

- [1] *Stankowski J., Kahol P. K., Dalal N. S., Moodera J. S.* // Phys. Rev. B. 1987. Vol. 36. N 13. P. 7126—7128.
- [2] *Blazey K. W., Muller K. A., Bednorz J. G. et al.* // Phys. Rev. B. 1987. Vol. 36. N 13. P. 7241—7243.
- [3] *Мастеров В. Ф., Егоров А. И., Герасимов Н. П. и др.* // Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 48. Вып. 7. С. 289—292.
- [4] *Dulcic A., Leontic B., Peric M., Rakvin B.* // Europhys. Lett. 1987. Vol. 4. N 12. P. 1403—1407.
- [5] *Blazey K. W., Portis A. M., Bednorz J. G.* // Sol. State Comm. 1988. Vol. 65. N 10. P. 1153—1156.
- [6] *Khachatryan K., Weber E. R., Tejedor P. et al* // Phys. Rev. B. 1987. Vol. 36. N 16. P. 8309—8314.
- [7] *Glarum S. H., Marshall J. H., Schneemeyer L. F.* // Phys. Rev. B. 1988. Vol. 37. N 13. P. 7491—7495.
- [8] *Власенко Л. С., Семенченко М. Г., Степанов Ю. П.* // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. Вып. 23. С. 1435—1439.
- [9] *Muller K. A., Takashige M., Bednorz J. G.* // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 58. N 9. P. 1143—1146.
- [10] *Drumheller J. E., Rubenacker G. V. et al.* // Sol. State Comm. 1987. Vol. 64. N 4. P. 509—511.
- [11] *Бароне А., Патерно Дж.* Эффект Джозефсона. М.: Мир, 1984. 639 с.
- [12] *Смирнов С. Н.* // Сверхпроводимость. Сер. физ., хим., техн. 1989. Т. 2. № 5. С. 11—24.
- [13] *Цапин А. И.* // ДАН СССР. 1987. Т. 295. № 5. С. 1112—1113.
- [14] *Щербаков А. С., Кацнельсон М. И., Трефилов А. В. и др.* // ФММ. 1987. Т. 64. № 4. С. 742—746.

Институт химической кинетики и горения  
СО АН СССР  
Новосибирск

Поступило в Редакцию  
5 мая 1988 г.  
В окончательной редакции  
22 февраля 1989 г.

## ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАСПАДА СИЛЬНО ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ

*А. И. Григорьев, С. О. Ширяева*

В целом ряде физических и технических приложений, от жидкометаллических источников ионов и ионных коллоидных реактивных двигателей до масс-спектрометрии жидкостей, теории катодных пятен и грозового электричества, приходится сталкиваться с неустойчивостью заряженной жидкой поверхности. Первые и, пожалуй, наиболее ясные, строгие результаты в этой области принадлежат Рэлею, который более века назад рассчитал критические условия неустойчивости заряженной изолированной сферической капли [1]. В связи с многочисленными приложениями предсказанного эффекта попытки экспериментальной проверки полученного в [1] критерия неустойчивости предпринимались неоднократно и продолжают до настоящего времени (см., например, [2<sup>-5</sup>]). Во всех упомянутых работах справедливость критерия неустойчивости была надежно подтверждена, кроме того, выяснилось [4], что при неустойчивости капля теряет  $23 \pm 5$  % своего исходного заряда и  $0.5 \pm 0.5$  % массы. Что же касается размеров, зарядов и количества мелких капелек, выбрасываемых при неустойчивости, вопроса, представляющего наибольший интерес для приложений, то тут надежные экспериментальные данные отсутствуют. В этой связи в последние годы предпринято несколько попыток теоретического расчета параметров распада из принципа минимума энергии конечного состояния системы [6<sup>-8</sup>], закончившихся, однако, неудачей, поскольку авторы указанных работ 1) принимали, что все эмиттированные капельки тождественны; 2) пренебрегали энергией их электростатического взаимодействия в конечном состоянии; 3) количество эмиттированных капелек брали в качестве независимого термодинамического параметра наравне с радиусом капли. В реальности же при расчете, как показано в [9], необходимо учитывать, что процесс перехода неустойчивой капли в устойчивое состояние является неравновесным, и следует проводить минимизацию не конечного состояния, но

скорости прироста энтропии системы (скорости уменьшения свободной энергии), исходя из принципа наименьшего рассеяния энергии Онзагера.

Пусть капля идеально проводящей жидкости радиуса  $R$ , несущая электрический заряд  $Q_0$ , чуть больший предельного в смысле устойчивости по Рэлею, претерпела неустойчивость. При этом, согласно [10], капля вытягивается в сфероид с эксцентриситетом  $e_1 \approx 0.85$  и с ее вершин начинается эмиссия мелких капелек, уносящих избыточный заряд. Следует отметить, что величина предельного по Рэлею заряда сильно зависит от  $e_1$ , уменьшаясь с увеличением  $e_1$  [10]. При вытягивании капли в сфероид имеющийся на ней заряд становится существенно закритическим.

Пример, что сфероидальная капля в результате неустойчивости выбросила капельку радиуса  $r$  ( $r \ll R$ ) с зарядом  $q$  ( $q \ll Q_0$ ). Пусть температура системы остается неизменной, а также сохраняются полный объем и электрический заряд жидкой фазы. Тогда, учитывая, что эмиттируемая капелька отрывается от большой в поле ее заряда, а, значит, также имеет сфероидальную форму [11] с эксцентриситетом  $e_2$ , для изменения свободной энергии системы можно записать

$$\Delta F = 4\pi r^2 \sigma A + \frac{q^2}{2r} B_2 - \frac{Qq}{R} B_1 + \frac{q^2}{2R} B_1 - \frac{q^2}{R} K + \frac{Qq}{R} K, \quad (1)$$

где

$$A = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 - e_2^2} + \frac{1}{e_2} \arcsin e_2 \right] (1 - e_2^2)^{-1/6}; \quad \nu = \sqrt{1 + \frac{\xi}{a^2}};$$

$$B_i = \sqrt[3]{(1 - e_i^2)} e_i^{-1} \operatorname{arth} e_i; \quad K = \sqrt[3]{(1 - e_1^2)} e_1^{-1} \operatorname{arth} \frac{e_1}{\nu}.$$

В (1) первое слагаемое определяет изменение свободной энергии капиллярных сил, три последующих — изменение собственной электростатической энергии заряженных капелек, два последних — энергию взаимодействия выброшенной капельки с остатком большой капли. В (1)  $\xi$  — эллипсоидальная координата центра маленькой капельки в момент ее отрыва от большой,  $\nu$  — безразмерное расстояние от центра маленькой капельки до центра большой в момент разрыва контакта между ними, измеренное в  $a$ , где  $a$  — большая полуось сфероида,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения.

Учтем, что эмиссия маленькой капли суть отрыв вершины выступа (вырастающего на вершине большой капли при развитии неустойчивости [12]), как только сила кулоновского отталкивания между зарядами большой капли и вершины выступа превысит силу  $2\pi r_n \sigma$ , удерживающую вершину выступа ( $r_n$  — минимальный радиус перетяжки, связывающей капли в момент отрыва).

Пусть заряд вершины выступа в момент начала отрыва  $\beta q$ , где  $\beta < 1$ , а часть заряда  $(1 - \beta) q$  отрывающаяся капелька получает за время отрыва, которое хоть и мало, но конечно. Примем далее, что форма вершины выступа сфероидальна с меньшей полуосью  $b_2$ , и учтем, что напряженность поля большей сфероидальной капли в месте отрыва маленькой капельки равна [13]

$$\gamma \cdot Q (1 - e_1^2) (\nu^2 - e_1^2)^{-1},$$

где параметр  $\gamma$  учитывает тот факт, что часть поверхности сфероида, образующая эмиттирующий выступ, от которого отрывается капля, в создании поля не участвует.

Тогда из условия баланса сил в момент начала разрыва перетяжки получим уравнение для определения  $\nu$

$$\frac{\alpha}{4W} \leq \frac{e_2 (1 - e_2^2)}{e_1 \sqrt{1 - e_2^2} \operatorname{arth} e_2} \frac{1}{\nu^2 - e_1^2} \operatorname{arth} \left( e_1 \frac{\nu - 1}{\nu - e_1^2} \right);$$

$$W = \frac{Q^2}{16\pi R^3 \sigma}; \quad \alpha = \frac{r_n}{\gamma \beta b_2}, \quad (2)$$

где в параметре  $\alpha$  собраны все неопределяемые величины задачи.

Изменение свободной энергии системы (энтропии) связано с появлением новой поверхности, которое можно выразить через  $r$ , и с изменением энергии электрического поля, выражающееся через  $q$ . Потребуем, чтобы это изменение было экстремальным

$$\frac{\partial (\Delta F)}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial (\Delta F)}{\partial q} = 0. \quad (3)$$

Принимая  $W=1$ ,  $e_1^2=0.7$  и  $e_2^2=0.5$ , из системы уравнений (2), (3) несложно найти  $q=q(\alpha)$  и  $r=r(\alpha)$ .

Учитывая, что характерное время эмиссии капелек много меньше времени гидродинамической релаксации большой капли к сферической форме, несложно видеть, что эмиссия капелек будет иметь место до тех пор, пока сила кулоновского отталкивания заряда очередной отрывающейся капельки от заряда, остающегося на исходной капле, будет превышать удерживающую лапласовскую силу в перетяжке.

На рис. 1 представлены рассчитанные на ЭВМ при  $\alpha=0.9$  зависимости безразмерного заряда отрывающихся капелек  $Y=q/Q_0$ , безразмерного радиуса  $X=r/R$  и удельного заряда  $Z=YX^{-3}$  от порядкового номера капелек. Зависимости от неопределенного параметра  $\alpha$

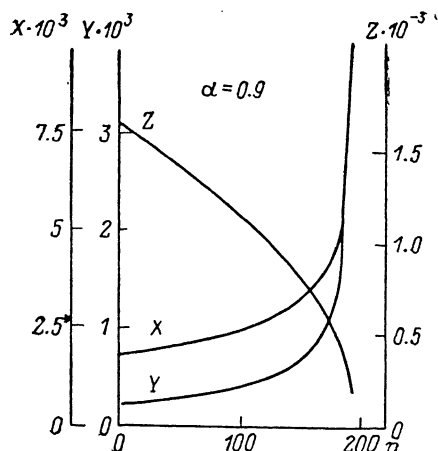


Рис. 1.

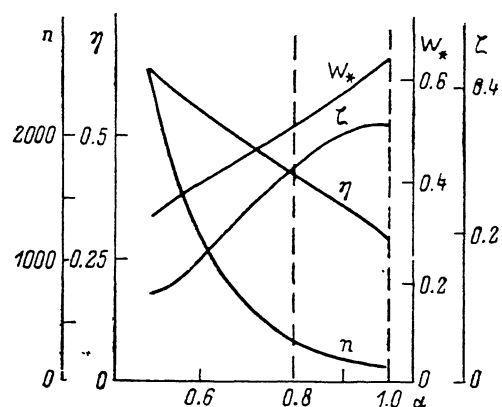


Рис. 2.

для количества эмиттированных капелек  $n$ , параметра Рэлея для остатка исходной капли  $W_*$ , а также для относительной потери его заряда  $\zeta = \Delta Q/Q_0$  и массы  $\eta = \Delta M/M$  представлены на рис. 2. Вертикальными штриховыми линиями выделена область  $\alpha$ , при которой значения  $\zeta$  (наиболее точно измеренной в экспериментах [2<sup>-5</sup>]) соответствуют данным [4]  $\zeta = 0.23 \pm 0.05$ . Значения  $\eta$  и  $W_*$ , попавшие в выделенный диапазон  $\alpha$ , также хорошо согласуются с результатами экспериментов [2<sup>-5</sup>]. Количество эмиттируемых капелек при этом изменяется от  $\sim 100$  до  $\sim 300$ .

Параметр Рэлея для эмиттированных капелек во всех случаях чуть больше единицы, следовательно, они за характерное время развития неустойчивости ( $\sim 10$  периодов собственных колебаний основной моды незаряженной капли) распадутся по тому же закону. Это обстоятельство подтверждается данными экспериментов [5, 8] (см. также [14, 15]).

### Список литературы

- [1] Rayleigh // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184—186.
- [2] Doyle A., Moffett D. R., Vonnegut B. // J. Coll. Sci. 1964. Vol. 19. P. 136—143.
- [3] Abbas M. A., Latham J. // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 30. N 4. P. 663—670.
- [4] Schweizer J. W., Hanson D. N. // J. Coll. Int. Sci. 1971. Vol. 35. N 3. P. 417—423.
- [5] Elghazaly H. M. A., Castle G. S. P. // Proc. IEEE IAS Conf. New York, 1986. P. 1429—1433.
- [6] Roth D. G., Kelly A. J. // IEEE Trans. Ind. Appl. 1983. Vol. 19. N 5. P. 771—775.
- [7] Elghazaly H. M. A., Castle G. S. P. // IEEE Trans. Ind. Appl. 1987. Vol. 23. N 1. P. 108—113.
- [8] Ryce S. A., Patriarche D. A. // Can. J. Phys. 1964. Vol. 42. P. 2185—2194.
- [9] Григорьев А. И., Ширяева С. О. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 5—13.
- [10] Григорьев А. И. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272—1278.
- [11] Григорьев А. И., Земсков А. А. // Методы и средства электрокапельной технологии в ГПС, САПР и АСПП. Л.: Знание, 1988. С. 87—90.
- [12] Григорьев А. И. // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 3. С. 537—541.
- [13] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [14] Vonnegut B., Neubauer R. L. // J. Coll. Sci. 1952. Vol. 7. N 6. P. 616—622.
- [15] Коженьков В. И., Кириш А. А., Фукс Н. А. // ДАН СССР. 1973. Т. 213. № 4. С. 879—880.

Дрославский государственный университет

Поступило в Редакцию  
4 января 1989 г.