Журнал технической физики, т. 59, в. 11 1989

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В РЕЗИСТИВНОЙ СРЕДЕ

Ю. Н. Зайко

В работе [1] исследовалось распространение нелинейных потенциальных волн пространственного заряда (ВПЗ) в одномерной проводящей среде. В гидродинамическом приближении задача описывается системой уравнений [1]

$$E_t + 4\pi (j - j_0) = -4\pi\sigma E,$$

$$(E_z + 4\pi e n)_t = -4\pi\sigma E_z,$$

$$v_t + v v_z = -\frac{e}{m} E - \nu v. \qquad (1)$$

В электронике (1) описывает так называемый резистивный усилитель [2]. Здесь σ — проводимость среды, т. е. резистивного слоя; ν — частота столкновений носителей заряда e и массы m в потоке носителей; n, v — плотность и скорость носителей, n_0 и v_0 — невозмущенные значения n и v; $j=-env$ — ток; $E=-\varphi_z$ — напряженность электрического поля; φ — потенциал; $j_0=-en_0v_0$ — полный ток в системе.

Считая $\sigma \sim \nu$ малыми, можно решать (1) по теории возмущений [3]. Решение невозмущенной системы (1) ($\sigma=\nu=0$) имеет вид ($\theta=kz-\omega t$, где k, ω — волновое число и частота) [3]

$$\theta = \pm \frac{\omega}{\omega_{p0}} \left[(\xi_0 - 1) \arcsin \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{G}} - \sqrt{G - (\xi - \xi_0)^2} \right]. \qquad (2)$$

Здесь $\omega_{p0}^2=(4\pi e^2 n_0)/m$, $\xi=(kv)/\omega$, $\xi_0=(kv_0)/\omega$, $\sqrt{G}$ — амплитуда волны. Решение (2) представляет собой волну, отличающуюся от гармонической по мере роста G. При $G=(\xi_0-1)^2$ волна опрокидывается. Полагая $\oint d\theta=2\pi$, получаем дисперсионное уравнение нелинейных ВПЗ: $\omega=\mp\,\omega_{p0}+kv_0$ [1], совпадающее с дисперсионным уравнением медленных и быстрых ВПЗ, описываемых линеаризованной невозмущенной системой (1). Несмотря на совпадение дисперсионных уравнений в нелинейном и линейном случаях, не существует предельного перехода по $G \to 0$ между ними, в нелинейном случае следует говорить скорее о быстром и медленном пучке [4]. Волна, поступившая на вход резистивной среды (резистивного усилителя), модулирует поток частиц таким образом, что создает в нем две группы частиц: по отношению к одной волна является медленной ($\xi_0 > 1$) и по отношению ко второй ($\xi_0 < 1$) быстрой. Учет взаимодействия частиц, принадлежащих разным группам, требует выхода за рамки используемой здесь гидродинамической модели.

Решение системы (1) ищем в виде (2) с переменными ω, k, G и v_0, уравнения для которых получаются методом усреднения Уизема [5]. При этом в отличие от [1], где усреднялись исходные уравнения, здесь усреднение проводится в уравнениях, имеющих вид законов сохранения для (1), число которых берется равным числу новых переменных, т. е. четырем. В качестве этих уравнений выбраны следующие:

$$k_t + \omega_z = 0; \quad n_t + (nv)_z = 0;$$

$$\mathcal{H}_t + T_z = -\nu m n v^2 + \sigma\varphi\varphi_z;$$

$$\mathcal{P}_t + \mathcal{R}_z = \left[e(n - n_0) - \frac{1}{4\pi}\varphi_{zz} \right] \varphi_z - \nu m n v. \qquad (3)$$

Последние два уравнения в (3) представляют собой закон сохранения энергии для (1), где $\mathcal{H}=n\,(mv^2/2)-e\,(n-n_0)\,\varphi-(\varphi_z^2/8\pi)$ — плотность энергии, $T=(\varphi_z\varphi_t)/4\pi+nv\,((mv^2/2)-e\varphi)$ — плотность потока энергии, и закон сохранения импульса, где $\mathcal{P}=mnv$ — плотность импульса, $\mathcal{R}=mnv^2-en_0\varphi-(1/8\pi)\,\varphi_z^2$ — плотность потока импульса. Выразим все величины через ξ из (1) и (2)

$$v = \frac{\omega}{k}\xi, \quad n = n_0 \frac{\xi_0 - 1}{\xi - 1}, \quad \varphi = \frac{m}{e}\frac{\omega^2}{k^2}\left(\frac{\xi^2}{2} - \xi\right) + \varphi_0, \quad \varphi_\theta^2 =$$

$$= \left(\frac{m\omega_{p0}}{e}\right)^2 \frac{\omega^2}{k^4}\,[G - (\xi - \xi_0)^2].$$

Постоянная

$$\varphi_0 = \frac{m}{e} \frac{\omega^2}{k^2}\left(\xi_0 - \frac{1}{2}\xi_0^2 - \frac{1}{2}G\right),$$

что связано с инвариантностью (1) относительно зарядового сопряжения или, что то же, относительно изменения знака потенциала, при этом колебания φ совершаются в симметричных пределах $\varphi(\xi_0 \mp \sqrt{G}) = \mp (m/e)(\omega^2/k^2)(\xi_0 - 1)\sqrt{G}$.

Усредненная система уравнений имеет вид

$$k_t + \omega_z = 0;\ N_t + [v_0 N]_z = 0;$$

$$\left[N\left(\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{2}G\frac{\omega^2}{k^2}\right)\right]_t + \left[v_0 N\left(\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{2}G\frac{\omega^2}{k^2}\right)\right]_z =$$

$$= -N\left[(4\pi\sigma + \nu)\frac{1}{2}G\frac{\omega^2}{k^2} \times \nu v_0^2\right];$$

$$(Nv_0)_t + (Nv_0^2)_z = -\nu N v_0; \qquad (4)$$

Величина $N = \pm(kv_0 - \omega)/\omega_{p0}$ представляет собой число периодов возмущенной волны на периоде невозмущенной волны, $N = 1$ для невозмущенной волны. Величины $mn_0\left(\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{2}G\frac{\omega^2}{k^2}\right)$ и mn_0v_0 равны средним энергии и импульсу потока на периоде невозмущенной волны, тогда последние два уравнения в (4) представляют собой законы сохранения энергии и импульса, записанные в переменных ω, k, G и v_0, а второе — закон сохранения числа волн.

Покажем прежде всего, что из (4) при $\sigma=\nu=0$ следует устойчивость решения (2), что оправдывает применение адиабатической теории возмущений. Действительно, уравнения (4) при $\sigma=\nu=0$ имеют вид $\hat{A}f_t+\hat{B}f_z=0$, где f — вектор с компонентами ω, k, G, v_0, а вид 4×4 матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$ легко установить с помощью (4). Для решений $f(z-ut)$ получаем уравнение для определения характеристической скорости u: $\det \| \hat{B}-u\hat{A} \| = 0$, которое имеет решения $u_{1,2,3,4}=v_0$. Все четыре характеристических скорости совпадают с групповой скоростью быстрых и медленных ВПЗ и вещественны, что говорит об отсутствии нарастающих решений, т. е. об устойчивости решения (2) [6].

Обратимся теперь к решению (4) при σ, $\nu\neq0$. Последнее уравнение (4) можно привести к виду $v_{0t}+v_0v_{0z}=-\nu v_0$, общее решение которого может быть получено методом характеристик. При граничном условии $v_0(t, 0)=v_0=\mathrm{const}$ характеристики не пересекаются, решение существует в области $0 < z < v_0/\nu$ и имеет вид $v_0(t, z)\equiv v(z)=v_0(1-(\nu z/v_0))$. Предпоследнее уравнение (4) можно привести к виду ($A=G\,\omega^2/k^2$): $A_t+v_0(z)A_z=-(4\pi\sigma+\nu)A$. Это известное уравнение переноса, решаемое методом характеристик [7]. Окончательно, имеем $A(z, t)=A_0[(t+1/\nu\ln(1-(\nu z/v_0))](1-(\nu z/v_0))^{+4\pi\sigma/\nu}$, где $A_0(t)=A(0, t)$. Из первых двух уравнений (4) в предположении $k=k(z)$, $\omega=\omega_0=\mathrm{const}$ имеем

$$k(z) = \left(k_0 - \frac{\nu\omega_0}{v_0^2}z\right)\left(1 - \frac{\nu z}{v_0}\right)^{-2},$$

где $k_0=k(z=0)$.

С учетом этого получаем выражение для амплитуды

$$G(t, z) = G_0\left(t + \frac{1}{\nu}\ln\left(1 - \frac{\nu z}{v_0}\right)\right)\cdot\Gamma(z),$$

где усиление $\Gamma(z)$ имеет вид

$$\Gamma(z) = \left(1 - \frac{\omega_0}{k_0v_0}\frac{\nu_z}{v_0}\right)^2\left(1 - \frac{\nu z}{v_0}\right)^{-3+\frac{4\pi\sigma}{\nu}}. \qquad (5)$$

Из анализа выражения для $G(z, t)$ следует, что возмущение $G_0(t)$, созданное на границе резистивной среды, распространяется со скоростью $v_0(z)$ и усиливается при $\omega_0/(k_0v_0) < 3/2-(2\pi\sigma/\nu)$. Усиление максимально в точке

$$z_m = \frac{k_0v_0}{\omega_0}\frac{v_0}{\nu}\left(-\frac{4\pi\sigma}{\nu} + 3 - 2\frac{\omega_0}{k_0v_0}\right)\left(1 + \frac{4\pi\sigma}{\nu}\right)^{-1}$$

и равно

$$\Gamma_m = 4\left(\frac{\omega_0}{k_0 v_0}\right)^2 \left[\frac{1-\dfrac{4\pi\sigma}{\nu}}{1-\dfrac{k_0 v_0}{\omega_0}}\right]^{1-4\pi\sigma/\nu},$$

а максимальный КПД равен

$$\eta_m = \frac{v_0^2 - v_0^2(z_m)}{v_0^2} = 1 - \left(1 - \frac{\nu z_m}{v_0}\right)^2.$$

Сказанное выше относится к случаю $(k_0 v_0)/\omega_0 < 1$ при условии, что в точке z_m не происходит опрокидывания волны, т. е. $\xi_0(z_m) + \sqrt{G(z_m)} < 1$, что существенно ограничивает применимость результатов малыми амплитудами входного сигнала. При $(k_0 v_0)\omega_0 > 1$ амплитуда волны растет монотонно до опрокидывания в точке z^*, где $\xi_0(z^*) - \sqrt{G(z^*)} = 1$. В любом случае, если $z^* < v_0/\nu$, результаты применимы лишь для $0 < z < z^*$.

В отличие от [1] из настоящей работы не следует существования неустойчивого предельного цикла в фазовом пространстве стационарных решений системы (1).

Автор благодарит Д. И. Трубецкова и участников руководимого им семинара за обсуждения.

Список литературы

[1] *Басс Ф. Г., Конотоп В. В., Притула Г. М.* // РиЭ. 1988. Т. 33. № 2. С. 305.
[2] *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
[3] *Островский Л. А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 27. № 4. С. 454.
[4] *Зайко Ю. Н.* // ЖТФ. 1982. Т. 52. № 12. С. 2429.
[5] *Бхатнагар П.* Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: Мир, 1983. 136 с.
[6] *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977. 386 с.
[7] *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 232 с.

Поступило в Редакцию
22 декабря 1988 г.
В окончательной редакции
20 февраля 1989 г.

---

07 *Журнал технической физики, т. 59, в. 11, 1989*

ИССЛЕДОВАНИЕ АКТИВНОЙ СРЕДЫ РЕКОМБИНАЦИОННОГО ЛАЗЕРА БЛИЖНЕГО УФ ДИАПАЗОНА

Б. А. Брюнеткин, В. М. Дякин, И. Ю. Скобелев, А. Я. Фаенов, С. Я. Хахалин

В работах [1, 2] сообщалось о наблюдении генерации на переходе $4f$—$5g$ иона BeIV ($\lambda = 253$ нм) в рекомбинирующей лазерной плазме твердотельной мишени. Анализ экспериментальных результатов [1, 2] показывает, что коэффициент усиления на переходе $4f$—$5g$ составлял не менее $5 \cdot 10^{-2}$ см$^{-1}$, область генерации расположена на расстоянии $x \geqslant 0.4$ см от мишени, время существования инверсии $\sim$50—60 нс. Сам факт получения генерации является достаточным доказательством наличия усиления в среде, однако является важным и выяснение условий, при которых имеет место генерация, т. е. определение параметров активной среды. Это необходимо как для сопоставления экспериментальных результатов с модельными расчетами формирования активных сред, так и для поисков (а возможно и целенаправленного создания) необходимых условий при исследовании плазмы, содержащей ионы более высоких зарядностей, т. е. при продвижении в коротковолновый диапазон. В настоящей работе спектроскопическими методами исследуется процесс формирования активной среды, а также определены параметры плазмы непосредственно в зоне генерации.

Для получения плазмы импульс излучения Nd лазера с энергией до 20 Дж и длительностью 3 нс по полувысоте фокусировался на поверхность твердой мишени из Be. Плотность