ПЕРВЕАНС ПАРАКСИАЛЬНОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПОТОКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Л. Г. Дубас

Вопрос о формировании параксиального релятивистского потока рассматривается в работах [1, 2], где отмечается существование параксиального релятивистского потока с учетом собственного магнитного поля с постоянными поперечными размерами, формируемого в системе электростатической фокусировки.

В работе [2] получено явное выражение для аналога закона 3/2 в релятивистском случае, приведенное в квадратурах. Для расчетов представляется необходимым окончательное интегрирование полученного выражения, и в данной работе предлагается формула в виде ряда, являющаяся конечным решением для аналога закона 3/2.

Согласно результатам работ [1, 2], распределение энергии заряженных частиц вдоль продольной оси электронного потока определяется следующим выражением:

$$z=\int\frac{d\gamma}{\sqrt{2j\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\gamma^{a}-1}}}\,, \tag{1}$$

где z — продольная координата; γ — релятивистский фактор, равный отношению полной энергии частицы к энергии покоя; j — относительная величина плотности тока, равная отношению плотности тока к единичной величине тока, определяемой отношением энергии покоя электрона к волновому сопротивлению вакуума и заряду электрона,

$$\gamma=1+\frac{u}{u_1}\,,\quad j|=\frac{I_0}{\pi r^2 I_1}\,,\quad u_1=\frac{mc^2}{e}\,,\quad I_1=\frac{u_1}{Z_0}\,,\quad Z_0=377\ \text{Ом},\quad r=\text{const},$$

где u — ускоряющее напряжение, u_1 — единичная величина напряжения, I_1 — единичная величина тока, Z_0 — волновое сопротивление вакуума, I_0 — величина тока заряженных частиц.

Для электронного потока единичные величины равны [3, с. 17]

$$u_1=511.02\ \text{кВ},\quad I_1=1.356\ \text{кА}.$$

Для интегрирования вышеприведенного интеграла воспользуемся заменой переменной и интегрированием по частям

$$t=\operatorname{arctg}\sqrt{\gamma^2-1}\,,\quad z=\int\frac{\sin t\,dt}{\sqrt{2j}\,\sqrt{t}\,\cos^2 t}\,,$$

$$\sqrt{2j}\,z=\frac{1}{\sqrt{t}\,\cos t}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^{3/2}\cos t}.$$

Для окончательного интегрирования воспользуемся табличным выражением для полученного интеграла через ряд [4, с. 69].

$$\sqrt{2j}\,z=\frac{1}{\sqrt{t}\,\cos t}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{E_k t^{2k-1/2}}{(2k)!\left(2k-\frac{1}{2}\right)}\,,\quad 0<t<\frac{\pi}{2}\,, \tag{2}$$

где E_k — число Эйлера.

Используя исходные переменные, получаем окончательное выражение для аналога закона 3/2

$$\sqrt{2j}\,z=p^{3/2}\sqrt{\frac{p}{\operatorname{arctg}p}}\left[\frac{1}{1+\sqrt{p^2+1}}+\frac{1}{6}\left(\frac{\operatorname{arctg}p}{p}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{E_k(\operatorname{arctg}p)^{2k-1/2}}{(2k!)\left(2k-\frac{1}{2}\right)}\,;\quad p=\sqrt{\gamma^2-1}\,.$$

Согласно полученной формуле первеанс электронно-оптической системы определяется в соответствии с классическими представлениями следующим выражением:

$$I_0 = 2.333\left[\frac{\text{мкА}}{B^{3/2}}\right]\frac{\pi r^2}{z^2}u^{3/2}F,$$

$$F=\left\{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{p}{\operatorname{arctg} p}}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2+1}+1}+\frac{1}{6}\left(\frac{\operatorname{arctg} p}{p}\right)^2\right]+\frac{1}{2p^{3/2}}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{E_k(\operatorname{arctg} p)^{2k-1/2}}{(2k)!\left(2k-\frac{1}{2}\right)}\right\}\times$$
$$\times\left(\frac{1+\sqrt{p^2+1}}{2}\right)^{3/4},\quad p=\sqrt{2\frac{u}{u_1}+\left(\frac{u}{u_1}\right)^2}, \tag{3}$$

где F — релятивистская поправка к выражению для первеанса.

При использовании нескольких первых чисел Эйлера возможно получение релятивистской поправки к первеансу с высокой степенью точности. Приближенное выражение для поправки к первеансу в нерелятивистском или ультрарелятивистском пределах имеет следующий вид:

$$F\simeq\frac{3}{2}\sqrt{\frac{p}{\operatorname{arctg} p}}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2+1}+1}+\frac{1}{6}\left(\frac{\operatorname{arctg} p}{p}\right)^2\right]\left(\frac{1+\sqrt{p^2+1}}{2}\right)^{3/4};\quad p=\sqrt{\gamma^2-1}.$$

Таким образом, получено конечное решение для положения электронов в параксиальном релятивистском потоке в виде разложения в ряд по степеням функции от энергии электронов. В работе [5] приводится пример практического использования электростатической фокусировки для формирования релятивистских сильноточных электронных пучков с энергией электронов 2 МэВ и током 1.1 кА.

Рассмотрим теперь вопрос о необходимом количестве членов ряда (2), исходя из требуемой точности расчета. Для оценки погрешности, вносимой учетом только конечного числа членов, ограничимся учетом первого, наибольшего, члена в остатке ряда (3).

$$\Delta k-\frac{1}{p^{3/2}}\frac{E_k(\operatorname{arctg} p)^{2k-1/2}}{(2k)!\left(2k-\frac{1}{2}\right)}\frac{(\operatorname{arctg} p)^{1/2}}{3\left(\frac{1}{\sqrt{p^2+1}+1}+\frac{1}{6}\left(\frac{\operatorname{arctg}}{p}\right)^2\right)},$$

Согласно этой формуле относительная погрешность уменьшается с увеличением числа используемых членов ряда (2)

$$\Delta_2<3.1\cdot10^{-2},\quad \Delta_3<1.1\cdot10^{-2},\quad \Delta_4<4.8\cdot10^{-3},\quad \Delta_5<2.7\cdot10^{-3}.$$

Величина полной поправки к первеансу для релятивистского фактора $\gamma=2$ составляет величину 16 %. Для сравнения отметим, что аналогичная поправка без учета собственного магнитного поля равна 9 %. Это сравнение указывает на теоретическое уменьшение величины тока электронно-лучевой системы в случае выключения действия собственного магнитного поля и с учетом релятивистского изменения массы заряженных частиц.

Список литературы

[1] *Данилов В. Н.* // ПМТФ. 1968. № 5. С. 3—10.
[2] *Вялов Г. Н.* // ЖТФ. 1976. Т. 46. Вып. 8. С. 1612—1616.
[3] *Стэррок П. А.* Статическая и динамическая электронная оптика. М., 1958. 287 с.
[4] *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов. М.: Наука, 1983. 176 с.
[5] *Kirkpatrick D. A., Shefev R. E., Bekefi G.* // J. Appl. Phys. 1985. Vol. 57. N 11. P. 5011—5016.

Поступило в Редакцию
27 декабря 1988 г.
В окончательной редакции
5 мая 1989 г.