

- [2] Залесский А.В., Звездин А.К., Кривенко В.Г., Балбашов А.М., Химич Т.А., Еддищенко Е.А. - ЖЭТФ, 1981, т. 80, в. 6, с. 2480-2492.
- [3] Белов К.П., Звездин А.К., Кадомцева А.М., Леви́тин Р.З. Ориентационные переходы в редкоземельных магнетиках. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [4] Бострем И.Г. Автореферат канд. дис., Свердловск, 1979. 20 с.
- [5] Синицын Е.В., Иванов С.И. - ФММ, 1984, т. 62, № 4, с. 6899-699.

Институт кристаллографии
АН СССР,
Москва

Поступило в Редакцию
2 июля 1987 г.

Письма в ЖТФ, том 14, вып. 4

26 февраля 1988 г.

СТРОГИЕ УСЛОВИЯ КВАНТОВАНИЯ ДЛЯ МНОГОУГОЛЬНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

В.В. К о р н е й ч и к, Т.М. К о р н е й ч и к

При расчете коротковолновой асимптотики собственных колебаний резонаторов широко используются приближенные условия квантования Бора-Зоммерфельда-Эпштнейна-Эйнштейна-Келлера-Рубинау [1, 2]. Эти условия предполагают нахождение замкнутых базисных контуров, образованных при отражении луча от стенок резонатора, и наложение на длины этих контуров требования кратности длинам волн колебания. В практически интересных случаях при расчете резонаторов достаточно сложной формы, когда лучи падают на границы резонатора как под большими, так и под малыми углами, эти условия не работают: различные базисные контуры дают разные длины волн, что указывает на принципиально приближенный характер таких условий квантования. В связи с этим представляет несомненный интерес проанализировать путем исследования известных точных решений связь геометрикооптических представлений с волновыми и выявить причины этой приближенности.

Для двумерных резонаторов в форме многоугольников, все углы которых кратны развернутому (следуя [3], будем называть их элементарными), все собственные колебания представляют собой суперпозицию небольшого числа плоских волн. Собственные колебания элементарных многоугольников дают также часть колебаний составных многоугольников, получающихся в результате объединения элементарного многоугольника с его отражениями относительно сторон. Колебания в виде суммы конечного числа плоских волн легко интерпретировать геометрически, сопоставляя каждой пар-

циальной волне из комбинации луч с направлением, совпадающим с направлением распространения этой волны. При этом сразу же получается неожиданный результат: оказывается, что несмотря на то что исследуются решения совершенно точные, эти лучи не образуют, вообще говоря, замкнутых контуров. Покажем это на примере хорошо известных решений для прямоугольного резонатора ($0 < x < a$, $0 < y < b$), представляющих сумму четырех плоских волн:

$$\begin{matrix} E_z \\ H_z \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} e^{i(\frac{\pi p}{a}x + \frac{\pi q}{b}y)} \\ e^{-i(\frac{\pi p}{a}x + \frac{\pi q}{b}y)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i(-\frac{\pi p}{a}x + \frac{\pi q}{b}y)} \\ e^{-i(-\frac{\pi p}{a}x + \frac{\pi q}{b}y)} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

при этом собственные длины волн определяются по формуле

$$\lambda_{pq} = \frac{4ab}{\sqrt{(2pb)^2 + (2qa)^2}}. \quad (2)$$

Как видно из выражения (1), первоначальный луч, соответствующий первой парциальной волне, образует со стенкой резонатора, расположенной параллельно оси x , угол

$$\varphi_{pq} = \arctg \frac{qa}{pb}. \quad (3)$$

Исследование же замкнутых контуров внутри прямоугольного резонатора или, что то же самое, исследование замкнутых путей шарика внутри прямоугольного бильярда, которое сводится к определению углов, под которыми нужно пустить луч (шарик), чтобы он вернулся в исходную точку после двух или четырех отражений (см. рисунок), дает формулу

$$\psi_{pq} = \arctg \frac{pb}{qa}. \quad (4)$$

Сравнивая (3) с (4), мы видим, что в случае, если длины сторон прямоугольника a и b несоизмеримы, т.е. отношение их есть число иррациональное, луч, пущенный под углом (3), ни при каких значениях индексов колебания p и q (кроме тех случаев, когда один из индексов равен нулю и лучи распространяются параллельно одной из пар стенок) не образует замкнутого контура. Однако видно, что между углами (3) и (4) существует простая связь:

$$\psi_{pq} = \frac{\pi}{2} - \varphi_{pq}. \quad (5)$$

Условие (5) означает, что для получения замкнутых лучевых контуров нужно каждой парциальной волне, входящей в собственное колебание резонатора, сопоставить луч, направление которого не

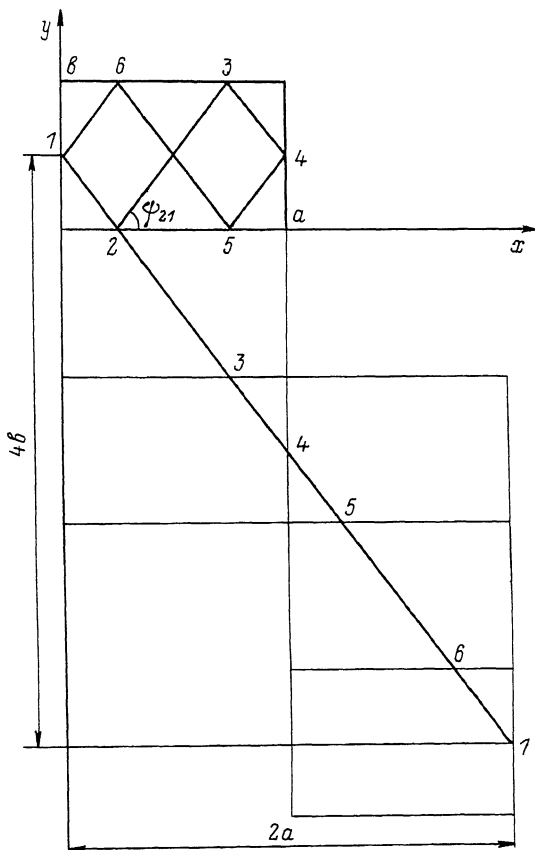


Схема получения замкнутого лучевого пути в прямоугольном резонаторе.

совпадает с направлением распространения этой волны, а перпендикулярно ему, т.е. параллельно волновому фронту волны. А уж коль скоро замкнутый контур образует отрезки фронтов парциальных волн, то попытка определить по суммарной длине этих отрезков длину волны на первый взгляд представляется совершенно необоснованной. Тем не менее исследование формулы для собственных длин волн показывает, что эти величины связаны между собой. Действительно, проведя несложные преобразования, получаем следующее выражение:

$$\lambda_{p=mp', g=mq'} = \frac{4ab}{m\sqrt{(2p'b)^2 + (2q'a)^2}} = \frac{4ab}{mL_{p'q'}} = \frac{4S}{mL_{pq}} \quad (6)$$

В знаменателе этой формулы стоит длина L_{pq} замкнутого контура луча, пущенного под углом $\psi_{pq} = \psi_{p'q'} = \arctg \frac{p'b}{q'a}$, помножен-

ная на наибольший общий делитель индексов колебания m (если p и q - взаимно простые числа, то $m = 1$), а в числителе - произведение площади резонатора $S = \alpha\delta$ на четыре. Аналогично получаем [3] для прямоугольного равнобедренного треугольника (a - длина катета):

$$\lambda_{p=m\rho', q=mq'} = \frac{4a^2}{m\sqrt{(2\rho'a)^2 + (2q'a)^2}} = \frac{8 \cdot \frac{a^2}{2}}{mL\rho'q'} = \frac{8S}{mL\rho q}, \quad (7)$$

для равностороннего треугольника (a - высота):

$$\lambda_{p=m\rho', q=mq'} = \frac{2\sqrt{3}a^2}{m\sqrt{[(\rho'+q')a\sqrt{3}]^2 + [(\rho'-q')a]^2}} = \frac{6 \cdot \frac{a^2}{\sqrt{3}}}{mL\rho'q'} = \frac{6S}{mL\rho q} \quad (8)$$

и для прямоугольного треугольника с длинами катетов a и $\frac{a}{\sqrt{3}}$:

$$\lambda_{p=m\rho', q=mq'} = \frac{2\sqrt{3}a^2}{m\sqrt{[(\rho'+q')a\sqrt{3}]^2 + [(\rho'-q')a]^2}} = \frac{12 \cdot \frac{a^2}{2\sqrt{3}}}{mL\rho'q'} = \frac{12S}{mL\rho q} \quad (9)$$

В числителях правых частей выражений (6)-(9) перед площадью резонатора стоят числовые множители. Смысл их прост - это число парциальных волн, на которые раскладываются собственные колебания данных резонаторов. Поэтому можно, обозначив число парциальных волн буквой N , записать общую для всех элементарных многоугольников формулу:

$$\lambda_{p=m\rho', q=mq'} = \frac{NS}{mL\rho q} \quad (10)$$

Из (10) следует, что длина волны собственного колебания элементарного многоугольника обратно пропорциональна длине замкнутого базисного контура, образованного лучами, перпендикулярными направлениям распространения волн, образующих это колебание. По приближенным же условиям длина волны должна быть прямо пропорциональна длине контура, т.е. целое число раз укладывается в ней. Поэтому приближенные условия дают неправильные результаты для всех случаев, за исключением тех, когда в колебании есть волны, падающие перпендикулярно какой-либо стенке резонатора.

Таким образом, в работе показан принципиально приближенный характер старых условий квантования при применении их к двумерным резонаторам в форме элементарных многоугольников и предложены строгие условия квантования для этих резонаторов.

Л и т е р а т у р а

[1] В а й н ш т е й н Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Советское радио, 1966. 475 с.

- [2] Л а з у т к и н В.Ф. Выпуклый бильярд и собственные функции оператора Лапласа. Л.: ЛГУ, 1981. 196 с.
- [3] К о р н е й ч и к В.В. Геометро-волновой метод расчета волноводов и резонаторов. Автореф. канд. дис. Минск, 1983. 14 с.

Поступило в Редакцию
20 июля 1987 г.
В окончательной редакции
27 ноября 1987 г.

Письма в ЖТФ, том 14, вып. 4 26 февраля 1988 г.

КОЭФФИЦИЕНТ ТРЕНИЯ $Cu_{2-x}Se$ ВБЛИЗИ СУПЕРИОННОГО ПЕРЕХОДА

М.А. К о р ж у е в, Л.М. С е р г е е в а

Суперионный селенид меди $Cu_{2-x}Se$ (температура суперионного фазового перехода $T_c = 291-413$ К [1]) используется для изготовления р-ветви среднетемпературных термоэлементов [2], в том числе с прижимными коммутирующими контактами (никель, нержавеющая сталь), механическая прочность которых определяется силами трения:

$$F = k_T P,$$

где k_T - коэффициент трения, P - сжимающая сила [3].

В настоящей работе измерен коэффициент трения скольжения k_T $Cu_{2-x}Se$ -контртело (нержавеющая сталь 20x13) и обнаружено уменьшение k_T на ~ 35% при переходе сплавов $Cu_{2-x}Se$ в суперионную фазу.

Образцы $Cu_{2-x}Se$ (\varnothing 8 мм, длиной 10 мм) с $x = 0.01, 0.10, 0.15$ и 0.25 прессовали из порошков с фракцией 50-100 мкм под давлением до 1 ГПа.

Измерения k_T проводили на воздухе (влажность 40%) в интервале температур 300-490 К в режиме нагрева и охлаждения со скоростью 4 К/мин. Использовали нагрузку 0.2 кг, скорость вращения контртела (шлифованный цилиндр \varnothing 10 мм) составляла 30 об/мин, линейная скорость перемещения образца относительно контртела - 1.6 см/с, точность измерений - 10%.

Среднюю температуру образца измеряли термпарой хромелькопель с точностью 1 К, износ χ образца в зоне фрикционного контакта определяли с точностью 0.002 мм.

Во всех случаях наблюдали перенос материала образцов на контртело.

На рисунке показаны температурные зависимости k_T сплава $Cu_{1.99}Se$ (1 - охлаждение, 2 - нагрев), а также концентрацион-