представляются интегралами

$$K_{mq}(x, t) = \pi \sqrt{xt} \int_0^{\infty} \lambda g_{mq}(\lambda) J_{q-1/2}(\lambda x) J_{m-1/2}(\lambda t) d\lambda.$$

Эти интегралы могут быть вычислены при помощи соотношения (2.12.42.5) из [9]. При этом имеем

$$K_{mq}(x, t) = \frac{\pi (2 - \delta_{q,0}) t^m x^q}{l^{1+m+q} \Gamma(m+1/2) \Gamma(q+1/2)} \left[\frac{\Gamma(q+1/2)}{\Gamma(1/2-m)} F_4 \left(m + \frac{1}{2}, q + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, q + \frac{1}{2}, \frac{t^2}{l^2}, \frac{x^2}{l^2} \right) + (-1)^m \frac{\Gamma(m+q+1/2)}{\Gamma(1/2)} \times \right. \\ \left. \times F_4 \left(\frac{1}{2}, m+q+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, q+\frac{1}{2}, \frac{t^2}{l^2}, \frac{x^2}{l^2} \right) \right], \quad (9)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, F_4 — гипергеометрическая функция Аппеля [9].

Система (8) удобна для численного решения путем учета в ней конечного числа неизвестных и уравнений и использования стандартных вычислительных процедур. Элементы тензора $M_{xx}^{(j)}$ непосредственно выражаются через решения (8) соотношениями

$$M_{xx}^{(1)} = 2\pi \int_0^{R_1} \varphi_1(x) x dx, \quad M_{xx}^{(2)} = 2\pi \int_0^{R_2} \Phi_1(t) t dt. \quad (10)$$

Система (8) допускает также приближенное аналитическое решение, чему будет посвящен следующий раздел.

Случай, когда поляризующее поле направлено ортогонально линии, соединяющей центры отверстий, рассматривается аналогично. Система парных уравнений имеет вид (7), но в ней

$$q_{mq}(\lambda) = [J_{q-m}(\lambda l) - (-1)^m J_{q+m}(\lambda l)],$$

а индексы m, q принимают значения $1, 2, \dots$. С учетом этих обстоятельств видоизменяется система (8), а элементы тензора выражаются через ее решения формулами (10).

Приближенное аналитическое решение

Построение приближенного решения данной задачи возможно, если отверстия разнесены достаточно далеко $R_{1,2} \ll l$. Пренебрегая членами порядка $O(l^{-6})$, в (8) достаточно учесть лишь четыре неизвестных с $m, q=0,1$. Это следует из асимптотических оценок $K_{mq}(x, t)$ при $l \rightarrow \infty$, непосредственно вытекающих из равенств (9). Для $m, q=0, 1$ выражения (9) преобразуются к элементарным функциям

$$K_{00}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{l^2 - (x-t)^2}} + \frac{1}{\sqrt{l^2 - (x+t)^2}},$$

$$K_{01}(x, t) = \frac{2}{l} \left[\frac{(x-t)}{\sqrt{l^2 - (x-t)^2}} + \frac{(x+t)}{\sqrt{l^2 - (x+t)^2}} \right],$$

$$K_{10}(x, t) = -K_{01}(t, x)/2,$$

$$K_{11}(x, t) = -\frac{2}{l^2} \left[\frac{(t+x)^2}{\sqrt{l^2 - (t+x)^2}} - \frac{(t-x)^2}{\sqrt{l^2 - (t-x)^2}} \right].$$

Решение интегральных уравнений проводится методом итераций; в качестве начального приближения принимаются

$$\varphi_0^{(0)} = \Phi_0^{(0)} = 0, \quad \varphi_1^{(0)} = \frac{2}{\pi} x, \quad \Phi_1^{(0)} = \frac{2}{\pi} t.$$

Ограничиваясь двумя итерациями, вычисляем с использованием (10)

$$M_{xx}^{(1)} = \frac{4}{3} R_1^3 \left[1 + \frac{8}{3\pi} \left(\frac{R_2}{l} \right)^3 + \frac{8}{3\pi^2} \frac{R_1^3 R_2}{l^4} \right] + O(l^{-5}). \quad (11)$$

Для получения $M_{xx}^{(2)}$ необходимо в (11) заменить $R_1 \rightarrow R_2$, $R_2 \rightarrow R_1$.

Аналогично можно проанализировать и случай, когда поле \mathbf{H}_0 ортогонально линии, соединяющей центры окружностей. При этом с точностью $O(l^{-7})$ в системе интегральных уравнений (8) можно учесть только два уравнения и два неизвестных с $m, q=1$. Ядро $K_{11}(x, t)$ для этой системы дается соотношением

$$K_{11}(x, t) = \frac{2}{l^2} [\sqrt{l^2 - (t-x)^2} - \sqrt{l^2 - (l+x)^2}].$$

Решение также производится методом итераций с тем же, что и в первом случае, начальным приближением для φ_1, Φ_1 . С точностью $O(l^{-6})$ достаточно ограничиться только одной итерацией; при этом имеем

$$M_{yy}^{(1)} = \frac{4}{3} R_1^3 \left[1 - \frac{4}{3\pi} \frac{R_2^3}{l^3} + \frac{2}{5\pi} \frac{(R_2^5 + R_1^5 R_2^3)}{l^5} \right] + O(l^{-6}). \quad (12)$$

Для получения $M_{yy}^{(2)}$ следует, как и в (11), заменить $R_1 \rightarrow R_2$, $R_2 \rightarrow R_1$.

Формулы (11), (12) являются искомыми соотношениями для элементов тензора магнитной поляризуемости. Второй и третий члены в них описывают взаимное влияние отверстий. Условием справедливости (11), (12) является малость третьего члена в сравнении со вторым. Эти соотношения точнее и имеют более широкую область применимости, чем полученные в [6] при помощи сочетания вариационных принципов и техники метода возмущений: в формулах [6] учтены только первые члены асимптотики по l^{-1} .

Из (11), (12) следует, что если \mathbf{H}_0 направлено вдоль линии, соединяющей центры отверстий, то их взаимное влияние приводит к увеличению поляризуемости. Если \mathbf{H}_0 ортогонально этой линии, то взаимное влияние вызывает деполаризацию отверстий. Выбором направления поля \mathbf{H}_0 относительно линии центров можно добиться полной компенсации взаимного влияния отверстий. Введением дополнительного отверстия можно управлять поляризуемостью, когда конструктивные и технологические факторы делают нежелательным изменение размеров основного отверстия.

Любопытно отметить, что вторые члены в $M_{xx}^{(1)}, M_{yy}^{(1)}$ и $M_{xx}^{(2)}, M_{yy}^{(2)}$ одинаковы независимо от соотношения между радиусами отверстий. Поэтому влияние большего отверстия на поляризуемость меньшего будет существеннее, чем обратное.

Заключение

Развитый в данной работе подход позволяет эффективно решать определенный класс краевых задач со смешанными граничными условиями. Он легко обобщается для систем из большего числа отверстий, а также периодических структур из таких отверстий. Его можно использовать и в ряде задач электростатики, теории упругости. Так, им можно проанализировать задачи электростатики для круглых несоединенных дисков, лежащих как в одной плоскости, так и в разных, но параллельных плоскостях. Метод несложно модифицировать на случай, когда плоскость расположения отверстий либо дисков совпадает с границей раздела сред, имеющих различные магнитные и диэлектрические проницаемости.

Полученные в работе приближенные соотношения для тензора магнитной поляризуемости системы отверстий могут быть использованы при проектировании некоторых типов радиотехнических элементов диапазона сверхвысоких частот.

Список литературы

- [1] *Лебедев И. Н.* // ДАН СССР. 1957. Т. 114. № 3. С. 513—516.
- [2] *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. М.; Л.: Наука, 1977.
- [3] *Кузьмин Ю. Н.* // ЖТФ. 1970. Т. 40. Вып. 11. С. 2276—2282.
- [4] *Кузьмин Ю. Н.* // ЖТФ. 1972. Т. 42. Вып. 3. С. 599—604.
- [5] *Заргано Г. Ф., Ляпин В. П., Михалевский В. С.* и др. // Волноводы сложных сечений. М.: Радио и связь, 1986.
- [6] *Филманас Р. Ф.* Автореф. канд. дис. Вильнюс, 1974.
- [7] *Иванов Е. А.* Дифракция электромагнитных волн на двух течах. Минск: Наука и техника, 1968.
- [8] *Гарб Х. Л., Мейерова Р. С., Почикаев Г. В., Фридберг П. Ш.* // РИЭ. 1968. Т. 31. № 8. С. 1651—1653.
- [9] *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.

Поступило в Редакцию
5 января 1989 г.

